A 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Második nap*

4. *Legyen $ABCDE$ olyan konvex ötszög, hogy $BC=DE$. Tegyük fel, hogy az $ABCDE$ ötszög belsejében lévő T pontra $TB=TD$, $TC=TE$ és $ABT\sphericalangle = TEA\sphericalangle$. Messe az AB egyenes a CD és CT egyeneseket a P, illetve Q pontban. Tegyük fel, hogy a P, B, A, Q pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Messe az AE egyenes a CD és DT egyeneseket az R, illetve S pontban. Tegyük fel, hogy az R, E, A, S pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Bizonyítandó, hogy a P, S, Q, R pontok egy körön vannak.*

Molnár-Szabó Vilmos megoldása. A szakaszhosszok egyenlőségeiből következik, hogy $TBC\triangle \cong TDE\triangle$.

Legyen az AE és TQ egyenesek metszéspontja X, az AB és DT egyeneseké pedig Y. Egy kis szögszámolással megmutatjuk, hogy $EXT\triangle \sim BYT\triangle$.

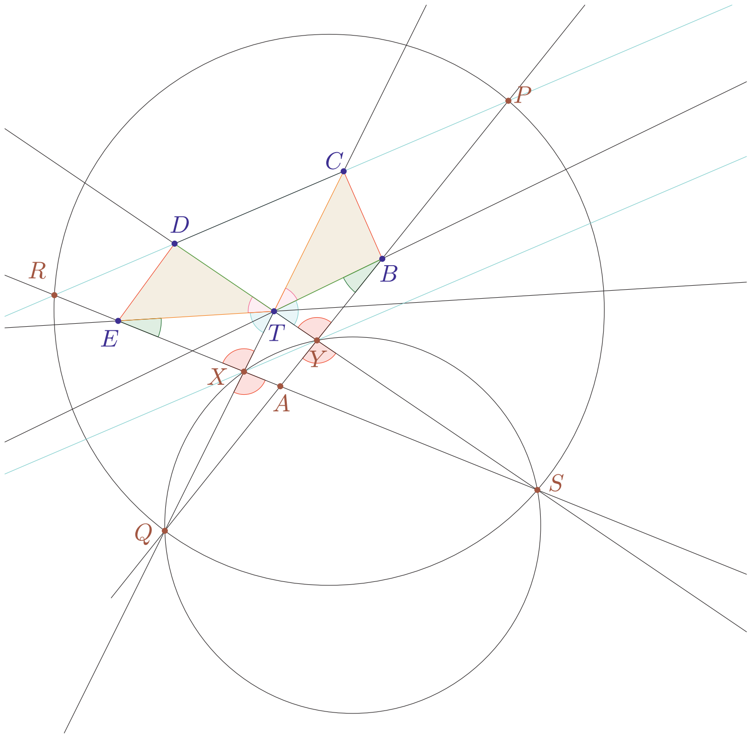
Az egybevágó háromszögekből $ETD\sphericalangle = CTB\sphericalangle$, továbbá $DTX\sphericalangle = CTY\sphericalangle$ (csúcsszögek), tehát $ETX\sphericalangle = DTX\sphericalangle - ETD\sphericalangle = CTY\sphericalangle - CTB\sphericalangle = BTY\sphericalangle$. Tudjuk még, hogy $ABT\sphericalangle = TEA\sphericalangle$, tehát valóban egymáshoz hasonlóak az EXT és BYT háromszögek.

Emiatt az is igaz, hogy $EXT\sphericalangle = BYT\sphericalangle$, amiből pedig következik, hogy $QXS\sphericalangle = EXT\sphericalangle = BYT\sphericalangle = QYS\sphericalangle$. Mivel $QAX\sphericalangle = SAY\sphericalangle$ is teljesül, így az XQA és YSA háromszögek hasonlóak, és ezért $CQP\sphericalangle = XQY\sphericalangle = XSY\sphericalangle = RSD\sphericalangle$.

