KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

72. évfolyam 8. szám Budapest, 2022. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1100 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 9200 Ft
Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. Minden jog a KöMaL tulajdonosaié.
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.
A Lapban megjelenő hirdetések tartalmáért felelősséget nem vállalunk.

A 63. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

Második nap*

4. *Legyen $ABCDE$ olyan konvex ötszög, hogy $BC=DE$. Tegyük fel, hogy az $ABCDE$ ötszög belsejében lévő T pontra $TB=TD$, $TC=TE$ és $ABT\sphericalangle = TEA\sphericalangle$. Messe az AB egyenes a CD és CT egyeneseket a P, illetve Q pontban. Tegyük fel, hogy a P, B, A, Q pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Messe az AE egyenes a CD és DT egyeneseket az R, illetve S pontban. Tegyük fel, hogy az R, E, A, S pontok az egyenesükön ebben a sorrendben helyezkednek el. Bizonyítandó, hogy a P, S, Q, R pontok egy körön vannak.*

Molnár-Szabó Vilmos megoldása. A szakaszhosszok egyenlőségeiből következik, hogy $TBC\triangle \cong TDE\triangle$.

Legyen az AE és TQ egyenesek metszéspontja X, az AB és DT egyeneseké pedig Y. Egy kis szögszámolással megmutatjuk, hogy $EXT\triangle \sim BYT\triangle$.

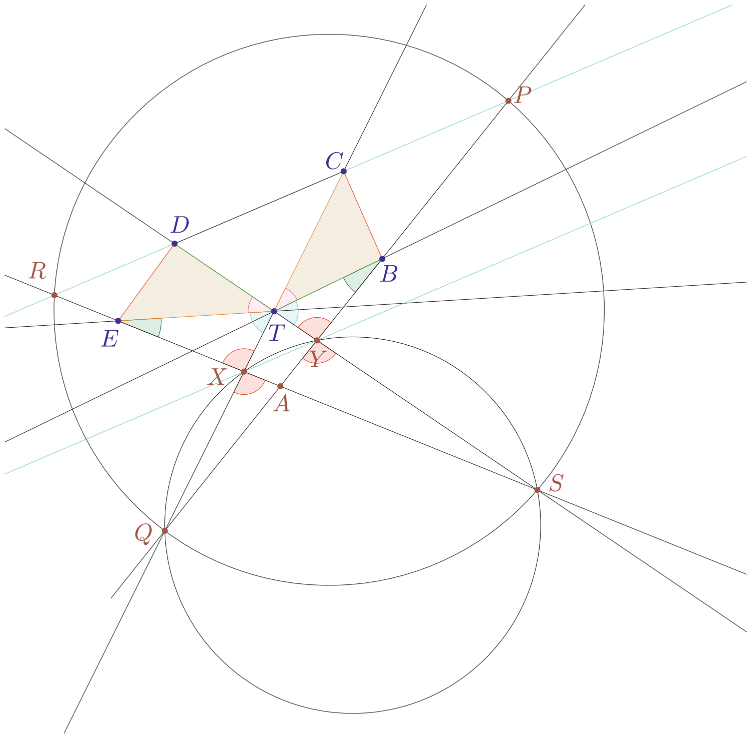
Az egybevágó háromszögekből $ETD\sphericalangle = CTB\sphericalangle$, továbbá $DTX\sphericalangle = CTY\sphericalangle$ (csúcsszögek), tehát $ETX\sphericalangle = DTX\sphericalangle - ETD\sphericalangle = CTY\sphericalangle - CTB\sphericalangle = BTY\sphericalangle$. Tudjuk még, hogy $ABT\sphericalangle = TEA\sphericalangle$, tehát valóban egymáshoz hasonlóak az EXT és BYT háromszögek.

Emiatt az is igaz, hogy $EXT\sphericalangle = BYT\sphericalangle$, amiből pedig következik, hogy $QXS\sphericalangle = EXT\sphericalangle = BYT\sphericalangle = QYS\sphericalangle$. Mivel $QAX\sphericalangle = SAY\sphericalangle$ is teljesül, így az XQA és YSA háromszögek hasonlóak, és ezért $CQP\sphericalangle = XQY\sphericalangle = XSY\sphericalangle = RSD\sphericalangle$.

Az EXT és BYT háromszögek hasonlóságából következik továbbá, hogy $\frac{TX}{TE} = \frac{TY}{TB}$. Mivel $TE=TC$ és $TB=TD$, ebből $\frac{TX}{TC} = \frac{TY}{TD}$, ami azt jelenti, hogy $XYCD$ trapéz. A hasonló háromszögek egymásnak megfelelő $XTE\sphericalangle$ és $BTY\sphericalangle$ szögeinek egyenlőségéből $BTQ\sphericalangle = STE\sphericalangle$. Mivel a feltétel szerint $ABT\sphericalangle = AET\sphericalangle$, a TQB és TSE háromszögek is hasonlóak, hiszen megfelelő szögeik egyenlőek. A hasonlóság miatt

$$QT : ST = TB : TE, \quad \text{így} \quad QT \cdot TC = QT \cdot TE = ST \cdot TB = ST \cdot TD,$$

* Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.



azaz a Q, S, C, D pontok egy körön vannak. Emiatt a QCP háromszög külső szögeként $QCR\sphericalangle = QPR\sphericalangle + CQP\sphericalangle$, azaz $QPR\sphericalangle = QCR\sphericalangle - CQP\sphericalangle$. Mivel $QSCD$ húrnégyszög, $QSD\sphericalangle = QCD\sphericalangle$. Végül

$$QPR\sphericalangle = QCR\sphericalangle - CQP\sphericalangle = QSD\sphericalangle - RSD\sphericalangle = QSR\sphericalangle,$$

tehát $SQPR$ húrnégyszög.

5. *Határozzuk meg mindazon, pozitív egészekből álló (a,b,p) számhármasokat, amelyekre p prím és*

$$a^p = b! + p.$$

Seres-Szabó Márton megoldása. Ha $p=2$, akkor a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti: $a^2 = b! + 2$. Itt most ha $b \geqslant 4$, akkor $4 \mid b!$, így $b! + 2 \equiv 2 \pmod 4$. Viszont 2 soha nem lehet egy négyzetszám 4-es maradéka, vagyis ekkor nincs megoldás.

Ha $b \leqslant 3$, akkor:
$b = 1$ esetén $1! + 2 = 3$, ahol a 3 nem négyzetszám.
$b = 2$ esetén $2! + 2 = 4 = 2^2$, vagyis a $(2,2,2)$ megoldás.
$b = 3$ esetén pedig $3! + 2 = 8$, ami szintén nem négyzetszám.

Ezzel a $p=2$ esetet végignéztük, a továbbiakban feltehetjük, hogy $p>2$ páratlan prím.

Vizsgáljuk általában a $b<4$ eseteket.

Ha $b=1$, akkor $a^p=1+p$. Az $a=1$ eset nem ad megoldást, és a továbbiakban $a^p\geqslant 2^p>1+p$.

Ha $b=2$, akkor $a^p=2+p$. Az $a=1$ eset nem ad megoldást, és a továbbiakban $a^p\geqslant 2^p>2+p$ $(p>2)$.

Ha $b=3$, akkor $a^p=6+p$. Az $a=1$ eset nem ad megoldást, és a továbbiakban $a^p\geqslant 2^p>6+p$ minden $p>3$ esetén, míg a $p=3$, $b=3$ megint nem ad megoldást: $a^3=3!+3=9$ nem köbszám.

Tehát a továbbiakban azt is feltehetjük, hogy $b\geqslant 4$.

A maradék eseteket két részben vizsgáljuk: $b<p$ vagy $b\geqslant p$.

Ha $b<p$, akkor $b!$-t osztja minden b-nél nem nagyobb prím, vagyis a $(b!+p)$ kifejezést egyik sem oszthatja, azaz $b!+p=a^p$ minden prímosztója nagyobb, mint b. Tehát $a>b$. Ekkor viszont $a^p>b^p$. Megmutatjuk, hogy ezen kívül $b^p>b!+p$, és innen következik, hogy nem lehet megoldása az egyenletnek, ha $b<p$.

Mivel $b<p$, ezért bevezethetjük a $c\geqslant 1$ és $p=b+c$ jelölést. Ennek alapján azt kéne bebizonyítanunk, hogy $b^{b+c}>b!+b+c$. A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva (egyenlőség nem áll fönn, hiszen $b\geqslant 4$):

$$b!=b\cdot(b-1)!=b\prod_{i=1}^{b-1}i<b\cdot\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{b-1}i}{b-1}\right)^{b-1}=b\cdot\left(\frac{b(b-1)}{2(b-1)}\right)^{b-1}=\frac{1}{2^{b-1}}\cdot b^b.$$

Tehát azt kaptuk, hogy

$$b!+b+c<\frac{1}{2^{b-1}}\cdot b^b+b+c=\left(\frac{1}{2^{b-1}}+\frac{1}{b^{b-1}}\right)\cdot b^b+c.$$

Mivel $b\geqslant 4$, ezért ez tovább becsülhető:

$$b!+b+c<\left(\frac{1}{2^{b-1}}+\frac{1}{b^{b-1}}\right)\cdot b^b+c<b^b+c.$$

Tehát már csak azt kellene belátnunk, hogy $b^b+c<b^{b+c}$, vagyis

$$c<b^b\cdot(b^c-1),$$

ami pedig teljesül, ha $b\geqslant 4$.

Ha $b\geqslant p$, akkor $p\mid b!$, így $p\mid b!+p$, de $p^2\nmid b!+p$, vagyis $b\leqslant 2b-1$. Továbbá, mivel $b\geqslant p$, ezért minden p-nél kisebb prím osztja a $b!$ kifejezést. És ezért a $b!+p$ kifejezést egyik p-nél kisebb prím sem oszthatja, tehát minden prímosztója legalább p.

Tudjuk, hogy $p\mid b!+p$. Ha létezik ezen kívül még olyan $q>p$ prím, hogy $q\mid b!+p$, akkor $pq\mid b!+p=a^p$, vagyis $(pq)^p\mid a^p=b!+p$. Ez viszont azt jelenti, hogy

$$p^{2p}\leqslant(pq)^p\leqslant b!+p\leqslant(2p-1)!+p=p+\prod_{i=1}^{2p-1}i,$$

ami a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség miatt felülről tovább becsülhető ($p>2$, nem áll fönn egyenlőség a számtani-mértani becslésben):

$$p+\prod_{i=1}^{2p-1} i < p+\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{2p-1} i}{2p-1}\right)^{2p-1} = p+\left(\frac{2p(2p-1)}{2(2p-1)}\right)^{2p-1} = p+p^{2p-1}.$$

Ezzel azt kaptuk, hogy $p^{2p}<p+p^{2p-1}$, vagyis mivel $p>2$, ezért $p<\frac{1}{p^{2p-2}}+1<2$, ami ellentmondás. Tehát nem lehet a $b!+p$ kifejezésnek p-nél sem nagyobb, sem kisebb prímosztója. Vagyis a nem más mint p-nek egy pozitív kitevős hatványa. Az imént láttuk, hogy $a=p^2$ már túl nagy, vagyis az egyetlen lehetőség az $a=p$ maradt.

Ekkor az egyenlet a következő alakot ölti: $p^p=b!+p$, azaz

$$b!=p^p-p=p\big(p^{p-1}-1\big).$$

Nézzük meg, hogy a két oldal 2-nek mekkora hatványával osztható; egyrészt $b>p$ miatt

$$\nu_2(b!)>\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor,$$

másrészt az LTE-lemmát használva:

$$\nu_2(p^p-p)=\nu_2\big(p^{p-1}-1^{p-1}\big)=\nu_2(p-1)+\nu_2(p+1)+\nu_2(p-1)-1.$$

Ha $4\mid p-1$, akkor $\nu_2(p+1)=1$, így $\nu_2(p^p-p)=2\nu_2(p-1)\leqslant 2\log_2 p$.

