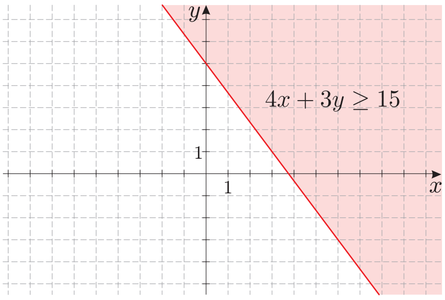
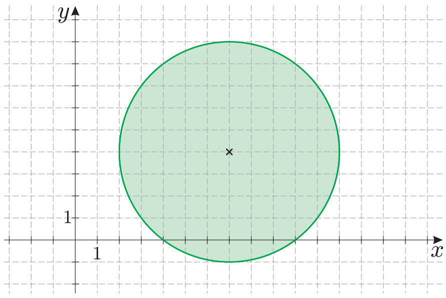


a)



b)

A B ponthalmaz egy $(7;4)$ középpontú, $r = 5$ egység sugarú zárt körlap.

c) A parabola paramétere a fókuszpontjának és vezéregyenesének távolsága: $p = 2$, a parabola tengelypontjának koordinátái $T(-3;-5)$. A fókuszpont a vezéregyenes felett helyezkedik el, ezért a keresett alakzat felfelé nyíló parabola. Ezek felhasználásával a parabola egyenlete:

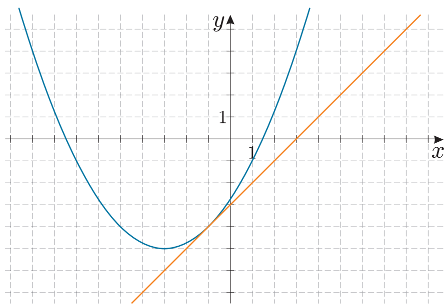
$$y - (-5) = \frac{1}{2 \cdot 2}\big(x - (-3)\big)^2.$$

A nevezetes azonosság alkalmazása után végezzük el a beszorzásokat és a rendezést. Valóban az $y = 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 2{,}75$ egyenletet kapjuk.

d) Az alakzat érintőjének meredekségét az $f(x) = 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 2{,}75$ függvény deriválása után kapjuk, ha kiszámítjuk annak $x = -1$ helyen felvett helyettesítési értékét:

$$f'(x) = 0{,}5x + 1{,}5; \quad f'(-1) = 1.$$

Az érintő egyenlete: $y - (-4) = x - (-1)$, rendezve $y = x - 3$.



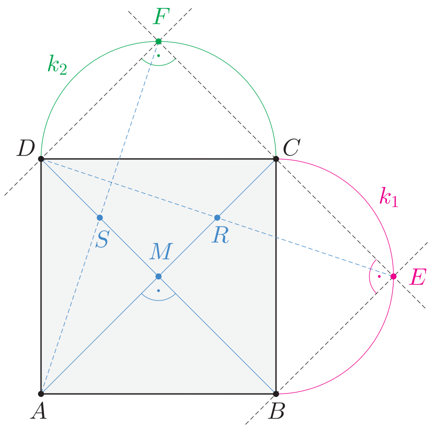
Jócsik Csilla
Győr

C gyakorlatok megoldása

C. 1729. *Az $ABCD$ négyzet BC és CD oldalára mint átmérőre a k_1, illetve k_2 félköröket rajzoljuk a négyzeten kívülre. A két félkörív felezőpontja E, illetve F. A DE és AF szakasz felezőpontja P, illetve Q. Mutassuk meg, hogy P a négyzet AC átlójára, Q pedig a négyzet BD átlójára illeszkedik.*

I. megoldás. Legyen DE és AC metszéspontja R, AF és BD metszéspontja pedig S. Elegendő bizonyítanunk, hogy $R=P$ és $S=Q$.

Az $ABCD$ négyzet AC és BD átlói az M pontban merőlegesen metszik egymást.