Az EXT és BYT háromszögek hasonlóságából következik továbbá, hogy $\frac{TX}{TE} = \frac{TY}{TB}$. Mivel $TE=TC$ és $TB=TD$, ebből $\frac{TX}{TC} = \frac{TY}{TD}$, ami azt jelenti, hogy $XYCD$ trapéz. A hasonló háromszögek egymásnak megfelelő $XTE\sphericalangle$ és $BTY\sphericalangle$ szögeinek egyenlőségéből $BTQ\sphericalangle = STE\sphericalangle$. Mivel a feltétel szerint $ABT\sphericalangle = AET\sphericalangle$, a TQB és TSE háromszögek is hasonlóak, hiszen megfelelő szögeik egyenlőek. A hasonlóság miatt

$$QT : ST = TB : TE, \quad \text{így} \quad QT \cdot TC = QT \cdot TE = ST \cdot TB = ST \cdot TD,$$

* Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.



azaz a Q, S, C, D pontok egy körön vannak. Emiatt a QCP háromszög külső szögeként $QCR\sphericalangle = QPR\sphericalangle + CQP\sphericalangle$, azaz $QPR\sphericalangle = QCR\sphericalangle - CQP\sphericalangle$. Mivel $QSCD$ húrnégyszög, $QSD\sphericalangle = QCD\sphericalangle$. Végül

$$QPR\sphericalangle = QCR\sphericalangle - CQP\sphericalangle = QSD\sphericalangle - RSD\sphericalangle = QSR\sphericalangle,$$

tehát $SQPR$ húrnégyszög.

5. *Határozzuk meg mindazon, pozitív egészekből álló (a, b, p) számhármasokat, amelyekre p prím és*

$$a^p = b! + p.$$

Seres-Szabó Márton megoldása. Ha $p = 2$, akkor a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti: $a^2 = b! + 2$. Itt most ha $b \geqslant 4$, akkor $4 \mid b!$, így $b! + 2 \equiv 2 \pmod 4$. Viszont 2 soha nem lehet egy négyzetszám 4-es maradéka, vagyis ekkor nincs megoldás.

Ha $b \leqslant 3$, akkor:
$b = 1$ esetén $1! + 2 = 3$, ahol a 3 nem négyzetszám.
$b = 2$ esetén $2! + 2 = 4 = 2^2$, vagyis a $(2, 2, 2)$ megoldás.
$b = 3$ esetén pedig $3! + 2 = 8$, ami szintén nem négyzetszám.

Ezzel a $p = 2$ esetet végignéztük, a továbbiakban feltehetjük, hogy $p > 2$ páratlan prím.

Vizsgáljuk általában a $b<4$ eseteket.

Ha $b=1$, akkor $a^p=1+p$. Az $a=1$ eset nem ad megoldást, és a továbbiakban $a^p\geqslant 2^p>1+p$.

Ha $b=2$, akkor $a^p=2+p$. Az $a=1$ eset nem ad megoldást, és a továbbiakban $a^p\geqslant 2^p>2+p$ $(p>2)$.

Ha $b=3$, akkor $a^p=6+p$. Az $a=1$ eset nem ad megoldást, és a továbbiakban $a^p\geqslant 2^p>6+p$ minden $p>3$ esetén, míg a $p=3$, $b=3$ megint nem ad megoldást: $a^3=3!+3=9$ nem köbszám.

Tehát a továbbiakban azt is feltehetjük, hogy $b\geqslant 4$.

A maradék eseteket két részben vizsgáljuk: $b<p$ vagy $b\geqslant p$.

Ha $b<p$, akkor $b!$-t osztja minden b-nél nem nagyobb prím, vagyis a $(b!+p)$ kifejezést egyik sem oszthatja, azaz $b!+p=a^p$ minden prímosztója nagyobb, mint b. Tehát $a>b$. Ekkor viszont $a^p>b^p$. Megmutatjuk, hogy ezen kívül $b^p>b!+p$, és innen következik, hogy nem lehet megoldása az egyenletnek, ha $b<p$.

Mivel $b<p$, ezért bevezethetjük a $c\geqslant 1$ és $p=b+c$ jelölést. Ennek alapján azt kéne bebizonyítanunk, hogy $b^{b+c}>b!+b+c$. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva (egyenlőség nem áll fönn, hiszen $b\geqslant 4$):

$$b!=b\cdot(b-1)!=b\prod_{i=1}^{b-1} i<b\cdot\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{b-1} i}{b-1}\right)^{b-1}=b\cdot\left(\frac{b(b-1)}{2(b-1)}\right)^{b-1}=\frac{1}{2^{b-1}}\cdot b^b.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$b!+b+c<\frac{1}{2^{b-1}}\cdot b^b+b+c=\left(\frac{1}{2^{b-1}}+\frac{1}{b^{b-1}}\right)\cdot b^b+c.$$

Mivel $b\geqslant 4$, ezért ez tovább becsülhető:

$$b!+b+c<\left(\frac{1}{2^{b-1}}+\frac{1}{b^{b-1}}\right)\cdot b^b+c<b^b+c.$$

Tehát már csak azt kellene belátnunk, hogy $b^b+c<b^{b+c}$, vagyis

$$c<b^b\cdot(b^c-1),$$

ami pedig teljesül, ha $b\geqslant 4$.