Ha $4\mid p+1$, akkor $\nu_2(p-1)=1$, így $\nu_2(p^p-p)=\nu_2(p+1)+1\leqslant 2\log_2 p$, ha $p\geqslant 5$.

Viszont, ha $p\geqslant 19$, akkor

$$\left\lfloor\frac{p}{2}\right\rfloor=\frac{p-1}{2}>2\log_2 p,$$

$$2\log_2 19=2\log_2\left(16\cdot\frac{19}{16}\right)=8+2\log_2\frac{19}{16}<8+2\log_2\sqrt{2}=9=\frac{19-1}{2}.$$

Maradt azoknak az eseteknek a vizsgálata, amikor $p<19$:

$p=3$: $3^3-3=4!$ megoldás.
$p=5$: $5^5-5=3120$ nem megoldás.
$p=7$:

$$7^7-7=7\cdot(7^6-1)=7\cdot(7^3-1)\cdot(7^3+1)=7\cdot 342\cdot 344=7\cdot 342\cdot 8\cdot 43,$$

ami nem lehet megoldás, hiszen $b<14$, így $43\nmid b!$.

$p=11$:

$$\nu_2\big(11^{11}-11\big)=\nu_2(11+1)+1=3<\frac{11-1}{2},$$

vagyis ez sem megoldás.

$p = 13$:

$$\nu_2\big(13^{13} - 13\big) = 2\nu_2(13 - 1) = 4 < \frac{13 - 1}{2},$$

vagyis ez sem megoldás.

$p = 17$:

$$\nu_2\big(17^{17} - 17\big) = 2\nu_2(17 - 1) = 8 < \left\lfloor \frac{17}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{17}{4} \right\rfloor < \nu_2(17!),$$

vagyis ez sem megoldás.

Tehát két lehetséges megoldás van:

$$(a, b, p) = (2, 2, 2) \text{ vagy } (3, 4, 3).$$

6. *Legyen n pozitív egész.* Skandináv négyzet *egy $n \times n$ méretű tábla, amely 1-től n^2-ig az összes egész számot tartalmazza úgy, hogy minden mezőben pontosan egy szám áll. Két különböző mezőt szomszédosnak tekintünk, ha van közös oldaluk. Ha egy mezőnek minden szomszédjában nagyobb szám áll, mint őbenne, akkor* völgynek *nevezzük.* Kaptató *egy sorozat, amely egy vagy több mezőből áll úgy, hogy*

(*i*) *a sorozat első mezője egy völgy,*

(*ii*) *a sorozat minden további mezője szomszédos az őt közvetlenül megelőző mezővel, és*

(*iii*) *a sorozat mezőiben álló számok növekvő sorrendben vannak.*

Adott n esetén határozzuk meg egy skandináv négyzetben lévő kaptatók számának legkisebb lehetséges értékét.

Nádor Benedek megoldása. Válasz: Legalább $2n(n-1)+1$ kaptató van.

Bizonyítás: Az a mező, ami az 1-est tartalmazza mindig völgy, így legalább egy völgy van. A mezőkbe írt számok szerinti indukcióval adódik, hogy minden mező vagy völgy, vagy létezik olyan – legalább két mezőből álló – kaptató, amelynek ő az utolsó eleme. Nevezzük *mezőhatár*nak két szomszédos mező közös határát.

Minden mezőhatárra igaz, hogy van legalább egy olyan kaptató, amiben ő az utolsó mezőhatár: az általa határolt két mező közül a kisebb számot tartalmazó szomszédja egy kaptató utolsó mezeje, ezt a kaptatót pedig kiegészíthetjük a nagyobbik számot tartalmazó mezővel; ebben a kaptatóban az utolsó mezőhatár éppen az általunk választott. Ebből következik, hogy a legalább két mezőből álló kaptatók száma legalább annyi, mint a mezőhatárok száma. Mivel $2n$ sorban soronként $n-1$ mezőhatár van és az 1 völgy, így a kaptatók számának minimuma legalább $2n(n-1)+1$.

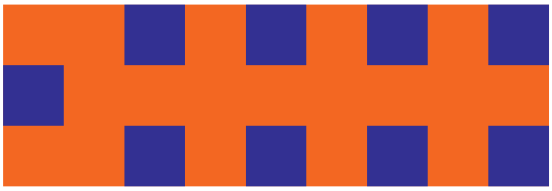
Mutatunk egy konstrukciót olyan *Skandináv négyzetre,* amiben pontosan $2n(n-1)+1$ kaptató van. Nevezzük *hegytetőnek* azokat a mezőket, amelyekben nagyobb szám áll, mint a szomszédaikban. Ha teljesül, hogy pontosan egy völgy van, és a hegytetők kivételével minden mező csak egy kaptatónak a vége, akkor pontosan $2n(n-1)+1$ kaptató lesz, mivel az utolsó mezőhatár, amin a kaptató átmegy meghatározza a kaptatót (a kaptató korábbi mezői egyértelműek), az 1-es mezőn végződő völgynek pedig nincs mezőhatára. Nevezzük ezt a tulajdonságot minimum feltételnek. A minimum feltétel teljesülését úgy érjük el, hogy a skandináv négyzetből készítünk egy fa gráfot, amelynek csúcsai a mezők közül kerülnek ki, az élek pedig a köztük lévő mezőhatárok. A fát úgy helyezzük el, hogy minden olyan mezővel legyen szomszédos csúcsa, ami nem csúcsa a gráfnak; ezen kívül a kimaradó mezők között ne legyenek olyanok, amik egymással szomszédosak. Legyen a fa csúcsainak száma k. Ekkor a fa mezőibe az $1,\dots,k$ számokat írjuk be úgy, hogy az 1-esből indulva a faéleken keresztül minden facsúcsba eljuthassunk faéleken (vagyis az 1-esből kiindulva növekednek a fa mezőinek az értékei). Ezt egy, a fa 1-es csúcsából indított szélességi bejárással érhetjük el. Meggondolható, hogy a fás elrendezésre teljesül a minimum feltétel, mert csak az 1 a völgy és két fán kívüli mező nem lehet szomszédos.

A fa létezését $n>4$-re konstruktívan bizonyítjuk az n-nek a 3-as maradéka szerint. Tekintsük az alábbi $2\times n$-es és $3\times n$-es elemeket:

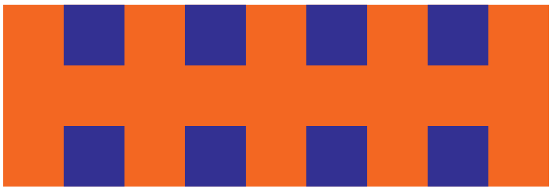
$A1$:

$A2$:

$C1$:



$C2$:



Nevezzük el az elemeket az *ábra* szerint $A1$, $A2$, $C1$, $C2$-nek. Legyen $A1'$ az $A1$ elem saját vízszintes tengelyére tükrözött képe, hasonlóan $A2'$ az $A2$-nek saját vízszintes tengelyére tükrözött képe. Ekkor könnyű meggondolni, hogy minden elemben a narancssárga rész fát alkot. Azt is meggondolhatjuk, hogy a $C1$ és $C2$ elemeket tetszőleges sorrendben egymás alá rakva a két elem által alkotott táblázatban is fát alkotnak a narancs színű mezők. Hasonlóan $A1$-et $C2$ fölé, $A1'$-t $C1$ alá helyezve az elemek által alkotott táblázatban a narancs mezők fát alkotnak. (Az elemeket úgy rakjuk egymás alá, hogy a bal szélük egy vonalban legyen.) Ugyanez elmondható $A2$, A2$'$ és $C2$-re is.

Most már minden adott, hogy minden $n > 4$-re konstrukciót adjunk. Ezt az n-nek a 3-as maradéka szerinti esetvizsgálattal tesszük meg.

A $3 \mid n$ esetet a $C1$ és $C2$ elemek felváltva egymás alá helyezésével érjük el.

Az $n \equiv 2 \mod 3$ esetben legfelülre rakunk egy $A1$-es elemet, alá egy $C1$-est utána felváltva $C2$-eseket és $C1$-eseket.

Az $n \equiv 1 \mod 3$ esetet hasonlóan érjük el, mint az $n \equiv 2 \mod 3$-at, csak az utolsó $3 \times n$-es helyett az oda passzoló $2 \times n$-eset rakjuk le (van ilyen, mert $C1$ alá $A1'$-t, $C2$ alá $A2'$-t be tudjuk rakni).

Ezzel minden $n > 4$-re adtunk konstrukciót.

Végül mutatunk konstrukciót $n = 2, 3, 4$-re ($n = 1$ esetén egyféle kitöltés van, ami jó):

$n = 2$:  $n = 3$:  $n = 4$: 

Négyszín-sejtés III: A színezési polinom, avagy miért olyan nehéz a négyszín-tétel*

Az előző részekben megismerkedtünk a négyszín-sejtéssel, mely szerint bármely térképet ki lehet színezni 4 színnel úgy, hogy az egymással határos régiók különböző színt kapjanak. Majd ezt a kérdést átfogalmaztuk a síkgráfok nyelvére, ahol a sejtés azt mondta, hogy egy síkbarajzolt gráf pontjai kiszínezhetők 4 színnel úgy, hogy éllel összekötött pontok ne kapjanak azonos színt. (Az ilyen színezéseket neveztük jó színezéseknek.) az előző részben láttuk azt is, hogy a 6 színnel való jó színezhetőség bizonyítása egészen egyszerű volt, és az 5 színnel való színezhetőséget is viszonylag könnyen be lehetett bizonyítani. Mindezek ellenére a 4 színnel való jó színezhetőség bizonyítására 120 évre volt szükség, és még ekkor is csak egy olyan bizonyítást tudtak adni, amihez komoly számítógépes számításokra volt szükség. Vajon miért nehezedik meg ez a kérdés ennyire, ha 5 színről 4-re térünk át?

Ebben a részben bemutatjuk a színezési polinomot. Ezt a polinomot *George David Birkhoff* amerikai matematikus kezdte vizsgálni az 1910-es években, abban a reményben, hogy a segítségével beláthatja a négyszín-sejtést. Bár a négyszín-

* Az írás az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

sejtést végül más gondolatmenet segítségével látták be, a színezési polinom nagyon érdekes objektumnak bizonyult, és valamennyire azt is meg fogja nekünk mutatni, hogy miért is olyan nehéz a négyszín-sejtés.

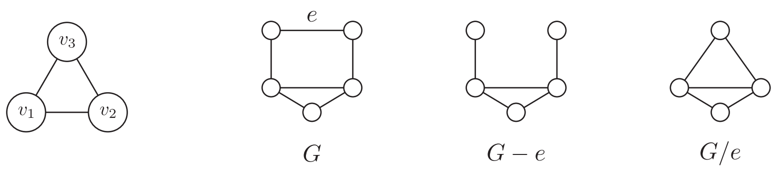
Térjünk tehát vissza a négyszín-sejtéshez. Azt szeretnénk belátni, hogy ha G egy hurokélmentes síkgráf, akkor G-nek létezik 4 színnel való jó színezése. Van a matematikában egy furcsa jelenség: ha elakadunk egy kérdéssel, paradox módon néha érdemes egy „nehezebb” kérdéssel próbálkozni. Mégpedig egy olyan nehezítéssel, amiben több a struktúra. Ez az extra struktúra néha segít abban, hogy jobban megértsük a dolgokat.

