Most már minden adott, hogy minden $n > 4$-re konstrukciót adjunk. Ezt az n-nek a 3-as maradéka szerinti esetvizsgálattal tesszük meg.

A $3 \mid n$ esetet a $C1$ és $C2$ elemek felváltva egymás alá helyezésével érjük el.

Az $n \equiv 2 \mod 3$ esetben legfelülre rakunk egy $A1$-es elemet, alá egy $C1$-est utána felváltva $C2$-eseket és $C1$-eseket.

Az $n \equiv 1 \mod 3$ esetet hasonlóan érjük el, mint az $n \equiv 2 \mod 3$-at, csak az utolsó $3 \times n$-es helyett az oda passzoló $2 \times n$-eset rakjuk le (van ilyen, mert $C1$ alá $A1'$-t, $C2$ alá $A2'$-t be tudjuk rakni).

Ezzel minden $n > 4$-re adtunk konstrukciót.

Végül mutatunk konstrukciót $n = 2, 3, 4$-re ($n = 1$ esetén egyféle kitöltés van, ami jó):

$n = 2$: 

$n = 3$: 

$n = 4$: 

Négyszín-sejtés III: A színezési polinom, avagy miért olyan nehéz a négyszín-tétel*

Az előző részekben megismerkedtünk a négyszín-sejtéssel, mely szerint bármely térképet ki lehet színezni 4 színnel úgy, hogy az egymással határos régiók különböző színt kapjanak. Majd ezt a kérdést átfogalmaztuk a síkgráfok nyelvére, ahol a sejtés azt mondta, hogy egy síkbarajzolt gráf pontjai kiszínezhetők 4 színnel úgy, hogy éllel összekötött pontok ne kapjanak azonos színt. (Az ilyen színezéseket neveztük jó színezéseknek.) az előző részben láttuk azt is, hogy a 6 színnel való jó színezhetőség bizonyítása egészen egyszerű volt, és az 5 színnel való színezhetőséget is viszonylag könnyen be lehetett bizonyítani. Mindezek ellenére a 4 színnel való jó színezhetőség bizonyítására 120 évre volt szükség, és még ekkor is csak egy olyan bizonyítást tudtak adni, amihez komoly számítógépes számításokra volt szükség. Vajon miért nehezedik meg ez a kérdés ennyire, ha 5 színről 4-re térünk át?

Ebben a részben bemutatjuk a színezési polinomot. Ezt a polinomot *George David Birkhoff* amerikai matematikus kezdte vizsgálni az 1910-es években, abban a reményben, hogy a segítségével beláthatja a négyszín-sejtést. Bár a négyszín-

* Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

sejtést végül más gondolatmenet segítségével látták be, a színezési polinom nagyon érdekes objektumnak bizonyult, és valamennyire azt is meg fogja nekünk mutatni, hogy miért is olyan nehéz a négyszín-sejtés.

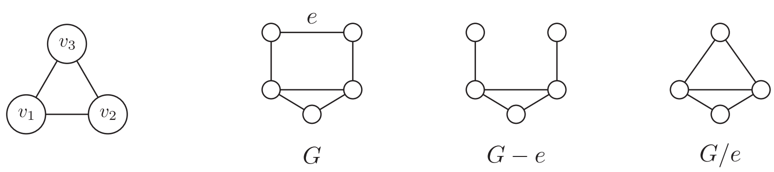
Térjünk tehát vissza a négyszín-sejtéshez. Azt szeretnénk belátni, hogy ha G egy hurokélmentes síkgráf, akkor G-nek létezik 4 színnel való jó színezése. Van a matematikában egy furcsa jelenség: ha elakadunk egy kérdéssel, paradox módon néha érdemes egy „nehezebb” kérdéssel próbálkozni. Mégpedig egy olyan nehezítéssel, amiben több a struktúra. Ez az extra struktúra néha segít abban, hogy jobban megértsük a dolgokat.

Legyünk tehát ambiciózusak, és kérdezzünk egy nehezebb kérdést. Hányféleképpen lehet a G gráfot 4 színnel jól színezni? Sőt, kérdezzük meg tetszőleges pozitív egész k-ra, hogy hány jó színezése van G-nek k színnel. Ha ezt meg tudnánk válaszolni, akkor persze azt is meg tudnánk mondani, hogy van-e 4 színnel való jó színezés, tehát ez egy nehezebb kérdés. De most már van lehetőségünk szabályosságokat keresni a jó színezések számában.