Ha $b\geqslant p$, akkor $p\mid b!$, így $p\mid b!+p$, de $p^2\nmid b!+p$, vagyis $b\leqslant 2b-1$. Továbbá, mivel $b\geqslant p$, ezért minden p-nél kisebb prím osztja a $b!$ kifejezést. És ezért a $b!+p$ kifejezést egyik p-nél kisebb prím sem oszthatja, tehát minden prímosztója legalább p.

Tudjuk, hogy $p\mid b!+p$. Ha létezik ezen kívül még olyan $q>p$ prím, hogy $q\mid b!+p$, akkor $pq\mid b!+p=a^p$, vagyis $(pq)^p\mid a^p=b!+p$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$p^{2p}\leqslant(pq)^p\leqslant b!+p\leqslant(2p-1)!+p=p+\prod_{i=1}^{2p-1} i,$$

ami a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt felülről tovább becsülhető ($p>2$, nem áll fönn egyenlőség a számtani-mértani becslésben):

$$p+\prod_{i=1}^{2p-1} i < p+\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{2p-1} i}{2p-1}\right)^{2p-1} = p+\left(\frac{2p(2p-1)}{2(2p-1)}\right)^{2p-1} = p+p^{2p-1}.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy $p^{2p}<p+p^{2p-1}$, vagyis mivel $p>2$, ezért $p<\frac{1}{p^{2p-2}}+1<2$, ami ellentmondás. Tehát nem lehet a $b!+p$ kifejezésnek p-nél sem nagyobb, sem kisebb prímosztója. Vagyis a nem más mint p-nek egy pozitív kitevős hatványa. Az imént láttuk, hogy $a=p^2$ már túl nagy, vagyis az egyetlen lehetőség az $a=p$ maradt.

Ekkor az egyenlet a következő alakot ölti: $p^p=b!+p$, azaz

$$b!=p^p-p=p\big(p^{p-1}-1\big).$$

Nézzük meg, hogy a két oldal 2-nek mekkora hatványával osztható; egyrészt $b>p$ miatt

$$\nu_2(b!)>\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor,$$

másrészt az LTE-lemmát használva:

$$\nu_2(p^p-p)=\nu_2\big(p^{p-1}-1^{p-1}\big)=\nu_2(p-1)+\nu_2(p+1)+\nu_2(p-1)-1.$$

Ha $4\mid p-1$, akkor $\nu_2(p+1)=1$, így $\nu_2(p^p-p)=2\nu_2(p-1)\leqslant 2\log_2 p$.

Ha $4\mid p+1$, akkor $\nu_2(p-1)=1$, így $\nu_2(p^p-p)=\nu_2(p+1)+1\leqslant 2\log_2 p$, ha $p\geqslant 5$.

Viszont, ha $p\geqslant 19$, akkor

$$\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor=\frac{p-1}{2}>2\log_2 p,$$

$$2\log_2 19=2\log_2\left(16\cdot\frac{19}{16}\right)=8+2\log_2\frac{19}{16}<8+2\log_2\sqrt{2}=9=\frac{19-1}{2}.$$

Maradt azoknak az eseteknek a vizsgálata, amikor $p<19$:

$p=3$: $3^3-3=4!$ megoldás.

$p=5$: $5^5-5=3120$ nem megoldás.

$p=7$:

$$7^7-7=7\cdot(7^6-1)=7\cdot(7^3-1)\cdot(7^3+1)=7\cdot 342\cdot 344=7\cdot 342\cdot 8\cdot 43,$$

ami nem lehet megoldás, hiszen $b<14$, így $43\nmid b!$.

$p=11$:

$$\nu_2\big(11^{11}-11\big)=\nu_2(11+1)+1=3<\frac{11-1}{2},$$

vagyis ez sem megoldás.

$p=13$:

$$\nu_2\big(13^{13}-13\big)=2\nu_2(13-1)=4<\frac{13-1}{2},$$

vagyis ez sem megoldás.