1. ábra

A Thalész-tétel alapján $BEC\sphericalangle = CFD\sphericalangle = 90°$, továbbá E és F felezik a megfelelő köríveket, ezért $BE=CE$, valamint $CF=DF$, azaz BEC és CFD egyenlő szárú derékszögű háromszögek, amelyek $BC=CD$ miatt egybevágók is. Tekintsük az *1. ábrát.*

A fentiek szerint BEC és CFD egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért $EC=FC$ is igaz, továbbá $ECB\sphericalangle + BCD\sphericalangle + DCF\sphericalangle = 180°$, vagyis az E, C, F pontok egy egyenesen vannak, és C az EF szakasz felezőpontja. Az AC átló a négyzet BC és CD oldalaival is 45°-os szöget zár be, ez az előzőek alapján azt is jelenti, hogy AC merőleges az EF szakaszra, és így RC párhuzamos DF-fel.

Eszerint RC az EFD háromszög középvonala, és ezért R a DE szakasz felezőpontja, tehát valóban teljesül, hogy $R=P$.

Az előzőek alapján könnyen látható, hogy ACF derékszögű háromszög, amelynek AC befogóját az MS szakasz merőlegesen felezi, és mivel MS párhuzamos CF-fel, ezért MS az ACF háromszög középvonalaként felezi az AF szakaszt.

Így azt is beláttuk, hogy $S=Q$, és ezzel a feladat állítását igazoltuk.

(*A KöMaL honlapon látható megoldás*)

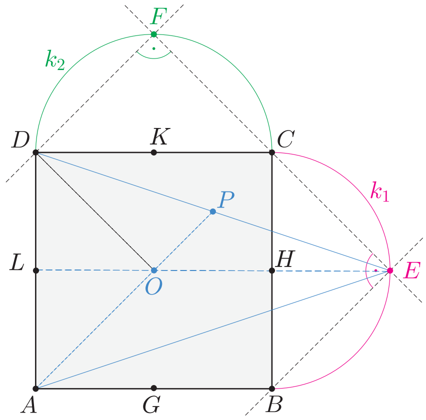
II. megoldás. Legyenek az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai rendre G, H, K, L, és legyen a négyzet oldalhossza a. Nyilvánvaló, hogy a H és K pontok a BC, illetve CD átmérőjű félkörök középpontjai, ezért

$$HB=HC=HE=\frac{a}{2};\quad KC=KD=KF=\frac{a}{2}. \tag{1}$$

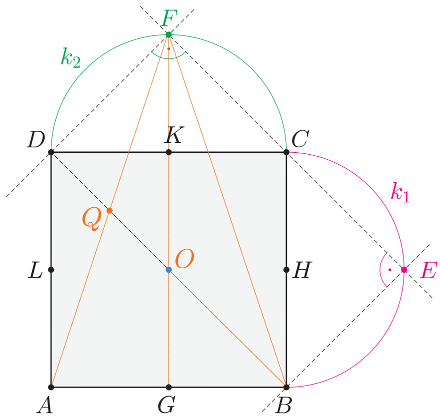
Thalész tétele miatt $BEC\sphericalangle = CFD\sphericalangle = 90°$, így (1) figyelembevételével BEC és CFD egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögek, valamint $HE\perp BC$ és $FK\perp CD$.

Tekintsük a *2. ábrát,* amelyen először az ADE háromszög tulajdonságait vizsgáljuk.

A négyzet LH középvonala átmegy a négyzet O-val jelölt középpontján és merőleges az AD és a BC odalalakra. Mivel HE is merőleges BC-re, így L, O, H és E egy egyenesre esnek, mégpedig a négyzet LH középvonalának egyenesére. Ez azt jelenti, hogy EL a háromszög súlyvonala. Tudjuk még, hogy $LO = OH = HE = \frac{a}{2}$, tehát O a háromszög súlypontja.



2. ábra



3. ábra

Most tekintsük az OP szakaszt. Mivel O a súlypont, ezért ez a szakasz a háromszög súlyvonala, és így P az ED oldal felezőpontja. Másrészt AO a négyzet átlójának egyenese, tehát P illeszkedik az AC átlóra.

