Matematika feladatok megoldása

B. 5109. *Legyen*

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 7, \quad x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Van-e négyzetszám ebben a sorozatban?

(*6 pont*)

Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Canada)

Megoldás. Próbáljunk meg közvetlen képletet adni a sorozat tagjaira. Ehhez először keressük a rekurzió megoldását $x_n = q^n$ alakban. Ekkor a megadott képlet szerint

$$q^n = 4q^{n-1} - q^{n-2},$$

$$q^{n-2}(q^2 - 4q + 1) = 0.$$

Mivel $q \neq 0$, ezért a $q^2 - 4q + 1 = 0$ egyenlet gyökeire lesz szükségünk. (Azt szoktuk mondani, hogy a sorozat karakterisztikus polinomja* $x^2 - 4x + 1$.) A polinom gyökei $2 + \sqrt{3}$ és $2 - \sqrt{3}$, tehát az $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ rekurziót az $x_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$ és az $x_n = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ sorozatok is kielégítik, és ezek bármilyen lineáris kombinációja: $x_n = a\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + b\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$, ahol a és b értéke tetszőleges. Nekünk azonban adott a sorozat első két eleme is, tehát nem minden a és b érték lesz megfelelő. Keressük meg a megfelelő a, b értékeket.

A rekurziót visszafelé alkalmazva adódik, hogy $x_0 = 1$, így $1 = a + b$. Mivel $x_1 = 2$, $2 = a\left(2 + \sqrt{3}\right) + b\left(2 - \sqrt{3}\right) = 2(a + b) + \sqrt{3}(a - b) = 2 + \sqrt{3}(1 - 2b)$, így $0 = \sqrt{3}(1 - 2b) \ \Rightarrow \ b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Tehát a sorozat n-edik eleme

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\Big).$$

A rövidség kedvéért innentől legyen $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$. Megjegyezzük, hogy $\alpha\beta = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 1$. A sorozat elemeire kapott képlet szerint:

$$x_{3k} = \frac{\alpha^{3k} + \beta^{3k}}{2} = \frac{\left(\alpha^k\right)^3 + \left(\beta^k\right)^3}{2} = \frac{\left(\alpha^k + \beta^k\right)\left(\alpha^{2k} - \alpha^k\beta^k + \beta^{2k}\right)}{2} =$$

$$= \frac{\alpha^k + \beta^k}{2} \cdot \left(\alpha^{2k} - 1 + \beta^{2k}\right) = x_k \cdot (2x_{2k} - 1).$$

* Lásd a *Megjegyzést* a megoldás végén.

Megmutatjuk, hogy itt

$$(x_k, 2x_{2k}-1)=1: \tag{1}$$

$$(x_k, x_{2k}-1) \mid (2x_k, 2x_{2k}-1)=\left(\alpha^k+\beta^k, \alpha^{2k}-\alpha^k\beta^k+\beta^{2k}\right),$$

így

$$\begin{aligned}&(x_k, x_{2k}-1) \mid \left((\alpha^k+\beta^k)^2, \alpha^{2k}-\alpha^k\beta^k+\beta^{2k}\right)=\\&=\left(\alpha^{2k}+2\alpha^k\beta^k+\beta^{2k}, \alpha^{2k}-\alpha^k\beta^k+\beta^{2k}\right)=\\&=\left(3\alpha^k\beta^k, \alpha^{2k}-\alpha^k\beta^k+\beta^{2k}\right)=\left(3, \alpha^{2k}-\alpha^k\beta^k+\beta^{2k}\right)=(3, 2x_{2k}-1).\end{aligned}$$

Tehát ez a legnagyobb közös osztó 1 vagy 3 lehet. Megmutatjuk, hogy nem lehet 3. A sorozat elemeinek mod 3 maradéka a következő mintát mutatja (x_0-val kezdve): $1; 2; 1; 2; \ldots$. Ez a ciklus örökké ismétlődik, mert a sorozat rekurzív. Vagyis x_{2k}-nak a 3-as maradéka mindig 1, tehát $2x_{2k}-1 \equiv 1 \pmod 3$. Ezzel beláttuk (1)-et.

Ha van négyzetszám a sorozatban, akkor annak a sorszáma biztosan osztható 3-mal. Tekintsük ugyanis a sorozatot mod 5: $1; 2; 2; 1; 2; 2; 1; 2; 2; \ldots$. A sorozat rekurzivitása miatt ez a ciklus örökké folytatódik. Azonban egy négyzetszám 5-tel osztva csak 0, 1 vagy 4 maradékot adhat.

