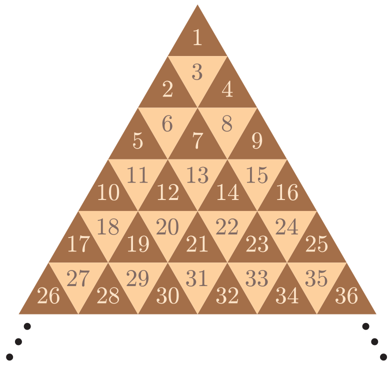
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5270–5277.)

B. 5270. n^2 darab egységnyi oldalú szabályos háromszögből egy n egység oldalú háromszöget állítottunk össze, és a kis háromszögeket felváltva sötétre és világosra színeztük. A háromszögekbe beírtuk sorban az $1, 2, 3, \ldots, n^2$ számokat az *ábra* szerint. Mennyi a sötét háromszögekbe írt számok összege?

(*3 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)



B. 5271. Legyen ABC olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyben a C csúcsnál van a derékszög. Jelöljük ki az AB oldal belsejében az A', a BC oldal belsejében a B' és a CA oldal belsejében a C' pontokat úgy, hogy az $A'B'C'$ háromszög hasonló legyen az ABC háromszöghöz.

Mutassuk meg, hogy az AB oldal felezőpontja, az $A'B'$ szakasz felezőpontja és a C pont egy egyenesre esik.

(*3 pont*) Javasolta: *Hajdu Endre* (Sopron) és *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5272. Egy bolha a koordinátarendszer (a, b) pontjából indul, ahol a, b pozitív egészek. Egy-egy ugrással balra vagy lefele mozog egységnyit. Addig ugrál, amíg el nem éri az x vagy az y tengelyt. A lehetséges ugrássorozatok hányadrésze végződik az x tengelyen?

(*4 pont*) *Melján Dávid* (Kecskemét) ötletéből

B. 5273. Kijelöljük az ABC egyenlő oldalú háromszög AB oldalán a D, a BC oldalán pedig az E pontot úgy, hogy $BCD\sphericalangle = 45°$ és $CDE\sphericalangle = 30°$. Mutassuk meg, hogy $BE = 2AD$.

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5274. Az $a < b$ pozitív egészek szorzata négyzetszám. Mutassuk meg, hogy van olyan x pozitív egész, amelyre $a \leqslant x^2 \leqslant b$.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5275. Van-e olyan irracionális a szám, amelyre $a^{\sqrt{3}}$ racionális?

(*5 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5276. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész k szám létezik, amelyre 2^k számjegyeinek összege

a) kisebb;

b) nagyobb,

mint 2^{k+1} számjegyeinek összege.

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5277. Az ABC háromszögbe írt kör középpontja I. A BCA körív felezőpontja F, az FI egyenes a körülírt kört másodszor az M pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a CM egyenes átmegy a beírt és a körülírt kör külső hasonlósági pontján.

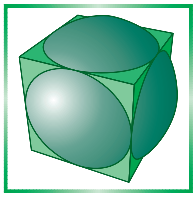
(*6 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (836–838.)



A. 836. Minden $i\in\mathbb{N}$ esetén legyen A_i, B_i és C_i három véges és páronként diszjunkt részhalmaza $\mathbb{N}$-nek. Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ minden, A, B és C halmazokból álló partíciójához létezik $i\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $A_i\subset A$, $B_i\subset B$ és $C_i\subset C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik véges $S\subset\mathbb{N}$ is, melyre $\mathbb{N}$ minden A, B és C halmazokból álló partíciójához létezik $i\in S$ úgy, hogy $A_i\subset A$, $B_i\subset B$ és $C_i\subset C$.

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

A. 837. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder minden éle érint egy G gömböt; az A_i csúcsból a G-hez húzott érintőszakasz hossza legyen a_i. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i}\right)^2>2\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i^2}\right).$$

Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

A. 838. Az $X\subset\mathbb{Z}^+$ és $Y\subset\mathbb{Z}^+$ halmazokat bajtársiasnak nevezzük, ha minden pozitív egész n előáll $n=xy$ alakban, ahol $x\in X$ és $y\in Y$. Jelöljük $X(n)$-nel és $Y(n)$-nel azt, hogy az X és Y halmazoknak hány eleme van az első n pozitív egész között.