A *3. ábra* segítségével igazolhatjuk, hogy az AF szakasz Q felezőpontja illeszkedik a BD átlóra. Az előző esethez hasonlóan beláthatjuk, hogy az ABF háromszögnek GF az egyik súlyvonala, O a súlypontja és így BQ szintén súlyvonal, és Q felezi az AF szakaszt. Másrészt Q illeszkedik BO egyenesére, vagyis a BD átlóra is.

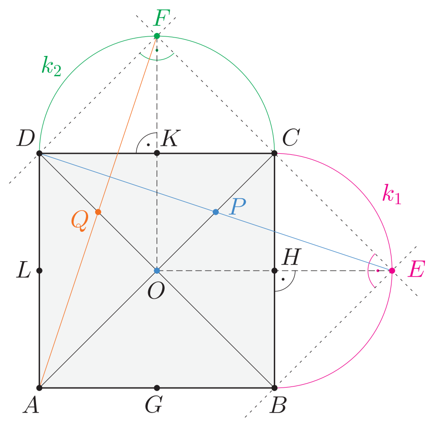
Nagy Anna Éva (Szentendre, Ferences Gimnázium, 10. évf.) dolgozata alapján

III. megoldás. Legyenek az AB, BC, CD, DA oldalak felezőpontjai rendre G, H, K, L, a négyzet átlóinak metszéspontja O, és legyen a négyzet oldalhossza a.

Nyilvánvaló, hogy a H és K pontok a BC, illetve CD átmérőjű félkörök középpontjai, ezért

$$HB = HC = HE = \frac{a}{2};$$

$$KC = KD = KF = \frac{a}{2}.$$



4. ábra

Tudjuk, hogy OH és OK merőleges BC-re, illetve CD-re, valamint

$$OH = OK = \frac{a}{2}, \quad \text{ezért} \quad OE = OH + HE = a.$$

Mivel HE is merőleges BC-re, ezért az O, H, E pontok egy egyenesen vannak, az OE szakasz tehát párhuzamos CD-vel és $OE = CD = a$.

Ez pontosan azt jelenti, hogy $OECD$ paralelogramma, amelynek DE és CO átlói a DE szakasz P felezőpontjában metszik egymást, vagyis P rajta van CO szakaszon és így az AC átlón is.

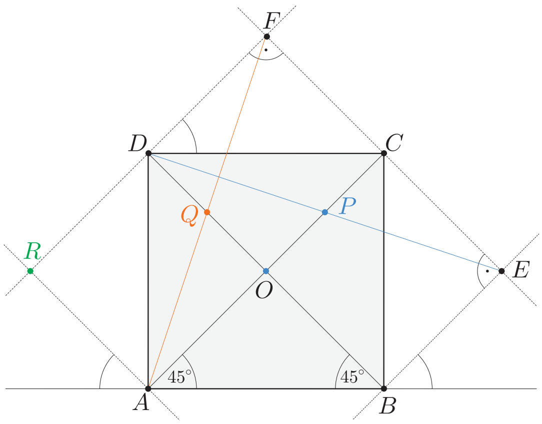
Hasonlóan egyszerű módon láthatjuk be, hogy $OFDA$ is paralelogramma, amelynek AF és DO átlói az AF szakasz Q felezőpontjában metszik egymást, ezért Q illeszkedik a DO szakaszra és így a BD átlóra is.

Vinté csapat: *Hajós-Szabó Máté* és *Krizsán Vince László*
(Budapest, Berzsenyi Dániel Gimn., 10. évf.)

IV. megoldás. Mivel E, F a k_1, illetve k_2 félkörök felezőpontjai, ezért a Thalész-tételt is figyelembe véve a BEC és CFD egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögek, ezért egyrészt $ECF\sphericalangle = ECB\sphericalangle + BCD\sphericalangle + FCD\sphericalangle = 180°$, tehát az E, C, F pontok egy egyenesen vannak, másrészt

$$EBC\sphericalangle = FDC\sphericalangle = 45°. \tag{1}$$

Tekintsük az *5. ábrát,* ahol az A ponton keresztül párhuzamost húztunk az EF egyenessel, ez a DF egyenest az R pontban metszi.