Tegyük fel, hogy a sorozatban legelőször szereplő négyzetszám az x_{3m}. Ekkor $x_{3m}=x_m\cdot(2x_{2m}-1)$. De a szorzat két tényezője (1) miatt relatív prím, így muszáj, hogy külön-külön is négyzetszámok legyenek. Ekkor x_m is négyzetszám, ami ellentmond a fenti feltevésünknek.

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Nem nehéz belátni a következőt. Tegyük föl, hogy egy $(x_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ sorozatot az

$$x_{n+k}=a_{k-1}x_{n+k-1}+a_{k-2}x_{n+k-2}+\ldots+a_0x_n$$

lineáris rekurzióval (és első k elemének megadásával) definiálunk, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ adott konstansok. Ha az $x^k-a_{k-1}x^{k-1}-a_{k-2}x^{k-2}-\ldots-a_0$ polinomnak (a rekurzióhoz tartozó karakterisztikus polinomnak) k különböző gyöke van: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstansok, amelyekkel a sorozat t-edik elemét (minden t-re) az explicit $x_t=c_1\beta_1^t+c_1\beta_1^t+c_2\beta_2^t+\ldots+c_k\beta_k^t$ alakban kaphatjuk meg.

28 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 6 versenyző: Baski Bence, Füredi Erik Benjámin, Lengyel Ádám, Lovas Márton, Seres-Szabó Márton, Tiderenczl Dániel. 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 14, 1 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

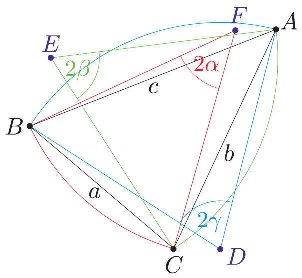
B. 5226. *Egy háromszög mindhárom oldalának hossza legfeljebb* 2 *egység. Minden csúcspárt összekötünk egy-egy olyan körívvel, amely egy-egy egységsugarú körnek a félkörnél nem hosszabb íve. Igazoljuk, hogy*

$$a'+b'>2c'/3,$$

ahol a', b', c' a körívek hosszát jelöli.

(*5 pont*)

I. megoldás. Az egységsugarú körben nagyobb húrhoz nagyobb ív tartozik, ezért ha a háromszögben a vagy b nagyobb, mint c, akkor az egyenlőtlenség nyilván teljesül. Feltehető tehát – az egyenlőtlenség a'-re és b'-re, és így a-ra és b-re való szimmetriája miatt –, hogy $a \leqslant b \leqslant c$.



Használjuk az *ábra* jelöléseit és legyen az A és B csúcsokhoz tartozó körív középpontja D, az A és C csúcsokhoz tartozóé E, végül a B és C csúcsokhoz tartozóé F. Legyen a $BFC\sphericalangle = 2\alpha$, ahol $0 < 2\alpha \leqslant 2\pi$. Ekkor a BFC egyenlő szárú háromszögben ($BF = FC = R = 1$) az F-ből induló magasságot behúzva két egybevágó, derékszögű háromszöget kapunk, melyekben $\sin\alpha = \frac{a/2}{BF} = a/2$, amiből $a = 2\sin\alpha$ következik. Hasonlóan $b = 2\sin\beta$ és $c = 2\sin\gamma$.

A háromszög-egyenlőtlenség miatt tudjuk, hogy $a + b > c$. Ebbe behelyettesítve a kapott értékeket: $2\sin\alpha + 2\sin\beta > 2\sin\gamma$, tehát $\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma$. Mivel az egységsugarú körben nagyobb húrhoz nagyobb középponti szög tartozik, ezért $2\alpha \leqslant 2\beta \leqslant 2\gamma$ és így $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Az egységsugarú kör kerülete 2π. A P és Q végpontok közé húzott O középpontú rövidebb körív hosszát a POQ szög segítségével számíthatjuk ki:

$$\text{ív hossza} = \text{kerület} \cdot \frac{POQ\sphericalangle}{2\pi},$$

hiszen 2π a teljes szög. Így az a' ív hossza

$$2\pi \cdot \frac{BFC\sphericalangle}{2\pi} = 2\alpha.$$

Ugyanígy a b' ív hossza $AEC\sphericalangle = 2\beta$, valamint a c' ív hossza $ADB\sphericalangle = 2\gamma$. Így a bizonyítandó állítás a következővel ekvivalens:

$$2\alpha + 2\beta > 2/3 \cdot 2\gamma.$$

Osztva 2-vel azt kapjuk, hogy $\alpha + \beta > 2/3 \cdot \gamma$.