Legyen k egy pozitív egész, és jelöljük $p_G(k)$-val, hogy a G gráfnak hány jó színezése van k színnel. Lássunk egy konkrét példát, ahol ezt ki is tudjuk számolni. Vegyük *6. ábra* bal oldalán látható háromszöggráfot. A v_1 csúcsot színezhetjük bármelyik színnel, ez k lehetőség. Ha a v_1-et kiszíneztük valamelyik színnel, akkor a v_2-re az egyetlen megkötés, hogy nem lehet ugyanilyen színű. Tehát v_1 tetszőleges színe esetén $k-1$ lehetőség van v_2 színére. Ez idáig $k\cdot(k-1)$ lehetőség. Végül bárhogy is színeztük ki v_1-et és v_2-t, v_3 színére az az egyetlen megkötés, hogy ettől a két színtől különböző legyen. Tehát a háromszöggráfnak

$$p_\Delta(k) = k\cdot(k-1)\cdot(k-2) = k^3 - 3k^2 + 2k$$

jó színezése van k színnel.



6. ábra. Bal oldalon: a háromszöggráf. Jobb oldalon: Példa a 3. tétel bizonyításában szereplő $G-e$ és G/e gráfokra

Észrevehetjük, hogy a háromszög esetén $p_\Delta(k)$ a k változóra nézve egy polinom. Vajon igaz-e ez általában? Megmutatjuk, hogy igen.

3. tétel. *$p_G(k)$ tetszőleges G gráf esetén k-ban polinom.*

Bizonyítás. Ezt a gráf élszámára vonatkozó indukcióval fogjuk belátni. Ha a gráfnak nincsen éle, és n csúcsa van, akkor bármelyik csúcsot bármilyen színűre színezhetjük, tehát k^n jó színezés van. Ez k-ban egy polinom, tehát az alapeset készen van.

Most tegyük fel, hogy már tudjuk, hogy $p_G(k)$ egy polinom, ha G-nek legfeljebb t éle van (és akármennyi csúcsa). Legyen G egy gráf $t+1$ éllel, és legyen e

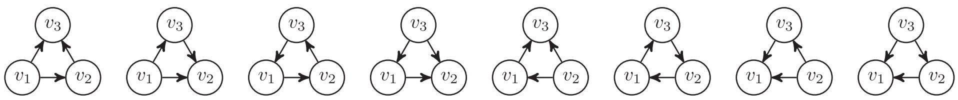
a gráf egyik éle, melynek végpontjai u és v. A $p_G(k)$ kifejezésről szeretnénk megmutatni, hogy k-ban egy polinom. Vegyük a $G-e$ gráfot, azaz azt a gráfot, ahol az e élet kitöröljük (lásd a 6. ábrát). Ez egy t élű gráf, tehát róla már tudjuk, hogy $p_{G-e}(k)$ egy polinom. Hasonlítsuk össze G és $G-e$ jó színezéseinek számát. A G gráf tetszőleges k színnel való jó színezése jó színezése $G-e$-nek is, hiszen $G-e$ jó színezéseire kevesebb a megkötés. Viszont $(G-e)$-nek lehet néhány olyan jó színezése, amely G-nek nem jó színezése: ahol az u és v pont azonos színt kap. Vegyük most azt a gráfot, ahol az u és v pontot összeragasztjuk egy ponttá, az e élt pedig elhagyjuk. Nevezzük ezt a gráfot (G/e)-nek (lásd a 6. ábrát). G/e tetszőleges k színű jó színezése ad egy olyan k színű jó színezést $(G-e)$-re, ahol az e él két végpontja azonos színű. Tehát $p_G(k)=p_{G-e}(k)-p_{G/e}(k)$ teljesül minden pozitív egész k-ra. Vegyük észre, hogy (G/e)-nek is t éle van, tehát $p_{G/e}(k)$-ról is tudjuk, hogy polinom. Két polinom különbsége szintén polinom, tehát $p_G(k)$-ról is beláttuk, hogy polinom. □

