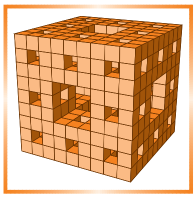

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5278–5285.)

B. 5278. Nevesincs iskolában a végzős reálosok négy csoportot alkotnak, vannak matekosok, fizikások, kémiások és bioszosok. Egy napon a menzán mindannyian egy nagy, kerek asztalnál ülnek együtt, mindenkivel szemben ül valaki és mindenkinek van bal oldali és jobb oldali szomszédja. Bárkit választunk ki, két szomszédjával és a vele szemben ülővel csupa különböző csoport tagjai. Hányan lehetnek a végzős reálosok, ha 20-nál kevesebben vannak?

(*3 pont*) Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

B. 5279. Egy derékszögű szögtartományba két kört írtunk. Az egyik kör az egyik szögszárat az A pontban, a másik kör a másik szögszárat a B pontban érinti. A két kör egymást is érinti a C pontban. Határozzuk meg az $ACB\sphericalangle$ nagyságát.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5280. Legyenek $a>2$, b és c valós számok. Tekintsük a következő három állítást.

(1) Az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nincs valós megoldása.
(2) Az $(a-1)x^2+(b-1)x+(c-1)=0$ egyenletnek 1 valós megoldása van.
(3) Az $(a-2)x^2+(b-2)x+(c-2)=0$ egyenletnek 2 valós megoldása van.

a) Ha tudjuk, hogy az (1)-es és a (2)-es állítás igaz, akkor következtethetünk-e arra, hogy a (3)-as állítás is igaz?

b) Ha tudjuk, hogy a (2)-es és a (3)-as állítás igaz, akkor következtethetünk-e arra, hogy az (1)-es állítás is igaz?

(*4 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5281. Bizonyítsuk be, hogy minden $d>1$ pozitív egész számhoz található egy olyan pozitív egész szám, amelynek osztói között pontosan ugyanannyi d-vel osztható van, mint d-vel nem osztható.

(*5 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5282. Az ABC hegyesszögű háromszögben az A-ból induló magasság talppontja T, a T pont merőleges vetülete az AB oldalon D, az AC oldalon pedig E. Legyen F a BC oldal és az ABE kör második, B-től különböző metszéspontja, és hasonlóan, legyen G a BC oldal és az ACD kör második, C-től különböző metszéspontja. Mutassuk meg, hogy $TF=TG$.

(*5 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

B. 5283. Az N konvex négyszög tartalmaz egy r sugarú körlapot. Mutassuk meg, hogy N kerülete legalább $8r$.

(*4 pont*) Javasolta: *Vígh Viktor* (Sándorfalva)

B. 5284. Legyen $n > 2$. Aladár kiválasztotta a $2n$ csúcsú teljes gráf egy élét. Paula egy forintért rákérdezhet, hogy egy általa megadott teljes párosításban benne van-e a kiválasztott él. Legalább hány forint lapul Paula zsebében, ha ügyes kérdésekkel biztosan ki tudja találni, hogy melyik él lett kiválasztva?

(*6 pont*) Javasolta: *Pach Péter Pál* (Budapest)

B. 5285. A hegyesszögű ABC háromszögben $AB = AC$. A háromszög köré írt körön úgy mozognak az A', B' és C' pontok, hogy az $A'B'C'$ háromszög mindig egybevágó és azonos irányítású az ABC háromszöggel. Legyen a BB' és CC' egyenesek metszéspontja P. Mutassuk meg, hogy az $A'P$ egyenesek egy rögzített ponton mennek át.

(*6 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

Beküldési határidő: 2023. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (839–841.)

A. 839. Adott egy véges, egyszerű, irányítatlan gráf. Anna minden élre pozitív valós számokat ír úgy, hogy bármely csúcsra a csúcsba befutó élekre írt számok összege kisebb egynél. Balázs szeretné úgy megszámozni a csúcsokat nemnegatív valós számokkal, hogy ha tetszőleges v csúcsra a v_0 számot írta, és a csúcsból kiinduló élekre Anna rendre az $e_1, e_2, \ldots, e_k$ számokat írta, továbbá ezen élek másik végein rendre a $v_1, v_2, \ldots, v_k$ számok szerepelnek, akkor $v_0 = \sum_{i=1}^{k} e_i v_i + 2022$ teljesüljön. Mutassuk meg, hogy Balázs mindig meg tudja így számozni a csúcsokat függetlenül a gráftól és az Anna által megadott számozástól.

Javasolta: *Varga Boldizsár* (Verőce)

A. 840. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat az X, Y és Z pontban érinti. Az XYZ háromszögben az X és az Y csúcsból induló magasságok talppontjai X' és Y'. Az $X'Y'$ egyenes az ABC háromszög körülírt körét a P és a Q pontban metszi. Bizonyítandó, hogy X, Y, P és Q egy körre esnek.

Javasolta: *Simon László* (Budapest)

A. 841. Oldjuk meg a $2^a + p^b = n^{p-1}$ egyenletet a nemnegatív egész számok halmazán, ahol p prímszám.

Javasolta: *Weisz Máté* (Cambridge)

Beküldési határidő: 2023. január 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`