Mivel $\pi/2 \geqslant \gamma$, ezért $\alpha + \beta > \pi/3$ esetén biztosan teljesül az egyenlőtlenség. Így elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\alpha + \beta \leqslant \pi/3$.

Jelöljük innentől kezdve $(\alpha+\beta)$-t 2φ-vel, $0 < 2\varphi \leqslant \pi/3$. Így azt kell belátnunk, hogy $2\varphi > 2/3 \cdot \gamma$, azaz $3\varphi > \gamma$. Mivel a $[0, \pi/2]$ intervallumon a szinusz függvény szigorúan monoton nő és 3φ és γ is ezen az intervallumon belül van, ezért ez az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, amikor a $\sin(3\varphi) > \sin\gamma$ egyenlőtlenség.

Ha belátjuk, hogy $\sin(3\varphi) > 2\sin\varphi$ és $2\sin\varphi > \sin\gamma$ is fennáll, akkor kész vagyunk.

Lássuk be először, hogy $2\sin\varphi > \sin\gamma$. Beláttuk már, hogy $\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma$ és mivel a $[0, \pi/2]$ intervallumon a szinusz függvény konkáv, ezért a Jensen-egyenlőtlenség miatt $2\sin\big((\alpha+\beta)/2\big) \geqslant \sin\alpha + \sin\beta$, hiszen α és β ebbe az intervalluma tartozik. Emiatt azt is biztosan tudjuk, hogy $2\sin\big((\alpha+\beta)/2\big) > \sin\gamma$, ahol $\alpha + \beta$ helyére (2φ)-t beírva $2\sin\varphi > \sin\gamma$.

Most pedig lássuk be, hogy $\sin\big(3\varphi\big) \geqslant 2\sin\varphi$, ha teljesülnek φ-re a feltételek, azaz $0 < \varphi \leqslant \pi/6$. Az addíciós tételekből $\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, amit az egyenlőtlenségbe beírva $3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \geqslant 2\sin\varphi$. Ezt átrendezve: $\sin\varphi \geqslant 4\sin^3\varphi$, amit $\sin\varphi > 0$-val egyszerűsítve $1 \geqslant 4\sin^2\varphi$. Most gyököt vonva mindkét oldalból azt kapjuk, hogy $1 \geqslant 2\sin\varphi$, ami $0 < \varphi \leqslant \pi/6$ esetén igaz, hiszen $\pi/6$-nál egyenlőség áll fenn, 0-tól $\pi/6$-ig pedig a szinusz függvény szigorúan monoton nő. Ezzel beláttuk, hogy $\sin(3\varphi) \geqslant 2\sin\varphi$.

Tehát $\sin(3\varphi) > 2\sin\varphi$ és $2\sin\varphi > \sin\gamma$ is igaz, vagyis $\sin(3\varphi) > \sin\gamma$. Így mindig teljesül az $\alpha + \beta > 2/3 \cdot \gamma$ egyenlőtlenség, azaz $a' + b' > 2/3 \cdot c'$. Beláttuk az állítást, $a' + b' > 2c'/3$.

(A feladat feltétele, hogy a háromszög oldalai legfeljebb 2 egység hosszúak, csak arra kellett, hogy tudjuk, hogy létezik minden oldalhoz egység sugarú körív.)

Móricz Benjámin (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

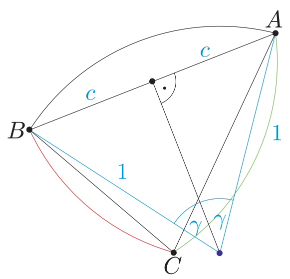
II. megoldás. Először is idézzük fel, hogy az arkuszszinusz függvény* a $[0,1]$ intervallumon konvex, azaz bármely $x_1, x_2 \in [0,1]$ esetén

$$\frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2} \geqslant \arcsin\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Másodszor megmutatjuk, hogy $\arcsin x \geqslant \arcsin(2x)/3$ minden $0 < x \leqslant 1/2$ esetén. A $0 < x \leqslant 1/2$ feltételből azonnal következik, hogy $x \geqslant 4x^3$. Ebből $3x - 4x^3 \geqslant 2x$, és felhasználva a jól ismert $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$ azonosságot kapjuk, hogy

$$\sin(3\arcsin x) = 3\sin(\arcsin x) - 4\big(\sin(\arcsin x)\big)^3 = 3x - 4x^3 \geqslant$$
$$\geqslant 2x = \sin(\arcsin 2x).$$

Mivel az arkuszszinusz szigorúan monoton növő, így $3\arcsin x \geqslant \arcsin 2x$ következik, ahogy állítottuk.