$p=17$:

$$\nu_2\big(17^{17}-17\big)=2\nu_2(17-1)=8<\left\lfloor\frac{17}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{17}{4}\right\rfloor<\nu_2(17!),$$

vagyis ez sem megoldás.

Tehát két lehetséges megoldás van:

$$(a,b,p)=(2,2,2)\text{ vagy }(3,4,3).$$

6. *Legyen n pozitív egész.* Skandináv négyzet *egy $n\times n$ méretű tábla, amely 1-től n^2-ig az összes egész számot tartalmazza úgy, hogy minden mezőben pontosan egy szám áll. Két különböző mezőt szomszédosnak tekintünk, ha van közös oldaluk. Ha egy mezőnek minden szomszédjában nagyobb szám áll, mint őbenne, akkor* völgynek *nevezzük.* Kaptató *egy sorozat, amely egy vagy több mezőből áll úgy, hogy*

(*i*) *a sorozat első mezője egy völgy,*

(*ii*) *a sorozat minden további mezője szomszédos az őt közvetlenül megelőző mezővel, és*

(*iii*) *a sorozat mezőiben álló számok növekvő sorrendben vannak.*

Adott n esetén határozzuk meg egy skandináv négyzetben lévő kaptatók számának legkisebb lehetséges értékét.

Nádor Benedek megoldása. Válasz: Legalább $2n(n-1)+1$ kaptató van.

Bizonyítás: Az a mező, ami az 1-est tartalmazza mindig völgy, így legalább egy völgy van. A mezőkbe írt számok szerinti indukcióval adódik, hogy minden mező vagy völgy, vagy létezik olyan – legalább két mezőből álló – kaptató, amelynek ő az utolsó eleme. Nevezzük *mezőhatár*nak két szomszédos mező közös határát.

Minden mezőhatárra igaz, hogy van legalább egy olyan kaptató, amiben ő az utolsó mezőhatár: az általa határolt két mező közül a kisebb számot tartalmazó szomszédja egy kaptató utolsó mezeje, ezt a kaptatót pedig kiegészíthetjük a nagyobbik számot tartalmazó mezővel; ebben a kaptatóban az utolsó mezőhatár éppen az általunk választott. Ebből következik, hogy a legalább két mezőből álló kaptatók száma legalább annyi, mint a mezőhatárok száma. Mivel $2n$ sorban soronként $n-1$ mezőhatár van és az 1 völgy, így a kaptatók számának minimuma legalább $2n(n-1)+1$.

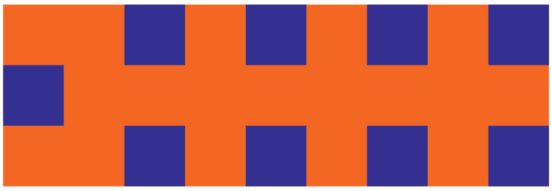
Mutatunk egy konstrukciót olyan *Skandináv négyzetre,* amiben pontosan $2n(n-1)+1$ kaptató van. Nevezzük *hegytetőnek* azokat a mezőket, amelyekben nagyobb szám áll, mint a szomszédaikban. Ha teljesül, hogy pontosan egy völgy van, és a hegytetők kivételével minden mező csak egy kaptatónak a vége, akkor pontosan $2n(n-1)+1$ kaptató lesz, mivel az utolsó mezőhatár, amin a kaptató átmegy meghatározza a kaptatót (a kaptató korábbi mezői egyértelműek), az 1-es mezőn végződő völgynek pedig nincs mezőhatára. Nevezzük ezt a tulajdonságot minimum feltételnek. A minimum feltétel teljesülését úgy érjük el, hogy a skandináv négyzetből készítünk egy fa gráfot, amelynek csúcsai a mezők közül kerülnek ki, az élek pedig a köztük lévő mezőhatárok. A fát úgy helyezzük el, hogy minden olyan mezővel legyen szomszédos csúcsa, ami nem csúcsa a gráfnak; ezen kívül a kimaradó mezők között ne legyenek olyanok, amik egymással szomszédosak. Legyen a fa csúcsainak száma k. Ekkor a fa mezőibe az $1,\ldots,k$ számokat írjuk be úgy, hogy az 1-esből indulva a faéleken keresztül minden facsúcsba eljuthassunk faéleken (vagyis az 1-esből kiindulva növekednek a fa mezőinek az értékei). Ezt egy, a fa 1-es csúcsából indított szélességi bejárással érhetjük el. Meggondolható, hogy a fás elrendezésre teljesül a minimum feltétel, mert csak az 1 a völgy és két fán kívüli mező nem lehet szomszédos.

