B. 5276. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész k szám létezik, amelyre 2^k számjegyeinek összege

a) kisebb;

b) nagyobb,

mint 2^{k+1} számjegyeinek összege.

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5277. Az ABC háromszögbe írt kör középpontja I. A BCA körív felezőpontja F, az FI egyenes a körülírt kört másodszor az M pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a CM egyenes átmegy a beírt és a körülírt kör külső hasonlósági pontján.

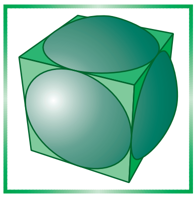
(*6 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (836–838.)



A. 836. Minden $i \in \mathbb{N}$ esetén legyen A_i, B_i és C_i három véges és páronként diszjunkt részhalmaza $\mathbb{N}$-nek. Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ minden, A, B és C halmazokból álló partíciójához létezik $i \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $A_i \subset A$, $B_i \subset B$ és $C_i \subset C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik véges $S \subset \mathbb{N}$ is, melyre $\mathbb{N}$ minden A, B és C halmazokból álló partíciójához létezik $i \in S$ úgy, hogy $A_i \subset A$, $B_i \subset B$ és $C_i \subset C$.

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

A. 837. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder minden éle érint egy G gömböt; az A_i csúcsból a G-hez húzott érintőszakasz hossza legyen a_i. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{a_i}\right)^2 > 2\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{a_i^2}\right).$$

Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

A. 838. Az $X \subset \mathbb{Z}^+$ és $Y \subset \mathbb{Z}^+$ halmazokat bajtársiasnak nevezzük, ha minden pozitív egész n előáll $n = xy$ alakban, ahol $x \in X$ és $y \in Y$. Jelöljük $X(n)$-nel és $Y(n)$-nel azt, hogy az X és Y halmazoknak hány eleme van az első n pozitív egész között.

Legyen $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^+$ egy tetszőleges végtelenbe tartó függvény. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan X és Y bajtársias halmazok, hogy $\frac{X(n)}{n}$ és $\frac{Y(n)}{n}$ is a 0-hoz tartanak, és tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik olyan $n\in\mathbb{Z}^+$, hogy

$$\frac{\min\big\{X(n),Y(n)\big\}}{f(n)}<\varepsilon.$$

❄

Beküldési határidő: 2022. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 574. Egy hosszú polcon dobozok helyezkednek el sorban egymás mellett, melyeket pozitív egész számok azonosítanak. Egy robot képes arra, hogy a polcról levegyen egy dobozt, képes arra, hogy magánál tartson egy dobozt, és képes arra, hogy a polcon egy üres helyre elhelyezze a magánál tartott dobozt. Ezenkívül a robot a polc elejétől a végéig tud mozogni előre és vissza, akár úgy is, hogy dobozt hoz magával, valamint képes arra, hogy mozgás közben egy polcon lévő dobozt egy szomszédos üres helyre toljon át. A robot rendező algoritmusa a következők szerint vezérli a robotot:

1. Elindul a polc elejétől, és ha van olyan doboz, amely nagyobb azonosító számmal rendelkezik, mint az utána következő doboz, akkor azt leveszi a polcról.
2. Mozog tovább a polc vége felé, miközben tartja a kivett dobozt, és minden olyan dobozt a polc eleje felé tol a szomszédos üres helyre, amely kisebb azonosító számú, mint az a doboz, amit a kezében tart.
3. Ha talál olyan dobozt, amely nagyobb azonosító számú, mint a kezében tartott doboz, akkor azt már nem tolja a polc eleje felé, hanem az azt megelőző üres helyre leteszi a magánál tartott dobozt. Ezután visszatér a polc elejére, ahol az 1. pont szerint kezdi ismét a működését.
4. Ha a polc elejétől indulva nem talál olyan dobozt, amely nagyobb azonosító számmal rendelkezne, mint a következő doboz, akkor abbahagyja a rendezést, mivel a dobozok az azonosító számok szerint növekvő sorrendben vannak.

Készítsünk programot, amely adott dobozok esetén megadja, hogy a robotnak hányszor kell levennie dobozt a polcról, illetve hányszor kell egy hellyel odébb tolnia dobozt!