Legyünk tehát ambiciózusak, és kérdezzünk egy nehezebb kérdést. Hányféleképpen lehet a G gráfot 4 színnel jól színezni? Sőt, kérdezzük meg tetszőleges pozitív egész k-ra, hogy hány jó színezése van G-nek k színnel. Ha ezt meg tudnánk válaszolni, akkor persze azt is meg tudnánk mondani, hogy van-e 4 színnel való jó színezés, tehát ez egy nehezebb kérdés. De most már van lehetőségünk szabályosságokat keresni a jó színezések számában.

Legyen k egy pozitív egész, és jelöljük $p_G(k)$-val, hogy a G gráfnak hány jó színezése van k színnel. Lássunk egy konkrét példát, ahol ezt ki is tudjuk számolni. Vegyük *6. ábra* bal oldalán látható háromszöggráfot. A v_1 csúcsot színezhetjük bármelyik színnel, ez k lehetőség. Ha a v_1-et kiszíneztük valamelyik színnel, akkor a v_2-re az egyetlen megkötés, hogy nem lehet ugyanilyen színű. Tehát v_1 tetszőleges színe esetén $k-1$ lehetőség van v_2 színére. Ez idáig $k\cdot(k-1)$ lehetőség. Végül bárhogy is színeztük ki v_1-et és v_2-t, v_3 színére az az egyetlen megkötés, hogy ettől a két színtől különböző legyen. Tehát a háromszöggráfnak

$$p_\Delta(k) = k\cdot(k-1)\cdot(k-2) = k^3-3k^2+2k$$

jó színezése van k színnel.



6. ábra. Bal oldalon: a háromszöggráf. Jobb oldalon: Példa a 3. tétel bizonyításában szereplő $G-e$ és G/e gráfokra

Észrevehetjük, hogy a háromszög esetén $p_\Delta(k)$ a k változóra nézve egy polinom. Vajon igaz-e ez általában? Megmutatjuk, hogy igen.

3. tétel. *$p_G(k)$ tetszőleges G gráf esetén k-ban polinom.*

Bizonyítás. Ezt a gráf élszámára vonatkozó indukcióval fogjuk belátni. Ha a gráfnak nincsen éle, és n csúcsa van, akkor bármelyik csúcsot bármilyen színűre színezhetjük, tehát k^n jó színezés van. Ez k-ban egy polinom, tehát az alapeset készen van.

Most tegyük fel, hogy már tudjuk, hogy $p_G(k)$ egy polinom, ha G-nek legfeljebb t éle van (és akármennyi csúcsa). Legyen G egy gráf $t+1$ éllel, és legyen e

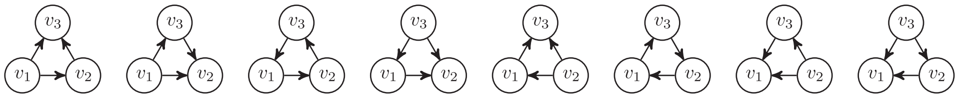
a gráf egyik éle, melynek végpontjai u és v. A $p_G(k)$ kifejezésről szeretnénk megmutatni, hogy k-ban egy polinom. Vegyük a $G-e$ gráfot, azaz azt a gráfot, ahol az e élet kitöröljük (lásd a 6. ábrát). Ez egy t élű gráf, tehát róla már tudjuk, hogy $p_{G-e}(k)$ egy polinom. Hasonlítsuk össze G és $G-e$ jó színezéseinek számát. A G gráf tetszőleges k színnel való jó színezése jó színezése $G-e$-nek is, hiszen $G-e$ jó színezéseire kevesebb a megkötés. Viszont $(G-e)$-nek lehet néhány olyan jó színezése, amely G-nek nem jó színezése: ahol az u és v pont azonos színt kap. Vegyük most azt a gráfot, ahol az u és v pontot összeragasztjuk egy ponttá, az e élt pedig elhagyjuk. Nevezzük ezt a gráfot (G/e)-nek (lásd a 6. ábrát). G/e tetszőleges k színű jó színezése ad egy olyan k színű jó színezést $(G-e)$-re, ahol az e él két végpontja azonos színű. Tehát $p_G(k)=p_{G-e}(k)-p_{G/e}(k)$ teljesül minden pozitív egész k-ra. Vegyük észre, hogy (G/e)-nek is t éle van, tehát $p_{G/e}(k)$-ról is tudjuk, hogy polinom. Két polinom különbsége szintén polinom, tehát $p_G(k)$-ról is beláttuk, hogy polinom. $\square$

Ezzel beláttuk, hogy $p_G(k)$ valóban egy polinom. Ezt a polinomot nevezzük a G színezési polinomjának. Miért hasznos ez nekünk? Eddig a $p_G(k)$-t csak pozitív egész számokra definiáltuk. Most viszont, hogy tudjuk, hogy $p_G(k)$ egy polinom (pl $p_\Delta(k)=k^3-3k^2+2k$), ezt értelmezhetjük tetszőleges valós számokra is. Mondhatjuk pl, hogy a háromszöggráfnak $p_\Delta(3{,}5)=3{,}5^3-3\cdot 3{,}5^2+2\cdot 3{,}5=13{,}125$ jó színezése van 3,5 színnel. Mit jelent ez? Valójában nem világos. Az sem világos, hogy mit jelentene egy 3,5 színnel való jó színezés. Viszont olyan szempontból mégis hasznos ez a kiterjesztés, hogy most már használhatjuk azokat az eszközöket, amelyeket analízisből tanultunk a függvények elemzésére. *William Tutte* angol matematikusnak például sikerült bebizonyítania, hogy egy G síkgráfra $p_G\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)>0$ mindig teljesül (bármennyire nem is világos, hogy mit is jelent pontosan ez a szám). Mivel $\frac{5+\sqrt5}{2}\approx 3{,}618$, lehetett abban bízni, hogy talán be lehet látni, hogy a $p_G(x)$ érték az $\frac{5+\sqrt5}{2}$ után nem csökken túl gyorsan, és akkor következne, hogy még $p_G(4)$ is pozitív. Sajnos az derült ki, hogy ez a módszer nem működhet. Gordon Royle ugyanis megmutatta, hogy akármilyen pici $\varepsilon>0$ számra van olyan G síkgráf és $4-\varepsilon<x<4$, hogy $p_G(x)=0$. Azaz az $\frac{5+\sqrt5}{2}$ és a 4 között a színezési polinom értéke még le tud menni 0-ra, sőt, ez a nullhely a 4-hez akármilyen közel tud lenni. (Kicsit pongyolán fogalmazva, van olyan síkgráf, amelynek 3,99 színnel már nincs jó színezése, bármit is jelentsen ez.) Ez azt is mutatja, hogy a négyszín-sejtés bizonyos értelemben éppenhogy teljesül. Ez az „éppenhogy teljesülés” már sejteti, hogy nem fogunk tudni olyan nagyvonalú bizonyítást találni a négyszín-sejtésre, mint amilyet a hatszín-sejtésre lehetett adni.

Ha a négyszín-sejtésre nem is adott nekünk bizonyítást a színezési polinom, azért mégiscsak álljunk meg, és nézegessük meg egy kicsit jobban.

Láttuk, hogy bár nem értjük, hogy mit jelent a $p_G\left(\frac{5+\sqrt5}{2}\right)$, azért be lehetett látni róla, hogy egy síkgráfra mindig pozitív. Most nézzünk meg egy másik meglepő állítást. Ehhez először tisztázzunk néhány fogalmat.

Egy G gráf irányításának nevezzük azt, ha minden élének adunk valamilyen irányítást. Például *7. ábra* mutatja a háromszöggráf irányításait. Egy élt kétféleképpen lehet irányítani, tehát egy m élű gráfnak 2^m különböző irányítása van. Egy irányítást körmentesnek nevezünk, ha nincs olyan csúcs, ahonnan elindulva vissza tudunk jutni ugyanoda úgy, hogy mindig irányhelyesen megyünk át az éleken.



7. ábra. A háromszöggráf 8 különböző irányítása. Ezek közül a harmadik és a hatodik nem körmentes, a többi 6 irányítás körmentes

A következő meglepő állítást *Richard Stanley* amerikai matematikus fedezte fel.

2. állítás. *Tetszőleges G gráfra*

$$p_G(-1) = (-1)^n \cdot (G \text{ körmentes irányításainak száma}),$$

ahol n a G gráf csúcsainak száma.

1. példa. A háromszöggráf esetén

$$p_\Delta(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot (-1) = -1 - 3 - 2 = -6,$$

ami valóban $(-1)^3 \cdot 6$.

Itt az a meglepő dolog történt, hogy $p_G(-1)$-et úgy definiáltuk, hogy a színezési polinomba behelyettesítettünk (-1)-et. Pozitív egész k esetén tudjuk, hogy a színezési polinom a k színnel való jó színezéseket számolja meg. Viszont negatív számokra ugyanúgy nem világos, hogy a $p_G(x)$ jelent-e valamit, ahogy törtekre sem az. Az állítás viszont azt mutatja, hogy varázsütésre a $p_G(-1)$ mégis valami értelmes dolgot számol meg. Lássuk is be ezt az állítást.

Bizonyítás. Élszámra vonatkozó indukciót fogunk használni. Ha a gráfnak 0 éle van, akkor $p_G(k) = k^n$, tehát $p_G(-1) = (-1)^n$.

Másrészt ilyenkor azt mondjuk, hogy $2^0 = 1$ irányítás van (az üres irányítás), és ez persze körmentes. Tehát valóban $p_G(-1) = (-1)^n \cdot$ (körmentes irányítások száma).

Ha valakit ez esetleg nem győzött meg, nézzük meg az 1 élű esetet is. Ilyenkor $p_G(k) = k^{n-1}(k-1)$, hiszen az él másodjára megszínezett csúcsát nem színezhetjük ugyanolyan színre, mint az elsőt, a többi csúcs színére viszont nincs megkötés. Azaz $p_G(-1) = (-1)^{n-1} \cdot (-2) = (-1)^n \cdot 2$. Másrészt ilyenkor nyilván 2 irányítás van, és mindkettő körmentes. Azaz valóban teljesül a tétel állítása 1 élű gráfokra is.

Tegyük fel most, hogy teljesül az állítás tetszőleges n csúcsszám esetén, ha az élszám kisebb, mint t, és vegyünk egy t élű G gráfot. Már korábban láttuk, hogy tetszőleges e élre $p_G(k) = p_{G-e}(k) - p_{G/e}(k)$ teljesül minden pozitív egész k-ra. Lássuk be, hogy ez minden valós x-re is igaz. A bal oldalon és a jobb oldalon is egy polinom van. Tehát a két oldal különbsége, $p_G(x) - p_{G-e}(x) + p_{G/e}(x)$ egy polinom, amely minden $x = k$ pozitív egész számra 0. Tudjuk, hogy egy nemnulla polinomnak legfeljebb annyi nullhelye van, mint a fokszáma. Tehát $p_G(x) - p_{G-e}(x) + p_{G/e}(x)$ az azonosan 0 polinom. Azaz most már azt is tudjuk, hogy

$$p_G(x) = p_{G-e}(x) - p_{G/e}(x)$$

minden valós számra, speciálisan $x = -1$-re is.

$(G - e)$-nek és (G/e)-nek is kevesebb, mint t éle van, tehát az indukciós feltevés miatt tudjuk, hogy $p_{G-e}(-1) = (-1)^n \cdot (G - e$ körmentes irányításainak száma) és $p_{G/e}(-1) = (-1)^{n-1} \cdot (G/e$ körmentes irányításainak száma). Itt használtuk, hogy $G - e$ csúcsszáma n, G/e csúcsszáma pedig $n - 1$. Azaz $p_G(-1) = (-1)^n \cdot (G - e$ körmentes irányításainak száma) $+ (-1)^n \cdot (G/e$ körmentes irányításainak száma).