Ezzel beláttuk, hogy $p_G(k)$ valóban egy polinom. Ezt a polinomot nevezzük a G színezési polinomjának. Miért hasznos ez nekünk? Eddig a $p_G(k)$-t csak pozitív egész számokra definiáltuk. Most viszont, hogy tudjuk, hogy $p_G(k)$ egy polinom (pl $p_\Delta(k)=k^3-3k^2+2k$), ezt értelmezhetjük tetszőleges valós számokra is. Mondhatjuk pl, hogy a háromszöggráfnak $p_\Delta(3{,}5)=3{,}5^3-3\cdot 3{,}5^2+2\cdot 3{,}5=13{,}125$ jó színezése van 3,5 színnel. Mit jelent ez? Valójában nem világos. Az sem világos, hogy mit jelentene egy 3,5 színnel való jó színezés. Viszont olyan szempontból mégis hasznos ez a kiterjesztés, hogy most már használhatjuk azokat az eszközöket, amelyeket analízisből tanultunk a függvények elemzésére. *William Tutte* angol matematikusnak például sikerült bebizonyítania, hogy egy G síkgráfra $p_G\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)>0$ mindig teljesül (bármennyire nem is világos, hogy mit is jelent pontosan ez a szám). Mivel $\frac{5+\sqrt5}{2}\approx 3{,}618$, lehetett abban bízni, hogy talán be lehet látni, hogy a $p_G(x)$ érték az $\frac{5+\sqrt5}{2}$ után nem csökken túl gyorsan, és akkor következne, hogy még $p_G(4)$ is pozitív. Sajnos az derült ki, hogy ez a módszer nem működhet. Gordon Royle ugyanis megmutatta, hogy akármilyen pici $\varepsilon>0$ számra van olyan G síkgráf és $4-\varepsilon<x<4$, hogy $p_G(x)=0$. Azaz az $\frac{5+\sqrt5}{2}$ és a 4 között a színezési polinom értéke még le tud menni 0-ra, sőt, ez a nullhely a 4-hez akármilyen közel tud lenni. (Kicsit pongyolán fogalmazva, van olyan síkgráf, amelynek 3,99 színnel már nincs jó színezése, bármit is jelentsen ez.) Ez azt is mutatja, hogy a négyszín-sejtés bizonyos értelemben éppenhogy teljesül. Ez az „éppenhogy teljesülés” már sejteti, hogy nem fogunk tudni olyan nagyvonalú bizonyítást találni a négyszín-sejtésre, mint amilyet a hatszín-sejtésre lehetett adni.

Ha a négyszín-sejtésre nem is adott nekünk bizonyítást a színezési polinom, azért mégiscsak álljunk meg, és nézegessük meg egy kicsit jobban.

Láttuk, hogy bár nem értjük, hogy mit jelent a $p_G\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)$, azért be lehetett látni róla, hogy egy síkgráfra mindig pozitív. Most nézzünk meg egy másik meglepő állítást. Ehhez először tisztázzunk néhány fogalmat.

Egy G gráf irányításának nevezzük azt, ha minden élének adunk valamilyen irányítást. Például *7. ábra* mutatja a háromszöggráf irányításait. Egy élt kétféleképpen lehet irányítani, tehát egy m élű gráfnak 2^m különböző irányítása van. Egy irányítást körmentesnek nevezünk, ha nincs olyan csúcs, ahonnan elindulva vissza tudunk jutni ugyanoda úgy, hogy mindig irányhelyesen megyünk át az éleken.



7. ábra. A háromszöggráf 8 különböző irányítása. Ezek közül a harmadik és a hatodik nem körmentes, a többi 6 irányítás körmentes

A következő meglepő állítást *Richard Stanley* amerikai matematikus fedezte fel.

2. állítás. *Tetszőleges G gráfra*

$$p_G(-1) = (-1)^n \cdot (G \text{ körmentes irányításainak száma}),$$

ahol n a G gráf csúcsainak száma.

1. példa. A háromszöggráf esetén

$$p_\Delta(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1 - 3 - 2 = -6,$$

ami valóban $(-1)^3 \cdot 6$.

Itt az a meglepő dolog történt, hogy $p_G(-1)$-et úgy definiáltuk, hogy a színezési polinomba behelyettesítettünk (-1)-et. Pozitív egész k esetén tudjuk, hogy a színezési polinom a k színnel való jó színezéseket számolja meg. Viszont negatív számokra ugyanúgy nem világos, hogy a $p_G(x)$ jelent-e valamit, ahogy törtekre sem az. Az állítás viszont azt mutatja, hogy varázsütésre a $p_G(-1)$ mégis valami értelmes dolgot számol meg. Lássuk is be ezt az állítást.

Bizonyítás. Élszámra vonatkozó indukciót fogunk használni. Ha a gráfnak 0 éle van, akkor $p_G(k) = k^n$, tehát $p_G(-1) = (-1)^n$.

Másrészt ilyenkor azt mondjuk, hogy $2^0 = 1$ irányítás van (az üres irányítás), és ez persze körmentes. Tehát valóban $p_G(-1) = (-1)^n \cdot$ (körmentes irányítások száma).