5. ábra

Az (1) összefüggésből $CBA\sphericalangle = 90°$ alapján az is következik, hogy az EB egyenes az AB egyenessel 45°-os szöget zár be, de akkor $AB \parallel CD$ és (1) szerint az EB és FD egyenesek is párhuzamosak. Ugyanakkor a négyzet AC átlója 45°-os szöget zár be az AB egyenessel, ez pedig egyenértékű azzal, hogy

$$AC \parallel EB \parallel FD. \tag{2}$$

Az $EC = FC$ és $BO = DO$, illetve (2) miatt AC az EB és FD egyenesek középpárhuzamosa. Ez azt jelenti, hogy AC tartalmazza az EB és FD egyenesek E és D pontjait összekötő szakasz felezőpontját, azaz a P pontot is.

(1) és $EF \parallel AR$ alapján könnyen beláthatjuk, hogy ARD a BEC és CFD háromszögekkel egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyből az is adódik, hogy az AR egyenes az AB-vel 45°-os szöget zár be. Mivel a BD átló is 45°-os szöget zár be AB-vel, ezért

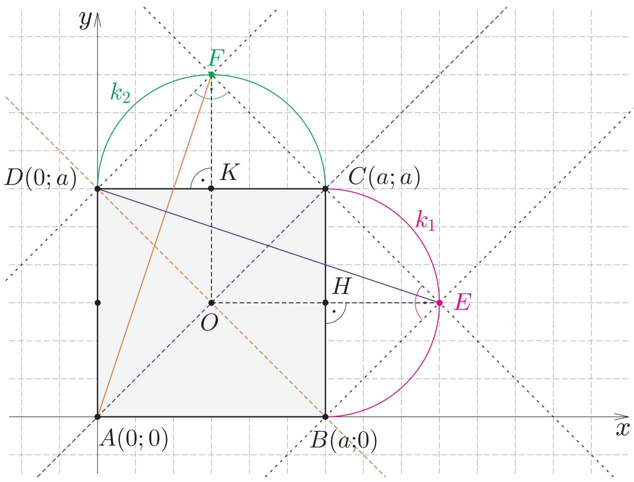
$$BD \parallel EF \parallel AR. \tag{3}$$

Az $FD = RD$ és $CO = AO$, illetve (3) szerint BD az EF és AR egyenesek középpárhuzamosa.

Ezért BD tartalmazza az egyenesek A és F pontjait összekötő szakasz felezőpontját, tehát a Q pontot is.

Gál András (Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium, 10. évf.)
dolgozata alapján

V. megoldás. Legyen a négyzet oldalainak hossza a. Helyezzük el a négyzetet a derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az A pont az origó, a B pont koordinátái $B\big(a;0\big)$, ebből következően a négyzet többi csúcsa $C(a;a)$ és $D(0;a)$.



6. ábra

Legyen a négyzet középpontja O, ennek koordinátái

$$O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right).$$

Az E, F pontok a k_1, illetve k_2 félkörök felezőpontjai, tehát $BE = CE$, illetve $CF = DF$, ezért az E és F pontok rajta vannak a BC, illetve CD szakaszok felezőmerőlegesén és így OE párhuzamos az x-tengellyel, illetve OF párhuzamos az y-tengellyel.

Ha a BC és CD szakaszok felezőpontjai H és K, akkor

$$HE = KF = \frac{a}{2},$$

hiszen H és K a $BC = CD = a$ átmérőjű k_1, illetve k_2 félkörök középpontjai. Mivel $HO = KO = \frac{a}{2}$, ezért az E, F pontok koordinátái

$$E\left(\frac{3a}{2}; \frac{a}{2}\right), \quad F\left(\frac{a}{2}; \frac{3a}{2}\right). \tag{1}$$