Ezután rátérünk a feladat megoldására. Legyenek az oldalak rendre $2a$, $2b$ és $2c$, és tegyük fel, hogy a berajzolt körívek hossza rendre 2α, 2β és 2γ, azaz az oldalak a körívek középpontjaiból rendre 2α, 2β és 2γ szög alatt látszanak (ha a középpont illeszkedik valamely oldalra, akkor a megfelelő látószög π). Ekkor

$$\sin\alpha = a; \quad \sin\beta = b; \quad \sin\gamma = c.$$

Így a bizonyítandó $2\alpha + 2\beta > 4\gamma/3$ állítás az

$$\arcsin a + \arcsin b > \frac{2}{3}\arcsin c$$

* https://hu.wikipedia.org/wiki/Szögfüggvények#Inverz_függvények

ekvivalens alakban írható. Felhasználva az $a+b>c$ háromszög-egyenlőtlenséget, valamint az arkuszszinusz függvény már említett szigorú monotonitását és konvexitását adódik, hogy

$$\arcsin a+\arcsin b\geqslant 2\arcsin\left(\frac{a+b}{2}\right)>2\arcsin\left(\frac{c}{2}\right)\geqslant\frac{2}{3}\arcsin c,$$

ahol az utolsó becslésnél a második előrebocsájtott észrevételünket használtuk (valamint a $0<c/2\leqslant 1/2$ nyilvánvalóan teljesülő összefüggést). Ezzel az állítást beláttuk.

29 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 17 versenyző: Bényei Borisz, Chrobák Gergő, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Farkas Izabella, Fazokán Marcell, Kalocsai Zoltán, Lovas Márton, Mohay Lili Veronika, Móricz Benjámin, Nagy Levente, Németh Márton, Szakács Ábel, Szanyi Attila, Tarján Bernát, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 4 pontos 1, 3 pontos 2, 2 pontos 3, 1 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 5244. *Határozzuk meg azokat az $n>4$ egész számokat, melyekre minden n-nél kisebb k összetett számra $(k,n)>1$.*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Ha egy ilyen n szám nagyobb p^2-nél, ahol p egy pozitív prímszám, akkor oszthatónak kell lennie p-vel, különben $(p^2;n)=1$ lenne. Mivel $n>4$, ezért biztosan páros, különben a 4-gyel relatív prím lenne.

Ha 3-mal nem osztható a keresett szám, akkor $3^2=9$-nél kisebbnek kell lennie, valamint 4-nél nagyobb és páros, ezért ez csak a 8 lehet.

Ha 3-mal is osztható a szám, de 5-tel nem, akkor $5^2=25$-nél kell kisebbnek lennie, vagyis, mivel $2\cdot 3=6$-tal osztható, ez a szám a $6;12;18$ és a 24 is lehet.

Ha a szám 5-tel is osztható, de 7-tel nem, akkor $7^2=49$-nél kisebb és $2\cdot 3\cdot 5=$ $=30$-cal osztható, vagyis csak a 30 lehet.

Ha 7-tel is osztható, de 11-gyel nem, akkor $30\cdot 7=210$-zel osztható, ugyanakkor $11^2=121$-nél kisebb, így nem kapunk megoldást, mivel ilyen pozitív szám nem létezik.

Továbbmenve sem találunk megfelelő számokat, mivel azt a számot, amellyel n-nek oszthatónak kell lennie, mindig egyre többszörösére, most például 11-szeresére növelnénk, míg a következő prímszám négyzete legfeljebb négyszerese az előzőének. Ennek belátásához felhasználjuk Csebisev tételét, miszerint egy egész szám és kétszerese között mindig van prím, vagyis a következő prím az előzőnek legfeljebb kétszerese, így a négyzete legfeljebb négyszerese az előző prímszám négyzetének, ezért nincs több megoldás. Megmutattuk, hogy csak a $6;8;12;18;24;30$ számok felelnek meg a feladat feltételeinek.

Szakács Ábel (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 8. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 59 dolgozat érkezett. 5 pontos 42, 4 pontos 5, 3 pontos 5, 2 pontos 4 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 1 versenyző kapott. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.