Ha valakit ez esetleg nem győzött meg, nézzük meg az 1 élű esetet is. Ilyenkor $p_G(k) = k^{n-1}(k-1)$, hiszen az él másodjára megszínezett csúcsát nem színezhetjük ugyanolyan színre, mint az elsőt, a többi csúcs színére viszont nincs megkötés. Azaz $p_G(-1) = (-1)^{n-1} \cdot (-2) = (-1)^n \cdot 2$. Másrészt ilyenkor nyilván 2 irányítás van, és mindkettő körmentes. Azaz valóban teljesül a tétel állítása 1 élű gráfokra is.

Tegyük fel most, hogy teljesül az állítás tetszőleges n csúcsszám esetén, ha az élszám kisebb, mint t, és vegyünk egy t élű G gráfot. Már korábban láttuk, hogy tetszőleges e élre $p_G(k) = p_{G-e}(k) - p_{G/e}(k)$ teljesül minden pozitív egész k-ra. Lássuk be, hogy ez minden valós x-re is igaz. A bal oldalon és a jobb oldalon is egy polinom van. Tehát a két oldal különbsége, $p_G(x) - p_{G-e}(x) + p_{G/e}(x)$ egy polinom, amely minden $x = k$ pozitív egész számra 0. Tudjuk, hogy egy nemnulla polinomnak legfeljebb annyi nullhelye van, mint a fokszáma. Tehát $p_G(x) - p_{G-e}(x) + p_{G/e}(x)$ az azonosan 0 polinom. Azaz most már azt is tudjuk, hogy

$$p_G(x) = p_{G-e}(x) - p_{G/e}(x)$$

minden valós számra, speciálisan $x = -1$-re is.

$(G-e)$-nek és (G/e)-nek is kevesebb, mint t éle van, tehát az indukciós feltevés miatt tudjuk, hogy $p_{G-e}(-1) = (-1)^n \cdot (G-e$ körmentes irányításainak száma) és $p_{G/e}(-1) = (-1)^{n-1} \cdot (G/e$ körmentes irányításainak száma). Itt használtuk, hogy $G-e$ csúcsszáma n, G/e csúcsszáma pedig $n-1$. Azaz $p_G(-1) = (-1)^n \cdot (G-e$ körmentes irányításainak száma) $+ (-1)^n \cdot (G/e$ körmentes irányításainak száma).

Most már elég megmutatni, hogy G körmentes irányításainak száma $= G-e$ körmentes irányításainak száma $+ G/e$ körmentes irányításainak száma.

Nézzük meg először, hogy hogyan viszonyulnak $G-e$ körmentes irányításai a G körmentes irányításaihoz. Vegyük $G-e$ egy körmentes irányítását. Az biztos, hogy nem lehet u-ból v-be és v-ből u-ba is irányított úton eljutni, hiszen akkor u-ból u-ba vissza lehetne jutni irányhelyesen mozogva, ilyet pedig egy körmentes irányításban nem lehet. Tehát 3 eset lehet: Vagy csak u-ból v-be lehet irányított úton eljutni (és v-ből u-ba nem), vagy csak v-ből u-ba lehet irányított úton eljutni (és u-ból v-be nem), vagy pedig sem u-ból v-be, sem pedig v-ből u-ba nem lehet irányított úton eljutni.

Most rajzoljuk vissza az e élet. Ha a $G-e$ körmentes irányításából meg szeretnénk kapni G egy körmentes irányítását, akkor az első esetben csak u-ból v-be irányíthatjuk az e élet, a második esetben csak v-ből u-ba, a harmadik esetben viszont akármelyik irányban megirányíthatjuk, mindkét esetben körmentes marad az irányítás.

Viszont vegyük észre, hogy ha $(G-e)$-ben összeragasztjuk az u és a v csúcsokat, akkor a $G-e$ egy körmentes irányítása pontosan akkor marad körmentes, ha sem u-ból v-be, sem v-ből u-ba nem volt a $G-e$-ben irányított út. Tehát G körmentes irányításainak száma $= G-e$ körmentes irányításainak száma $+ G/e$ körmentes irányításainak száma. Ezzel az indukciós lépést befejeztük. □

Hivatkozások

[1] Hubai Tamás, *The chromatic polynomial,* Diplomamunka, https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2009/hubai_tamas.pdf

[2] Stanley, R. P., *Acyclic orientations of graphs,* Discrete Math. **5(2)**: 171–178, (1973), doi:10.1016/0012-365X(73)90108-8.

[3] Gordon Royle, *Planar triangulations with real chromatic roots arbitrarily close to 4,* Annals of Combinatorics, **12(2)**: 195–210, July 2008, arXiv:math/0511304.

Tóthmérész Lilla
ELTE