Most már elég megmutatni, hogy G körmentes irányításainak száma $= G - e$ körmentes irányításainak száma $+ G/e$ körmentes irányításainak száma.

Nézzük meg először, hogy hogyan viszonyulnak $G - e$ körmentes irányításai a G körmentes irányításaihoz. Vegyük $G - e$ egy körmentes irányítását. Az biztos, hogy nem lehet u-ból v-be és v-ből u-ba is irányított úton eljutni, hiszen akkor u-ból u-ba vissza lehetne jutni irányhelyesen mozogva, ilyet pedig egy körmentes irányításban nem lehet. Tehát 3 eset lehet: Vagy csak u-ból v-be lehet irányított úton eljutni (és v-ből u-ba nem), vagy csak v-ből u-ba lehet irányított úton eljutni (és u-ból v-be nem), vagy pedig sem u-ból v-be, sem pedig v-ből u-ba nem lehet irányított úton eljutni.

Most rajzoljuk vissza az e élet. Ha a $G - e$ körmentes irányításából meg szeretnénk kapni G egy körmentes irányítását, akkor az első esetben csak u-ból v-be irányíthatjuk az e élet, a második esetben csak v-ből u-ba, a harmadik esetben viszont akármelyik irányban megirányíthatjuk, mindkét esetben körmentes marad az irányítás.

Viszont vegyük észre, hogy ha $(G - e)$-ben összeragasztjuk az u és a v csúcsokat, akkor a $G - e$ egy körmentes irányítása pontosan akkor marad körmentes, ha sem u-ból v-be, sem v-ből u-ba nem volt a $G - e$-ben irányított út. Tehát G körmentes irányításainak száma $= G - e$ körmentes irányításainak száma $+ G/e$ körmentes irányításainak száma. Ezzel az indukciós lépést befejeztük. □

Hivatkozások

[1] Hubai Tamás, *The chromatic polynomial,* Diplomamunka, `https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2009/hubai_tamas.pdf`

[2] Stanley, R. P., *Acyclic orientations of graphs,* Discrete Math. **5(2)**: 171–178, (1973), doi:10.1016/0012-365X(73)90108-8.

[3] Gordon Royle, *Planar triangulations with real chromatic roots arbitrarily close to 4,* Annals of Combinatorics, **12(2)**: 195–210, July 2008, arXiv:math/0511304.

Tóthmérész Lilla
ELTE

Helyesbítés és közlemény

A szeptemberi számban közölt végeredményben a csapatversenyeknél több helyen tévesen jelent meg a versenyző évfolyama. A helyes végeredmény a honlapon látható, illetve letölthető pdf-ben is szintén a honlapról, a szeptemberi szám tartalomjegyzékénél* kell keresni.

Egy csapatnál pedig nem írtuk oda, hogy dicséretet kapott:

A **G**-jelű fizika gyakorlatok csapatversenyében **dicséretben részesült:**

3. Vonal_vonal_vonal_: *Jávor Bence* 9. o. t. (Budapest, Városmajori Gimn.), *(hiányzó GDPR nyilatkozat)* 9. o. t. (Budapest, Városmajori Gimn.) 65 pont.

A hibákért elnézést kérünk!

Közlemény

A 2021–2022-es tanév pontversenyeinek összesített eredményét nem áll módunkban megjelentetni.

Szerk.

61. Rátz László Vándorgyűlés

Eger, 2022. július 5–8.

Az általános iskolai tanárok† versenyének feladatai

1. Hány különböző hétjegyű palindrom szám képezhető a 2, 2, 3, 3, 5, 5, 5 számjegyekből? (A palindrom szám olyan szám, amelynek számjegyeit fordított sorrendben felírva az eredeti számot kapjuk vissza.) (A) 6; (B) 8; (C) 12; (D) 36; (E) 64.

2. Legyen $x=2^{20}\cdot 3^5$, $y=2^5\cdot 5^{10}$, $z=7^{10}$. Melyik relációlánc fejezi ki helyesen x, y, z nagyság szerinti sorrendjét? (A) $x>y>z$; (B) $x>z>y$; (C) $y>z>x$; (D) $y>x>z$; (E) $z>x>y$.

3. Zárójelekkel kiegészítve a

$$2\cdot 3+4\cdot 5$$

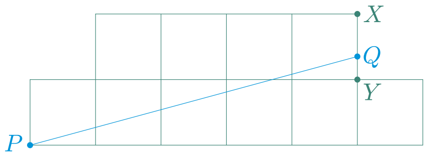
kifejezést, hányféle különböző értéket kaphatunk? (A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5; (E) 6.

4. Egy szobában az emberek kétharmada a székek háromnegyedén ül, a többi ember áll. Ha 6 üres szék van a szobában, akkor hány ember tartózkodik a helyiségben? (A) 12; (B) 18; (C) 24; (D) 27; (E) 36.

---

* `https://www.komal.hu/lap/2022-09/tart.h.shtml`

† A középiskolai tanárverseny feladatai az októberi számban megjelentek.



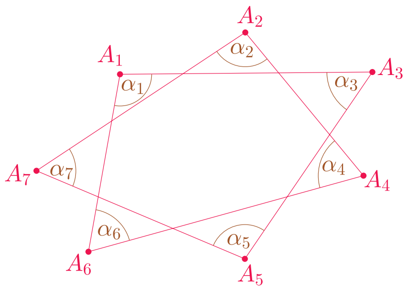
5. Az ábra egy nyolcszöget mutat, amely 10 egységnégyzetből áll. A PQ szakasz felezi a nyolcszög területét. Mekkora az $\frac{XQ}{QY}$ arány? (A) $\frac{2}{5}$; (B) $\frac{1}{2}$; (C) $\frac{3}{5}$; (D) $\frac{2}{3}$; (E) $\frac{3}{4}$.

6. Petra, Réka, Viki és Dia jó barátnők. Egy közös kirándulásukra Dia elfelejtett pénzt hozni magával, ezért Petra a pénzének $\frac{1}{5}$-ét, Réka az $\frac{1}{4}$-ét, Viki pedig az $\frac{1}{3}$-át kölcsönadta neki. Dia így mindhárom barátnőjétől ugyanannyi pénzt kapott. A csoport pénzének hányad részé került Diához? (A) $\frac{1}{10}$; (B) $\frac{1}{4}$; (C) $\frac{1}{3}$; (D) $\frac{2}{5}$; (E) $\frac{1}{2}$.

7. 12 ember ül egy köralakú asztalnál, lovagok és lókötők. A lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak. Az emberek egyszer csak beszélgetni kezdenek. Az első személy azt mondja: „*Ennél az asztalnál nincsenek lovagok.*” Erre a második ember azt válaszolja: *„Legfeljebb egy lovag ül az asztalnál.”* A harmadik ember azt mondja: *„Legfeljebb két lovag ül az asztalnál.”* A felszólalások a továbbiakban a lovagok számának felső határát mindig eggyel-eggyel növelik, míg végül a 12. ember azt mondja, hogy *„Legfeljebb 11 lovag ül az asztalnál.”* Hány lovag van a 12 személy között? (A) 4; (B) 5; (C) 6; (D) 7; (E) 8.

8. Egy téli napon egy fűtetlen váróteremben az emberek $\frac{2}{5}$ része visel kesztyűt és $\frac{3}{4}$ részükön van sapka. Legalább hány olyan ember lehet a teremben, akiken kesztyű és sapka is van? (A) 3; (B) 5; (C) 8; (D) 15; (E) 20.

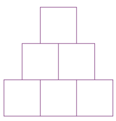
9. Öt különböző pozitív egész szám átlaga 15, mediánja 18. Legfeljebb mekkora lehet az öt szám közül a legnagyobb? (A) 19; (B) 24; (C) 32; (D) 35; (E) 40.



10. Az ábra alapján hány fok az α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7 szögek összege? (A) 360°; (B) 540°; (C) 630°; (D) 720°; (E) 1080°.

11. Bea egy lapra leírja az egész számokat 1-től 30-ig, majd összeadja azokat. Balázs egy másik lapra leírja Bea számait azzal a módosítással, hogy minden 2-es számjegy helyett 1-est ír, majd ő is összegzi a számait. Mennyivel több Bea összege Balázsénál? (A) 13; (B) 26; (C) 102; (D) 103; (E) 110.

12. Az alábbi számok közül melyik négyzetszám?
(A) $\frac{16!\cdot 17!}{2}$; (B) $\frac{17!\cdot 18!}{2}$; (C) $\frac{18!\cdot 19!}{2}$; (D) $\frac{19!\cdot 20!}{2}$; (E) $\frac{20!\cdot 21!}{2}$.



13. Három különböző egyjegyű pozitív egész számot írunk az alsó sorban levő négyzetekbe. A szomszédos négyzetekbe kerülő számokat összeadjuk, majd a kapott eredményt a felettük levő cellákba írjuk. A második sorban ugyanezt az eljárást folytatjuk, így kapunk egy számot a felső négyzetben. Mekkora lehet a felső négyzetbe kerülő legnagyobb és legkisebb szám különbsége? (A) 18; (B) 22; (C) 24; (D) 26; (E) 28.

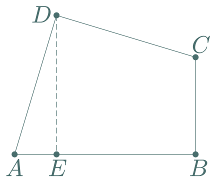
14. Az A, B, C, D, E, F, G, H, I olyan számok, amelyek teljesítik az

$$A+B+C=1,$$
$$B+C+D=2,$$
$$C+D+E=3,$$
$$D+E+F=4,$$

$$E+F+G=5,$$
$$F+G+H=6,$$
$$G+H+I=7$$

egyenlőségeket. Mennyi $A+E+I$ értéke? (A) 3; (B) 3,5; (C) 4; (D) 4,5; (E) 5.

15. Az ábra szerinti $ABCD$ négyszögben $CD=DA$, $ABC\sphericalangle=CDA\sphericalangle=DEB\sphericalangle=90°$ és $DE=5$. Mekkora az $ABCD$ négyszög területe? (A) 20; (B) 24; (C) 25; (D) 28; (E) 30.



16. Egy virágcsokor fehér és piros rózsát, továbbá fehér és piros szegfűt tartalmaz. A fehér virágok egyharmada rózsa, a piros virágok háromnegyede szegfű, a virágok hattizede fehér. A virágok hány %-a szegfű? (A) 15; (B) 30; (C) 40; (D) 60; (E) 70.

17. Jelölje négy egy síkban levő, egymástól páronként különböző egyenes esetén n azon pontok számát, amelyek illeszkednek két vagy több egyenesre. Mennyi n összes lehetséges értékének összege? (A) 14; (B) 16; (C) 18; (D) 19; (E) 21.

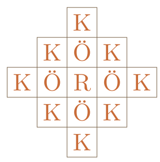
18. Viki és Dávid egy körvonalon mozgatnak egy-egy bábut. A körvonal 12 ponttal egyenlő hosszúságú ívekre van felosztva, és a pontok az óramutató járása szerint meg vannak számozva 1-től 12-ig. Viki és Dávid is a 12-es jelzésű pontból indítja a bábuját. Viki egy fordulóban 5 pontnyit halad az óramutató járásával megegyező irányban, Dávid pedig 9 pontnyit az óramutató járásával ellentétesen. A játék akkor ér véget, ha egy forduló végén a két bábu azonos helyre kerül. Hány forduló alatt ér véget a játék? (A) 6; (B) 8; (C) 12; (D) 14; (E) 24.