Szakasz felezőpontjának koordinátái a szakaszvégpontok koordinátáinak számtani közepei, ezért (1) és a D, A pontok koordinátáinak felhasználásával a DE és AF szakaszok P, illetve Q felezőpontjainak koordinátái:

$$P\left(\frac{3a}{4}; \frac{3a}{4}\right), \quad Q\left(\frac{a}{4}; \frac{3a}{4}\right). \tag{2}$$

A négyzet AC átlójának egyenlete $y = x$, a BD átló egyenlete $y = -x + a$. (2) alapján egyszerű számítással beláthatjuk, hogy a P pont koordinátái kielégítik az $y = x$, Q koordinátái pedig kielégítik az $y = -x + a$ egyenletet, tehát P és Q valóban illeszkednek a megfelelő átlók egyenesére.

A pontok az átlókat alkotó szakaszok belső pontjai, hiszen az AC és BC átlók belső pontjainak x; y koordinátáira egyaránt teljesül, hogy $0 < x < a$, $0 < y < a$, és (2) szerint ez a P, Q pontokra is fennáll. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

(*Több versenyző dolgozata alapján*)

Összesen 211 dolgozat érkezett. 5 pontos 44, 4 pontos 37, 3 pontos 44, 2 pontos 28 dolgozat. 1 pontot 23, 0 pontot 22 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 13 dolgozat.

Megjegyzések. *a*) A dolgozatokban sokféle kisebb-nagyobb hiba előfordult a legegyszerűbb elírástól, számolási hibától egészen a bizonyítandó állítás felhasználásának elvi hibájáig.

b) Hibának számított az is, ha a versenyző helyesen igazolta, hogy a P pont illeszkedik AC-re, leírta, hogy a Q pontra a bizonyítás hasonló, de azt ténylegesen nem hajtotta végre. Az ilyen típusú megoldásokban előfordult, hogy a versenyző utalt rá, hogy a feladatbeli DE és AF szakaszok, illetve a P és Q pont átvihető egymásba forgatással, de nem adta meg a forgatás leírását.

c) Sok megoldás készült koordináta-geometriai úton, mégpedig úgy, hogy a négyzetet derékszögű koordináta-rendszerben speciális (például egységnyi) oldalhosszúsággal és helyzetben vizsgálták, de nem utaltak rá, hogy ez elegendő az eredeti feladat igazolásához is.

d) Több olyan megoldás is született, ahol a feltöltött dokumentum mindössze egy szerkesztett ábrát tartalmazott szöveges indoklás nélkül. Az ilyen dolgozatok 0 pontot kaptak.

C. 1731. *Az $ABCD$ trapéz párhuzamos oldalai $AB > CD$, a trapéz középvonala az AC átlót az E, a BD átlót az F pontban metszi. A CD szakasz hossza az AB és EF szakaszok hosszának*

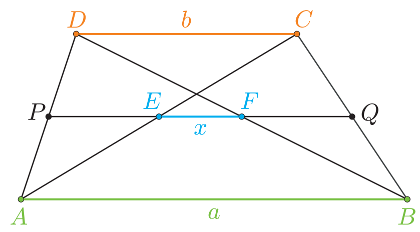
a) *számtani,*

b) *mértani közepe.*

Határozzuk meg, hogy a két eset közül melyikben lesz nagyobb az $\frac{AB}{CD}$ arány értéke.

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. A trapéz középvonala PQ, így egyrészt $PQ=\frac{a+b}{2}$, másrészt $PQ \parallel a \parallel b$. Ekkor PE és FQ az ACD, illetve a BCD háromszög középvonala, tehát



$$PE=FQ=\frac{b}{2}.$$

Ebből már felírhatjuk EF hosszát:

$$EF=x=PQ-PE-FQ=\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2}.$$

Fejezzük ki a két esetben ennek segítségével a kérdezett arányt.

a) $CD=\frac{AB+EF}{2}$. Tehát

$$b=\frac{a+x}{2}=\frac{a}{2}+\frac{a-b}{4}=\frac{3a-b}{4},$$

$$4b=3a-b,$$

$$3a=5b,$$

$$\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}=\frac{5}{3}.$$

b) $CD^2=AB\cdot EF$. Vagyis

$$b^2=a\cdot\frac{a-b}{2}=\frac{a^2-ab}{2},$$

$$2b^2=a^2-ab,$$

mindkét oldalt osztva a pozitív b^2 értékével:

$$2=\frac{a^2}{b^2}-\frac{ab}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right),$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{a}{b}\right)-2=0.$$