A fa létezését $n>4$-re konstruktívan bizonyítjuk az n-nek a 3-as maradéka szerint. Tekintsük az alábbi $2\times n$-es és $3\times n$-es elemeket:

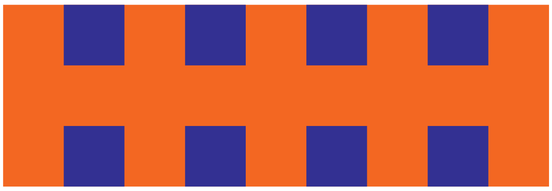
$A1$:

$A2$:

$C1$:



$C2$:



Nevezzük el az elemeket az *ábra* szerint $A1$, $A2$, $C1$, $C2$-nek. Legyen $A1'$ az $A1$ elem saját vízszintes tengelyére tükrözött képe, hasonlóan $A2'$ az $A2$-nek saját vízszintes tengelyére tükrözött képe. Ekkor könnyű meggondolni, hogy minden elemben a narancssárga rész fát alkot. Azt is meggondolhatjuk, hogy a $C1$ és $C2$ elemeket tetszőleges sorrendben egymás alá rakva a két elem által alkotott táblázatban is fát alkotnak a narancs színű mezők. Hasonlóan $A1$-et $C2$ fölé, $A1'$-t $C1$ alá helyezve az elemek által alkotott táblázatban a narancs mezők fát alkotnak. (Az elemeket úgy rakjuk egymás alá, hogy a bal szélük egy vonalban legyen.) Ugyanez elmondható $A2$, $A2'$ és $C2$-re is.

Most már minden adott, hogy minden $n > 4$-re konstrukciót adjunk. Ezt az n-nek a 3-as maradéka szerinti esetvizsgálattal tesszük meg.

A $3 \mid n$ esetet a $C1$ és $C2$ elemek felváltva egymás alá helyezésével érjük el.

Az $n \equiv 2 \mod 3$ esetben legfelülre rakunk egy $A1$-es elemet, alá egy $C1$-est utána felváltva $C2$-eseket és $C1$-eseket.

Az $n \equiv 1 \mod 3$ esetet hasonlóan érjük el, mint az $n \equiv 2 \mod 3$-at, csak az utolsó $3 \times n$-es helyett az oda passzoló $2 \times n$-eset rakjuk le (van ilyen, mert $C1$ alá $A1'$-t, $C2$ alá $A2'$-t be tudjuk rakni).

Ezzel minden $n > 4$-re adtunk konstrukciót.

Végül mutatunk konstrukciót $n = 2, 3, 4$-re ($n = 1$ esetén egyféle kitöltés van, ami jó):

$n = 2$:

$n = 3$:

$n = 4$:

Négyszín-sejtés III: A színezési polinom, avagy miért olyan nehéz a négyszín-tétel[*]

Az előző részekben megismerkedtünk a négyszín-sejtéssel, mely szerint bármely térképet ki lehet színezni 4 színnel úgy, hogy az egymással határos régiók különböző színt kapjanak. Majd ezt a kérdést átfogalmaztuk a síkgráfok nyelvére, ahol a sejtés azt mondta, hogy egy síkbarajzolt gráf pontjai kiszínezhetők 4 színnel úgy, hogy éllel összekötött pontok ne kapjanak azonos színt. (Az ilyen színezéseket neveztük jó színezéseknek.) az előző részben láttuk azt is, hogy a 6 színnel való jó színezhetőség bizonyítása egészen egyszerű volt, és az 5 színnel való színezhetőséget is viszonylag könnyen be lehetett bizonyítani. Mindezek ellenére a 4 színnel való jó színezhetőség bizonyítására 120 évre volt szükség, és még ekkor is csak egy olyan bizonyítást tudtak adni, amihez komoly számítógépes számításokra volt szükség. Vajon miért nehezedik meg ez a kérdés ennyire, ha 5 színről 4-re térünk át?

Ebben a részben bemutatjuk a színezési polinomot. Ezt a polinomot *George David Birkhoff* amerikai matematikus kezdte vizsgálni az 1910-es években, abban a reményben, hogy a segítségével beláthatja a négyszín-sejtést. Bár a négyszín-

[*] Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.