19. Egy téglalap oldalainak hossza centiméterben mérve pozitív egész számok. Ha a téglalap területe t cm^2, kerülete pedig k cm, akkor az alábbiak közül mekkora nem lehet a $t+k$ összeg? (A) 100; (B) 102; (C) 104; (D) 106; (E) 108.

20. A $P(6;8)$ ponton áthaladó e és f egyenesek olyan Q és R pontban metszik az y tengelyt, amelyekre $OP=OQ=OR$, ahol O a koordinátarendszer kezdőpontja. Mekkora a PQR háromszög területe? (A) 45; (B) 48; (C) 54; (D) 60; (E) 72.

21. Róza egy kört 12 körcikkre oszt fel. Ezen körcikkekhez tartozó középponti szögek nagysága fokban mérve egész szám, és számtani sorozatot alkot. Hány fok lehet a középponti szögek közül a legkisebb szög minimális értéke? (A) 5; (B) 6; (C) 8; (D) 12; (E) 19.

22. Bármely K-betűből indulva, és oldalban szomszédos négyzetek felé balra, jobbra, felfelé vagy lefelé haladva hányféleképpen olvasható ki a KÖRÖK szó, ha a kiolvasások során minden betű kétszer használható? (A) 12; (B) 24; (C) 108; (D) 126; (E) 144.

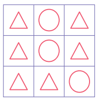


23. Diát rendszeresen meglátogatja három barátnője Bea, Évi és Vera. Bea minden harmadik napon, Évi minden negyedik napon, Vera pedig minden ötödik napon megy el Diához. Tegnap mindhárom barátnő meglátogatta. Az elkövetkező 365 napos időszakban hány olyan nap lesz, amikor a három lány közül pontosan ketten keresik fel Diát? (A) 48; (B) 54; (C) 60; (D) 66; (E) 72.

24. Egy 3×3-as négyzetrács mezőit pozitív számokkal töltjük ki az alábbi szabályok szerint:

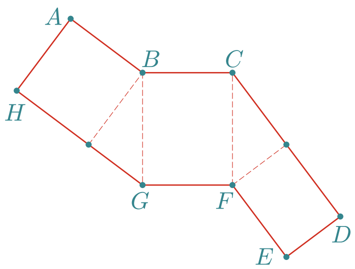
– minden sorban a számok szorzata 1,
– minden oszlopban a számok szorzata 1,
– bármely 2×2-es négyzetben a számok szorzata 2.
Melyik szám áll a középső mezőben? (A) 2; (B) 4; (C) 8; (D) 12; (E) 16.

25. Az $ABCD$ négyzet oldalainak hossza 8 egység. M a BC oldal azon pontja, melyre $CM=2$. Ha N a BD átlónak egy változó helyzetű pontja, akkor mekkora a $CN+MN$ távolság legkisebb értéke? (A) 8; (B) $6\sqrt{2}$, (C) 10; (D) $8\sqrt{2}$; (E) 12.



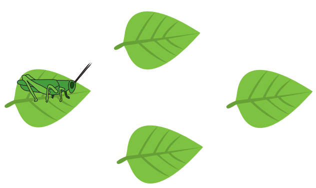
26. Egy 3×3-as négyzetrács mezőit kitöltjük a ◯ és △ jelekkel. Az alábbi ábra egy ilyen kitöltést mutat be, melyen három △ egy vonalban helyezkedik el. Hány olyan kitöltése van a négyzetrácsnak, amely esetén három ◯ és három △ is egy egyenes mentén helyezkedik el? (A) 39; (B) 42; (C) 78; (D) 84; (E) 96.

27. Az ABC háromszögben $AB=20$, $BC=25$ és $CA=17$. Adott a háromszög síkjában egy P pont. Mekkora a $2PA+3PB+5PC$ hosszúság minimális értéke? (A) 115; (B) 109; (C) 100; (D) 96; (E) 91.



28. Az alábbi ábrán egy $ABCDEFGH$ sokszög látható, mely téglalapokból és derékszögű háromszögekből áll. A sokszöget kivágva és a szaggatott vonalak mentén összehajtogatva egy háromszög alapú hasábot kapunk. Ha $AH=EF=8$ és $GH=14$ egység, akkor hány térfogategység a hasáb térfogata? (A) 112; (B) 128; (C) 192; (D) 240; (E) 288.

29. Egy téglalap alakú padló 17 m hosszú, 10 m széles és 170 db $1\text{ m}\times 1\text{ m}$-es csempével van burkolva. Egy bogár egyenes vonalban átsétál az egyik sarokból a szemközti sarokba. Az első és az utolsó lapot is figyelembe véve hány lapon halad keresztül a bogár? (A) 17; (B) 25; (C) 26; (D) 27; (E) 28.



30. Egy szöcske véletlenszerűen ugrál négy levélen, és minden ugrásával egyenlő valószínűséggel jut el a másik három levél valamelyikére. Mi a valószínűsége annak, hogy a szöcske 4 ugrás után visszajut arra a helyre, ahonnan elindult? (A) $\frac{2}{9}$; (B) $\frac{19}{80}$; (C) $\frac{20}{81}$; (D) $\frac{1}{4}$; (E) $\frac{7}{27}$.

A feladatsort **Fonyóné Németh Ildikó** és **Fonyó Lajos** állították össze, és **Kiss Géza** lektorálta.

Az általános iskolai tanárok versenyének eredménye

1. Palkó László (Budapest, Áldás Utcai Ált. Isk.),
2. Egyed László (Bajai III. Béla Gimn.),
3. B. Varga József (Temerin, Petar Kočić Ált. Isk.),
4. Rózsahegyi Eszter (Budapest XVI. Kerületi Móra Ferenc Ált. Isk.),
5. Tóth Gabriella (Csantavér, Hunyadi János Ált. Isk.).

Gyakorló feladatsor
emelt szintű matematika érettségire

I. rész

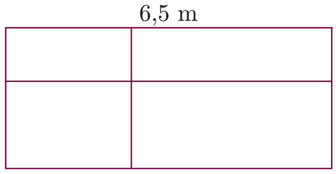
1. *a*) Oldjuk meg a $2\cdot\sin^2 x+3\cdot\cos^2 x+2\cdot\sin x=0$ egyenletet a valós számok halmazán. (*5 pont*)

b) Melyek azok a valós számok, amelyek eleget tesznek az $x^2-4x-5\leqslant 0$ és a

$$\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

egyenlőtlenségnek egyaránt? (*8 pont*)

2. Egy adott hosszúságú szakaszt az *aranymetszés* szerint úgy osztunk két részre, hogy az eredeti és a keletkezett hosszabb szakasz hosszának aránya megegyezik a keletkezett hosszabb és a keletkezett rövidebb szakasz hosszának arányával. Bence szobája egyik falának hossza 6,5 méter, magassága 2,8 méter. Ezt a falfelületet Bence úgy szeretné lefesteni, hogy függőlegesen és vízszintesen is az aranymetszésnek megfelelően osztja fel 4 téglalap alakú részre úgy, hogy a bal felső sarok felé legyenek a rövidebb szakaszok.



Bence fala

a) Határozzuk meg az egyes téglalapok területét. A számolás során az oldalak hosszát és a területeket is pontosan 3 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

b) Bencének otthon 4-féle színű falfestéke van, ezekből válogat a fal festése során. Hány különböző színezés lehetséges, ha az oldallal egymáshoz illeszkedő téglalapoknak különböző színűeknek kell lennie? (*4 pont*)

3. A légköri nyomás függ a tengerszinten mérhető nyomás értékétől (p_0), a tengerszint feletti méterben mért magasságtól (h) és a levegő Celsius-skálán mért hőmérsékletétől (T). A hozzárendelés szabálya:

$$p=p_0\cdot e^{-0{,}0342\cdot\frac{h}{T+273}}.$$

a) Mekkora a nyomás Bolívia fővárosában, La Pazban 3 600 méter magasságban, ha a tengerszinten 101 500 Pa a nyomás 20 °C-on? (*2 pont*)

b) A Kékestetőn 1 014 méter magasságban hány %-os nyomásváltozás észlelhető, ha a hőmérséklet 8 °C-ról 22 °C-ra emelkedik? (*3 pont*)

c) Milyen magasságban mérhető fele akkora nyomás, mint a tengerszinten, amikor a levegő hőmérséklete 24 °C? (*6 pont*)

4. Az **AB0** vércsoportrendszerben az emberek négy alapvető fenotípusba sorolhatók. A magyarországi populációt figyelembe véve az **A** vércsoportúak a népesség 44%-át teszik ki, a **0** vércsoportúak 40%-ot. A **B** vércsoportúak aránya 11%, míg az **AB** vércsoportúak mindössze 5%-ot adnak. Ettől a csoportosítástól függetlenül a vörösvértestek felszínén található D antigén megléte esetén Rh^{+} vércsoportról beszélünk, a D antigén hiánya esetén Rh^{-} a vércsoport, ahová az emberek 15%-a tartozik.

a) Igazoljuk Réka állítását, aki azt mondja, hogy a Magyarországon élő 9,7 millió lakosból mindössze körülbelül 72 750 ember tartozik a legritkább **AB** Rh^{-} vércsoportba. (*2 pont*)

b) Csengéről tudjuk, hogy van D antigén a vérében. Mekkora valószínűséggel **B** vércsoportú Csenge? Válaszunkat indokoljuk. (*2 pont*)

c) Készítsünk kördiagramot a szükséges középponti szögek meghatározása után, amely mutatja a magyar embereket vércsoportjuk alapján, figyelembe véve mind az **AB0** rendszert, mind a D antigén meglétét. (*5 pont*)

d) Egy véradásról szóló teltházas előadáson a 150 fős teremben férfiak, nők és gyerekek ülnek. Ha a teremből kimenne 2 férfi, akkor az ott maradó férfiak és nők aránya 2 : 3 lenne. Ha a terembe bejönne még 2 gyerek, akkor a nők pontosan háromszor annyian lennének, mint a gyerekek. Hány nő vett részt ezen az előadáson? (*6 pont*)

II. rész

5. *a*) Elkezdtük összeadni a 7-tel osztva 5 maradékot adó pozitív egész számokat a legkisebb ilyen tulajdonságú számtól kezdve. Hány tagot adtunk össze, és mi az utolsó szám, ha a kapott összeg 54 875? (*4 pont*)

b) Egy mértani sorozat hatodik és nyolcadik tagja egyaránt 6. Számítsuk ki a sorozat első 35 tagjának összegét. (*4 pont*)

c) Egy számtani sorozat három egymást követő elemének összege 72. Ha az első számból elveszünk 4-et, a középsőt változatlanul hagyjuk, az utolsóhoz pedig hozzáadunk 16-ot, akkor egy mértani sorozat három egymást követő tagját kapjuk. Határozzuk meg a mértani sorozat hányadosát. (*8 pont*)

6. Tekintsük az $f(x)=\frac{4x-14}{x-2}$ függvényt.

a) Adjunk meg egy olyan egész számot, amelyre az $f(x)$ függvény helyettesítési értéke is egész szám. (*2 pont*)

b) Bizonyítsuk be, hogy pontosan 8 darab rácsponton halad át az $f(x)$ függvény képe a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszerben. (*8 pont*)

c) Oldjuk meg a $\sqrt{f(x)}=\sqrt{x-3}$ egyenletet a valós számok halmazán. (*6 pont*)

7. Egy konyhai műanyag tölcsér alsó része henger alakú, belső átmérője 18 milliméter, magassága 5 centiméter. Felső része a hengerre pontosan illeszkedő csonkakúp, amelynek felső átmérője 7 centiméter, illetve magassága 4 centiméter.