Ez $\frac{a}{b}$-re nézve egy másodfokú egyenlet, így

$$\frac{a}{b}=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2},$$

ami vagy 2, vagy -1. Utóbbi nyilván nem lehetséges, vagyis ebben az esetben

$$\frac{AB}{CD}=\frac{a}{b}=2.$$

Tehát a *b*) esetben nagyobb az $\frac{AB}{CD}$ arány értéke.

Hochenburger Zoárd (Budapest, Városmajori Gimn., 11. évf.)

Megjegyzés. Sokan próbálkoztak valamilyen közepek közötti összefüggést használni a megoldásban, például kihozták, hogy az első esetben

$$\frac{AB}{CD} = \frac{1}{\dfrac{1+\dfrac{EF}{AB}}{2}},$$

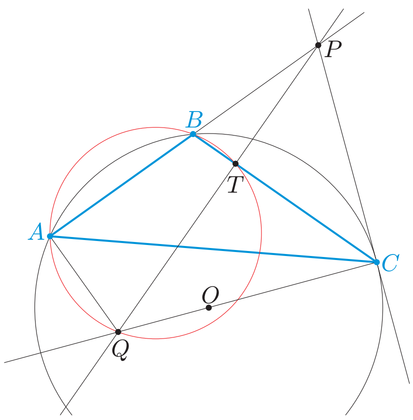
vagyis $\frac{AB}{CD}$ értéke éppen 1-nek, és $\frac{AB}{EF}$-nek a harmonikus közepe. A második esetben pedig $\frac{AB}{CD} = \sqrt{\frac{AB}{EF}}$, ami pedig 1-nek és $\frac{AB}{EF}$-nek a mértani közepe. Mivel a mértani közép legalább akkora, mint a harmonikus közép, ezért a $b)$ esetben nagyobb a kérdéses arány. Miért nem jó gondolatmenet ez és a hozzá hasonlóak, ahol a két esetben egy-egy középértéket vesznek, majd a kettőt összehasonlítják? Azért, mert valójában nem ugyanannak a két számnak veszik a különböző középértékeit. Meg lehet gondolni, például a fenti megoldás alapján, hogy a, b és x közül bármelyik kettő egyértelműen meghatározza a harmadik értékét (vagy nem jöhet létre a trapéz). Vagyis pl. rögzített a érték esetén egy bizonyos x értékre lesz b éppen a számtani, illetve mértani közepe a-nak és x-nek.

58 dolgozat érkezett. 5 pontos 20, 4 pontos 5, 1 pontos 2, 0 pontos 28 dolgozat. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.

Matematika feladatok megoldása

B. 5241. *Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle > 90°$, a körülírt kör középpontja O. A körülírt körhöz C-ben húzott érintő az AB egyenest a P pontban, a P-ből BC-re állított merőleges pedig az OC egyenest Q-ban metszi. Igazoljuk, hogy AB merőleges AQ-ra.*

(*4 pont*) Javasolta: *Nagy Zoltán Lóránt* (Budapest)



Megoldás. Legyen a P-ből BC-re állított merőleges talppontja T. Ekkor $BTQ\sphericalangle$ derékszög, azaz T rajta van a BQ átmérőjű Thalész-körön. A feladat állítása, mely szerint $BAQ\sphericalangle$ derékszög, azzal ekvivalens a Thalész-tétel alapján, hogy A is rajta van a BQ átmérőjű körön, vagyis az előbbiek alapján a BTQ körön. A feladat állítása tehát ekvivalens azzal, hogy A rajta van a BTQ körön, azaz $BTQA$ húrnégyszög, ezt fogjuk a továbbiakban megmutatni.

Megjegyezzük, hogy PC merőleges $OC \equiv QC$-re, hiszen egy adott pontba hú-