a) A tölcsér alját befogjuk, és teljes magasságának 90%-áig megtöltjük vízzel. Hány deciliter víz lesz a tölcsérben? (*6 pont*) *b*) Mekkora egy tölcsér tömege, ha a falvastagsága mindenhol 1 milliméter, a műanyag sűrűsége 0,92 $\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$? A műanyag térfogatának kiszámításához használjuk azt a közelítést, amely szerint a tölcsér belső felszínét szorozzuk a falvastagsággal. (*4 pont*)

c) Lézerfénnyel felülről függőlegesen belevilágítunk a tölcsérbe. Mekkora a valószínűsége, hogy a lézerfény a tölcsér alsó nyílásán jön ki? (*3 pont*)

d) 50 darab tölcsérből átlagosan 2 anyaghibásat készít a gyártósor. Mekkora a valószínűsége, hogy 135 darab elkészített tölcsér között van anyaghibás? A választ négy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*3 pont*)

8. *a*) Sheldon Cooper kedvenc száma a 73, mert ez a 21. prím és $7 \cdot 3$ éppen 21. Sőt, a 73 kettes számrendszerbeli alakja palindromszám, vagyis visszafelé olvasva az eredetivel azonos. Igazoljuk ez utóbbi kijelentést. (*2 pont*)

b) Egy adott alapú, és az ennél 2-vel nagyobb alapú számrendszerben tekintsük a $\overline{345}$ alakú háromjegyű számokat, ezek összege 696_{10}. Adjuk meg az összeadandó számok értékét a 10-es számrendszerben felírva. (*8 pont*)

c) Véletlenszerűen kiválasztunk egy 10-es számrendszerbeli háromjegyű számot. Mekkora a valószínűsége, hogy a szám 9-es számrendszerbeli alakja is háromjegyű? (*6 pont*)

9. *a*) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a következő A ponthalmazt:

$$A = \big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x + 3y \geqslant 15\big\}. \qquad (\textit{3 pont})$$

b) Ábrázoljuk koordinátarendszerben a B ponthalmazt:

$$B = \big\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 14x - 8y + 40 \leqslant 0\big\}. \qquad (\textit{5 pont})$$

c) Igazoljuk, hogy az $F(-3;-4)$ fókuszpontú $v:\ y=-6$ vezéregyenesű parabola egyenlete $y = 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 2{,}75$. (*4 pont*)

d) Írjuk fel a $y = 0{,}25x^2 + 1{,}5x - 2{,}75$ parabola $(-1;-4)$ pontjába húzott érintőjének egyenletét. (*4 pont*)

Jócsik Csilla
Győr

Megoldásvázlatok a 2022/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

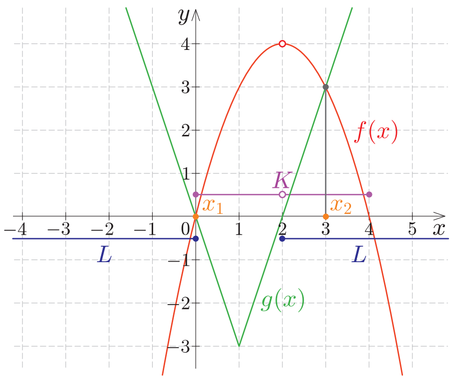
I. rész

1. *Adott az* $f(x) = \frac{(x^2-4x)(2-x)}{x-2}$ *függvény, amelynek értelmezési tartománya* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, *és a* $g(x) = 3|x-1| - 3$ *függvény, amelynek értelmezési tartománya* $D_g = \mathbb{R}$.

a) *Oldjuk meg az* $f(x) = g(x)$ *egyenletet.*

A K és L halmazokat értelmezzük a következőképpen: $K := \{x \mid x \in D_f$ és $f(x) \geqslant 0\}$; $L := \{x \mid x \in D_g$ és $g(x) \geqslant 0\}$.

b) Adjuk meg a $K \cap L$, $K \setminus L$ és $(K \cup L) \setminus K$ halmazokat. (*12 pont*)



Megoldás. *a)* Ábrázolva a függvényeket, leolvassuk a metszéspontok abszcisszáit, amelyek az egyenlet megoldásai: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$.

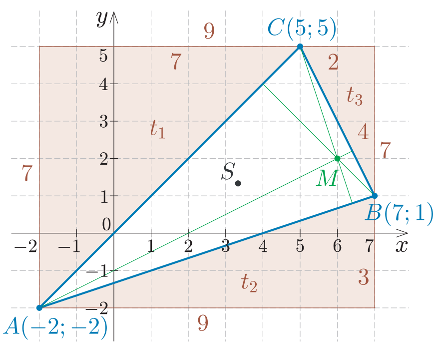
Ellenőrzés: $f(0) = g(0)$; $f(3) = g(3)$. Az algebrai megoldás is a fenti eredményekhez vezet.

b) Szintén az *ábráról* adódik a K és az L halmaz, $K \cap L = \{0\} \cup]2; 4]$, illetve $K \setminus L =]0; 2[$. Mivel $K \cup L = \mathbb{R}$, ezért $(K \cup L) \setminus K = \overline{K}$, amelyből $\overline{K} =]-\infty; 0[\cup \{2\} \cup]4; +\infty[$.

2. *Egy háromszög csúcsai: $A(-2; -2)$, $B(7; 1)$, $C(5; 5)$.*

a) Mekkora a háromszög területe?

b) Számítsuk ki a háromszög súlypontja és magasságpontja távolságának pontos értékét. (*12 pont*)



Megoldás. *a)* Ábrázoljuk a pontokat, majd foglaljuk téglalapba a háromszöget.

A téglalap oldalai 7 és 9 egység hosszúak, területe 63 területegység. A háromszög körül levágott derékszögű háromszögek területe: bal felsőé $t_1 = \frac{49}{2}$; jobb alsóé $t_2 = \frac{27}{2}$; jobb felsőé $t_3 = 4$, ezért a háromszög területe

$$T = 63 - (t_1 + t_2 + t_3) = 21.$$

b) A súlypont koordinátái:

$$S\left(\frac{-2+7+5}{3}; \frac{-2+1+5}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}; \frac{4}{3}\right).$$

Az m_c egyenesének egyenlete: $\overrightarrow{AB}(9; 3) \Longrightarrow \mathbf{n}(3; 1)$, így $3x + y = 20$; az m_b egyenes egyenlete: $\overrightarrow{AC}(7; 7) \Longrightarrow \mathbf{n}'(1; 1)$, tehát $x + y = 8$.

A két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása a magasságpont koordinátáit adja meg, amely $M(6; 2)$, tehát az SM távolság:

$$\sqrt{\left(6 - \frac{10}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{17}}{3}.$$

3. *a) Határozzuk meg az alábbi kijelentések logikai értékét, állításainkat indokoljuk.*

A) Minden pozitív egész számra teljesül, hogy az összes pozitív osztójának átlaga kisebb a szám felénél.

B) Van olyan n csúcsú teljes gráf, amelynek háromszor annyi éle van, mint az n csúcsú fagráfnak.

b) Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását: „Ha P és Q, akkor nem R."

c) Tegyük fel, hogy „Ha P és Q, akkor nem R." Igaz-e most a „Ha R, akkor nem P és nem Q." állítás? Válaszunkat indokoljuk. (*13 pont*)

Megoldás. *a*) A) Hamis. Legyen mondjuk a szám a 2, amelynek pozitív osztói az 1 és a 2, ezek átlaga $\frac{3}{2}$, amely nagyobb, mint a szám fele. (Bármely prímszám esetén hasonló a helyzet.)

B) Igaz. A 6 csúcsú teljes gráfnak 15 éle van, míg a 6 csúcsú fagráfnak 5. A 15 éppen háromszorosa az 5-nek.

b) Az állítás megfordítása: „Ha nem R, akkor P és Q."

c) Hamis. Igaz akkor volna, ha „Ha R, akkor nem (P és Q)." lenne, amely egyenértékű a „Ha R, akkor nem P vagy nem Q." állítással (De Morgan azonosság).

4. *A* 32 *lapos magyar kártya egyik legérdekesebb játéka az ulti. (A magyar kártyában a színek: makk, piros, tök, zöld; színenként ász, király, felső, alsó,* 10*-es,* 9*-es,* 8*-as és* 7*-es alkotja a* 32 *lapot.) Ha pl. Bélának a játék elején leosztott* 10 *lapjából egy ötlapos piros ultija van, ez azt jelenti, hogy nála van a piros hetes és még négy piros, továbbá öt másik, nem piros lap.*

a) Mennyi a valószínűsége, hogy Bélának ötlapos piros ultit osztottak a játék elején?

Képzeljük el, hogy 10 *jól megkevert magyar kártyacsomag van előttünk és mindegyikről levesszük a legfelső lapot.*

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 *lapból pontosan* 5 *piros?*

c) Ha az előbbi húzáskor öt piros lapot húztunk, mennyi a valószínűsége, hogy közöttük legalább egy hetes van?

Minden végeredményt négy tizedesjegyre kerekítve adjunk meg. (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A piros hetes mellé a maradék hét pirosból kell még négy, ezt $\binom{7}{4}$-féleképpen tudjuk kiválasztani, majd a 24 nem piros lapból ötöt $\binom{24}{5}$-féleképpen választhatunk hozzá, így a kedvező esetek száma:

$$k=\binom{7}{4}\cdot\binom{24}{5}=1\,487\,640;$$

az összes eset száma pedig: $n=\binom{32}{10}=64\,512\,240$, ezért az esemény valószínűsége:

$$P(A)=\frac{1\,487\,640}{64\,512\,240}=0{,}0231.$$

b) Egy csomagban 8 piros lap van, ezért egyet húzva $\frac{1}{4}$ annak esélye, hogy a kihúzott lap piros, és $\frac{3}{4}$, hogy nem piros, így a keresett valószínűség:

$$P(B) = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0{,}0584.$$

c) Egyszerűbb kiszámolni az esemény komplementerét. Annak a valószínűsége, hogy az öt piros egyike sem a hetes:

$$\left(\frac{7}{8}\right)^5 = 0{,}5129,$$

így $P(C) = 1 - 0{,}5129 = 0{,}4871$.

II. rész

5. *a*) *Vizsgáljuk meg monotonitás és korlátosság szempontjából az*

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

sorozatot.

b) *Határozzuk meg* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *határértékét, ha* $n \to +\infty$.

c) *Mennyi az* x*, ha a* b_n *sorozatról a következőket tudjuk:* $b_n = \frac{n^2}{2} + x \cdot n$ $(x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+)$, *valamint* $(b_{n+1} - b_n)^2 = b_n + b_{n+1}$*?* *(16 pont)*

Megoldás. *a*) A sorozat szigorúan monoton növekvő, azaz minden n-re $a_{n+1} > a_n$. Nézzük az $a_{n+1} - a_n$ különbséget:

$$\frac{(n+1)^2 + 3(n+1) + 2}{2} - \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = n + 2 > 0,$$

ezzel a monotonitásra vonatkozó megállapításunkat igazoltuk. A sorozat alulról korlátos, minden tagja pozitív, egy alsó korlátnak jó pl. a 0 is. (Legnagyobb alsó korlátja az $a_1 = 3$.) Felülről nem korlátos, azaz minden $K > 0$-hoz található n_0 (küszöbindex), hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n > K$ teljesül. Egy becsült küszöbindexet adunk meg: $n < n^2$, ha $n \geqslant 2$, ezért $\frac{n+3n}{2} < a_n$; $2n < a_n$, $2n > K$; $n > \frac{K}{2} \ \to \ n_0 = \left[\frac{K}{2}\right]$.

Megjegyzés: Az „éles” küszöbindex $n_0 = \left[\dfrac{\sqrt{8K+1} - 3}{2}\right]$.

b)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 5n + 6}{n^2 + 3n + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}},$$

tanult tétel: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ezt, és a konvergens sorozatok határértékére vonatkozó ismereteket felhasználva:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Megoldhatjuk a feladatot közvetlenül a definíció alapján vagy a „rendőrelv” segítségével is.

$$c)\qquad \left[\frac{(n+1)^2}{2}+x(n+1)-\frac{n^2}{2}-xn\right]^2=\frac{n^2}{2}+xn+\frac{(n+1)^2}{2}+x(n+1);$$

$$\left(n+x+\frac{1}{2}\right)^2=n^2+2xn+n+x+\frac{1}{2};$$

$$n^2+x^2+\frac{1}{4}+2nx+x+n=n^2+2nx+n+x+\frac{1}{2},$$

amelyből rendezés után: $x^2=\frac{1}{4}\ \to\ x_1=\frac{1}{2};\ x_2=-\frac{1}{2}$. A kapott két sorozat: $b_n=\frac{n^2+n}{2}$, ha $x=\frac{1}{2}$, vagy $b_n=\frac{n^2-n}{2}$, ha $x=-\frac{1}{2}$.

Megjegyzés: mindhárom sorozat a háromszögszámok sorozata, csak a kezdőelemben különböznek:

$\{a_n\}=3,6,10,15,21,\ldots;\quad \{b_n\}_1=1,3,6,10,15,21\ldots;\quad \{b_n\}_2=0,1,3,6,10,15,21\ldots.$

6. *a) Milyen számjeggyel kezdődik a* 16^{2022} *a tízes számrendszerben felírva és mi az utolsó két számjegye?*

b) Igazoljuk, hogy $2^{2023}+1$ *osztható* 43*-mal.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Meghatározzuk a szám normálalakját:

$$16^{2022}=A\cdot 10^n;$$

$$\lg 16^{2022}=\lg(A\cdot 10^n);$$

$$2022\cdot\lg 16=\lg A+n,$$

$$2434{,}730\,605=\lg A+n,$$

amelyből $n=2434$ és $\lg A=0{,}730\,605$. Az előzőek alapján $A=10^{0{,}730\,605}\approx 5{,}38$, tehát $16^{2022}\approx 5{,}38\cdot 10^{2434}$, azaz a szám első jegye 5. A 16 pozitív egész kitevőjű hatványainak utolsó számjegye mindig 6, az utolsó előtti pedig periodikusan ismétlődik a következő szabály szerint: $16^{5k}=\ldots 76$, $16^{5k+1}=\ldots 16$, $16^{5k+2}=\ldots 56$, $16^{5k+3}=\ldots 96$ és $16^{5k+4}=\ldots 36$, $k\in\mathbb{Z}^+$. Mivel $2022=5\cdot 404+2$, ezért a 16^{2022} szám 56-ra végződik.

b) $2023=7\cdot 17^2=7\cdot 289$, tehát

$$2^{2023}+1=\left(2^7\right)^{289}+1^{289}=128^{289}+1^{289}=$$
$$=(128+1)(128^{288}-128^{287}\ldots\pm\ldots-128+1)=129\cdot(\text{egész szám})=$$
$$=3\cdot 43\cdot(\text{egész szám}),$$

ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés: itt az $a^n+b^n=(a+b)\big(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2\ldots\pm\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}\big)$ azonosságot használtuk, ahol n pozitív páratlan szám.

7. *Két középiskola sakkbajnokságot rendezett úgy, hogy a versenyzők először a saját iskolájukon belül lebonyolított háziversenyen vettek részt, melynek során mindenki mindenkivel egy partit játszott. Ezután került sor az iskolák egymás elleni küzdelmére, ahol minden versenyző a másik iskola mindegyik versenyzőjével egy mérkőzést vívott. Az egymás elleni mérkőzések száma éppen annyi volt, mint a két háziversenyen összesen.*

a) Iskolánként hányan vettek részt a bajnokságban, ha az egyikben kétszer annyian indultak, mint a másikban?

Két rivális asztalitenisz csapat úgy dönti el, melyikük a jobb, hogy kiválasztják saját maguk közül a legjobbat, majd a két legjobb megküzd egymással a címért. A csapaton belüli kiválasztás ún. egyenes kieséses rendszerben történik, amelyben minden forduló előtt párokba sorsolják a résztvevőket. A pár játszik egy mérkőzést, a győztes továbbjut a következő fordulóba, a vesztes kiesik. Akinek a sorsoláskor nem marad pár, mérkőzés nélkül jut a következő fordulóba. A pingpongban nincs döntetlen, az utolsó mérkőzés győztese lesz a csapat legjobbja. Összesen 24 mérkőzést játszottak, mire kiderült, hogy melyik csapat lett a győztes.

b) Hány játékos nevezett a versenyre az egyik, illetve a másik csapatból, ha az egyikben öttel kevesebben voltak, mint a másikban? *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Tegyük fel, hogy az egyik iskolából n, a másikból $2n$ tanuló nevezett a versenyre. Az első iskola háziversenyén $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, míg a másodikban $\binom{2n}{2}=\frac{2n(2n-1)}{2}$ mérkőzés volt, az egymás elleni partik száma pedig $n\cdot 2n$, így felírhatjuk az

$$\frac{n(n-1)}{2}+\frac{2n(2n-1)}{2}=2n^2,\quad n\in\mathbb{Z}^+$$

egyenletet. Rendezve $n^2-3n=0$, ahonnan $n=3$. Az egyik iskolából hárman, a másikból hatan vettek részt a bajnokságban.

Ellenőrzés: $\binom{3}{2}=3$ és $\binom{6}{2}=15$, így $3+15=3\cdot 6$.

b) Először belátjuk, hogy az egyenes kieséses bajnokságban n induló esetén $n-1$ mérkőzést játszanak, mire megkapják a győztest. Létesítsünk kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést egy adott meccs vesztese és a mérkőzés között. Minden mérkőzésnek egy és csak egy vesztese van, minden kieső játékos pontosan egy mérkőzésen vesztett, tehát, ha minden veszteshez hozzárendeljük azt a mérkőzést, amelyiken kikapott, létrehoztuk a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést. Mivel a győztesen kívül mindenki vesztes, ezért $n-1$ vesztes, azaz $n-1$ mérkőzés volt a bajnokságban. Ezek után jelöljük az egyik csapat létszámát $(x-5)$-tel, a másikét x-szel, ekkor az egyik csapat háziversenyén $(x-5)-1$, a másikén $x-1$ mérkőzést játszottak, ha ezek összegéhez hozzáadunk 1-et (a döntőt), akkor megkapjuk a bajnokságban összesen lejátszott mérkőzések számát. $(x-6)+(x-1)+1=24$; ebből $x=15$, tehát az egyik csapat 10, a másik 15 játékossal vett részt a bajnokságban.

Ellenőrzés: $9+14+1=24$.

8. *Egy számtani sorozat első öt tagjának összege* 30; *a sorozat első, második és negyedik tagja egy mértani sorozat három szomszédos eleme.*

a) Mennyi a számtani sorozat első tagja és különbsége?

Egy mértani sorozat tagjaira fennáll, hogy $a_1+a_3+a_5=182$ *és* $a_2+a_4=-60$.

b) Határozzuk meg a sorozat első tagját és hányadosát. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A sorozat harmadik tagja legyen x, ekkor a tagok rendre $x-2d$; $x-d$; x; $x+d$; $x+2d$, összegük $5x=30$, tehát $x=6$. A $6-2d$; $6-d$; $6+d$ egy mértani sorozat egymást követő tagjai, ezért $(6-d)^2=(6-2d)(6+d)$, ebből rendezés után $3d(d-2)=0$ következik, ahonnan $d_1=0$; $d_2=2$. Az első esetben $a_1=6$, a másodikban $a_1=2$.

Ellenőrzés: a számtani sorozat első öt tagja: $6;6;6;6;6$, illetve $2;4;6;8;10$.

b) $a_1+a_1q^2+a_1q^4=182$ és $a_1q+a_1q^3=-60$. Ekkor

$$\frac{a_1(1+q^2+q^4)}{a_1(q+q^3)}=-\frac{182}{60},$$

amelyből rendezés után az

$$30q^4+91q^3+30q^2+91q+30=0$$

negyedfokú egyenletet kapjuk. Ezt visszavezethetjük másodfokúra, ha mindkét oldalát elosztjuk a nem nulla q^2-nal:

$$30\left(q^2+\frac{1}{q^2}\right)+91\left(q+\frac{1}{q}\right)+30=0.$$

Legyen $q+\frac{1}{q}=A$, ekkor

$$A^2=q^2+2q\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2},\quad \text{azaz}\quad q^2+\frac{1}{q^2}=A^2-2.$$

Az egyenlet:

$$30(A^2-2)+91A+30=0,\quad 30A^2+91A-30=0.$$

$A_{1,2}=\frac{-91\pm109}{60}$, $A_1=q+\frac{1}{q}=-\frac{10}{3}$ és $A_2=q+\frac{1}{q}=\frac{3}{10}$. Ez utóbbinak nincs valós gyöke, az elsőből pedig $q_1=-3$ és $q_2=-\frac{1}{3}$ származik. A sorozat első tagja $a_{11}=2$ vagy $a_{12}=162$.

Ellenőrzés. Az egyik sorozat $2;-6;18;-54;162$, a másik ugyanez, fordított sorrendben. Ekkor $2+18+162=182$; $-6+(-54)=-60$.

9. *Az ABCD téglalap átlói* 30°*-os szöget zárnak be egymással.*

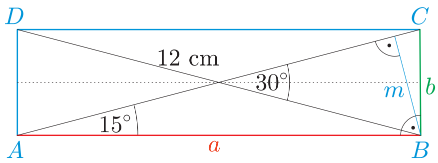
a) Mekkora az AB és BC oldal, ha AC = 12 cm?

b) Milyen messze van a B csúcs az AC átlótól?

Egy $KLMN$ téglalap LN átlója a téglalapot két derékszögű háromszögre bontja. A KLN háromszög K-ból induló magassága, belső szögfelezője és súlyvonala legyen rendre m, f, s.

c) Mekkora szöget zár be egymással az LN átló és a KL oldal, ha $3f^2 = 2ms$?

(16 pont)

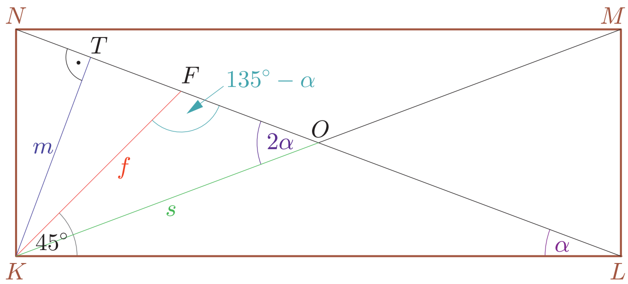


Megoldás. *a)* Az ABC derékszögű háromszögben a $CAB\sphericalangle = 15°$, ezért $\sin 15° = \frac{b}{12}$ és $\cos 15° = \frac{a}{12}$, amelyekből $a = 11{,}59$ cm; $b = 3{,}11$ cm.

b) Az átlók felezik egymást, tehát a félátló 6 cm. Az átlók metszéspontja, a B pont és az m szakasz AC-re eső végpontja egy olyan derékszögű háromszöget alkot, amelynek az m-mel szemközti hegyesszöge 30°, így $\sin 30° = \frac{m}{6} \to m = 3$ cm. A B pont 3 cm-re van az AC átlótól.

c) Az OTK derékszögű háromszögben $\sin 2\alpha = \frac{m}{s}$, $m = s \cdot \sin 2\alpha$. Az OFK háromszögben írjuk fel a szinusztételt:

$$\frac{f}{s} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(135° - \alpha)} \implies f = s \cdot \frac{\sqrt{2}\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha},$$



majd helyettesítsük be ezeket a feladatban megadott képletbe:

$$3 \cdot \left(s\frac{\sqrt{2}\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} \right)^2 = 2 \cdot s \cdot \sin 2\alpha \cdot s,$$

$$\frac{3\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = 1,$$

$$3\sin 2\alpha = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha,$$

$$3\sin 2\alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

Rendezve: $2\sin 2\alpha = 1$, $\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \to 2\alpha = 30°$, $\alpha_1 = 15°$, vagy $2\alpha = 150°$, $\alpha_2 = 75°$. Az LN átló a KL oldallal 15°-os vagy 75°-os szöget zár be.

Németh László
Fonyód

Matematika feladatok megoldása

B. 5109. *Legyen*

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 7, \quad x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Van-e négyzetszám ebben a sorozatban?

(*6 pont*)

Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Canada)

Megoldás. Próbáljunk meg közvetlen képletet adni a sorozat tagjaira. Ehhez először keressük a rekurzió megoldását $x_n = q^n$ alakban. Ekkor a megadott képlet szerint

$$q^n = 4q^{n-1} - q^{n-2},$$
$$q^{n-2}(q^2 - 4q + 1) = 0.$$

Mivel $q \neq 0$, ezért a $q^2 - 4q + 1 = 0$ egyenlet gyökeire lesz szükségünk. (Azt szoktuk mondani, hogy a sorozat karakterisztikus polinomja* $x^2 - 4x + 1$.) A polinom gyökei $2 + \sqrt{3}$ és $2 - \sqrt{3}$, tehát az $x_n = 4x_{n-1} - x_{n-2}$ rekurziót az $x_n = \left(2 + \sqrt{3}\right)^n$ és az $x_n = \left(2 - \sqrt{3}\right)^n$ sorozatok is kielégítik, és ezek bármilyen lineáris kombinációja: $x_n = a\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + b\left(2 - \sqrt{3}\right)^n$, ahol a és b értéke tetszőleges. Nekünk azonban adott a sorozat első két eleme is, tehát nem minden a és b érték lesz megfelelő. Keressük meg a megfelelő a, b értékeket.

A rekurziót visszafelé alkalmazva adódik, hogy $x_0 = 1$, így $1 = a + b$. Mivel $x_1 = 2$, $2 = a\left(2 + \sqrt{3}\right) + b\left(2 - \sqrt{3}\right) = 2(a + b) + \sqrt{3}(a - b) = 2 + \sqrt{3}(1 - 2b)$, így $0 = \sqrt{3}(1 - 2b) \;\Rightarrow\; b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Tehát a sorozat n-edik eleme

$$x_n = \frac{1}{2}\Big(\left(2 + \sqrt{3}\right)^n + \left(2 - \sqrt{3}\right)^n\Big).$$

A rövidség kedvéért innentől legyen $\alpha = 2 + \sqrt{3}$, $\beta = 2 - \sqrt{3}$. Megjegyezzük, hogy $\alpha\beta = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 1$. A sorozat elemeire kapott képlet szerint:

$$x_{3k} = \frac{\alpha^{3k} + \beta^{3k}}{2} = \frac{\left(\alpha^k\right)^3 + \left(\beta^k\right)^3}{2} = \frac{\left(\alpha^k + \beta^k\right)\left(\alpha^{2k} - \alpha^k\beta^k + \beta^{2k}\right)}{2} =$$
$$= \frac{\alpha^k + \beta^k}{2} \cdot \left(\alpha^{2k} - 1 + \beta^{2k}\right) = x_k \cdot (2x_{2k} - 1).$$

* Lásd a *Megjegyzést* a megoldás végén.

Megmutatjuk, hogy itt

$$(x_k, 2x_{2k} - 1) = 1: \tag{1}$$

$$(x_k, x_{2k} - 1) \mid (2x_k, 2x_{2k} - 1) = \left(\alpha^k + \beta^k, \alpha^{2k} - \alpha^k\beta^k + \beta^{2k}\right),$$

így

$$\begin{aligned} &(x_k, x_{2k} - 1) \mid \left((\alpha^k + \beta^k)^2, \alpha^{2k} - \alpha^k\beta^k + \beta^{2k}\right) = \\ &= \left(\alpha^{2k} + 2\alpha^k\beta^k + \beta^{2k}, \alpha^{2k} - \alpha^k\beta^k + \beta^{2k}\right) = \\ &= \left(3\alpha^k\beta^k, \alpha^{2k} - \alpha^k\beta^k + \beta^{2k}\right) = \left(3, \alpha^{2k} - \alpha^k\beta^k + \beta^{2k}\right) = (3, 2x_{2k} - 1). \end{aligned}$$

Tehát ez a legnagyobb közös osztó 1 vagy 3 lehet. Megmutatjuk, hogy nem lehet 3. A sorozat elemeinek mod 3 maradéka a következő mintát mutatja (x_0-val kezdve): $1; 2; 1; 2; \ldots$. Ez a ciklus örökké ismétlődik, mert a sorozat rekurzív. Vagyis x_{2k}-nak a 3-as maradéka mindig 1, tehát $2x_{2k} - 1 \equiv 1 \pmod 3$. Ezzel beláttuk (1)-et.

Ha van négyzetszám a sorozatban, akkor annak a sorszáma biztosan osztható 3-mal. Tekintsük ugyanis a sorozatot mod 5: $1; 2; 2; 1; 2; 2; 1; 2; 2; \ldots$. A sorozat rekurzivitása miatt ez a ciklus örökké folytatódik. Azonban egy négyzetszám 5-tel osztva csak 0, 1 vagy 4 maradékot adhat.

Tegyük fel, hogy a sorozatban legelőször szereplő négyzetszám az x_{3m}. Ekkor $x_{3m} = x_m \cdot (2x_{2m} - 1)$. De a szorzat két tényezője (1) miatt relatív prím, így muszáj, hogy külön-külön is négyzetszámok legyenek. Ekkor x_m is négyzetszám, ami ellentmond a fenti feltevésünknek.

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. Nem nehéz belátni a következőt. Tegyük föl, hogy egy $(x_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ sorozatot az

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + a_{k-2}x_{n+k-2} + \ldots + a_0x_n$$

lineáris rekurzióval (és első k elemének megadásával) definiálunk, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ adott konstansok. Ha az $x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \ldots - a_0$ polinomnak (a rekurzióhoz tartozó karakterisztikus polinomnak) k különböző gyöke van: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, akkor léteznek olyan $c_1, c_2, \ldots, c_k$ konstansok, amelyekkel a sorozat t-edik elemét (minden t-re) az explicit $x_t = c_1\beta_1^t + c_1\beta_1^t + c_2\beta_2^t + \ldots + c_k\beta_k^t$ alakban kaphatjuk meg.

28 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 6 versenyző: Baski Bence, Füredi Erik Benjámin, Lengyel Ádám, Lovas Márton, Seres-Szabó Márton, Tiderenczl Dániel. 4 pontos 1, 3 pontos 3, 2 pontos 14, 1 pontos 3, 0 pontos 1 dolgozat.

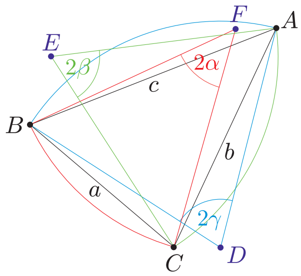
B. 5226. *Egy háromszög mindhárom oldalának hossza legfeljebb 2 egység. Minden csúcspárt összekötünk egy-egy olyan körívvel, amely egy-egy egységsugarú körnek a félkörnél nem hosszabb íve. Igazoljuk, hogy*

$$a' + b' > 2c'/3,$$

ahol a', b', c' a körívek hosszát jelöli.

(*5 pont*)

I. megoldás. Az egységsugarú körben nagyobb húrhoz nagyobb ív tartozik, ezért ha a háromszögben a vagy b nagyobb, mint c, akkor az egyenlőtlenség nyilván teljesül. Feltehető tehát – az egyenlőtlenség a'-re és b'-re, és így a-ra és b-re való szimmetriája miatt –, hogy $a \leqslant b \leqslant c$.



Használjuk az *ábra* jelöléseit és legyen az A és B csúcsokhoz tartozó körív középpontja D, az A és C csúcsokhoz tartozóé E, végül a B és C csúcsokhoz tartozóé F. Legyen a $BFC\sphericalangle = 2\alpha$, ahol $0 < 2\alpha \leqslant 2\pi$. Ekkor a BFC egyenlő szárú háromszögben ($BF = FC = R = 1$) az F-ből induló magasságot behúzva két egybevágó, derékszögű háromszöget kapunk, melyekben $\sin\alpha = \frac{a/2}{BF} = a/2$, amiből $a = 2\sin\alpha$ következik. Hasonlóan $b = 2\sin\beta$ és $c = 2\sin\gamma$.

A háromszög-egyenlőtlenség miatt tudjuk, hogy $a + b > c$. Ebbe behelyettesítve a kapott értékeket: $2\sin\alpha + 2\sin\beta > 2\sin\gamma$, tehát $\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma$. Mivel az egységsugarú körben nagyobb húrhoz nagyobb középponti szög tartozik, ezért $2\alpha \leqslant 2\beta \leqslant 2\gamma$ és így $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Az egységsugarú kör kerülete 2π. A P és Q végpontok közé húzott O középpontú rövidebb körív hosszát a POQ szög segítségével számíthatjuk ki:

$$\text{ív hossza} = \text{kerület} \cdot \frac{POQ\sphericalangle}{2\pi},$$

hiszen 2π a teljes szög. Így az a' ív hossza

$$2\pi \cdot \frac{BFC\sphericalangle}{2\pi} = 2\alpha.$$

Ugyanígy a b' ív hossza $AEC\sphericalangle = 2\beta$, valamint a c' ív hossza $ADB\sphericalangle = 2\gamma$. Így a bizonyítandó állítás a következővel ekvivalens:

$$2\alpha + 2\beta > 2/3 \cdot 2\gamma.$$

Osztva 2-vel azt kapjuk, hogy $\alpha + \beta > 2/3 \cdot \gamma$.

Mivel $\pi/2 \geqslant \gamma$, ezért $\alpha + \beta > \pi/3$ esetén biztosan teljesül az egyenlőtlenség. Így elég azt az esetet vizsgálni, amikor $\alpha + \beta \leqslant \pi/3$.

Jelöljük innentől kezdve $(\alpha + \beta)$-t 2φ-vel, $0 < 2\varphi \leqslant \pi/3$. Így azt kell belátnunk, hogy $2\varphi > 2/3 \cdot \gamma$, azaz $3\varphi > \gamma$. Mivel a $[0, \pi/2]$ intervallumon a szinusz függvény szigorúan monoton nő és 3φ és γ is ezen az intervallumon belül van, ezért ez az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, amikor a $\sin(3\varphi) > \sin\gamma$ egyenlőtlenség.

Ha belátjuk, hogy $\sin(3\varphi) > 2\sin\varphi$ és $2\sin\varphi > \sin\gamma$ is fennáll, akkor kész vagyunk.

Lássuk be először, hogy $2\sin\varphi > \sin\gamma$. Beláttuk már, hogy $\sin\alpha + \sin\beta > \sin\gamma$ és mivel a $[0, \pi/2]$ intervallumon a szinusz függvény konkáv, ezért a Jensen-egyenlőtlenség miatt $2\sin\big((\alpha + \beta)/2\big) \geqslant \sin\alpha + \sin\beta$, hiszen α és β ebbe az intervalluma tartozik. Emiatt azt is biztosan tudjuk, hogy $2\sin\big((\alpha + \beta)/2\big) > \sin\gamma$, ahol $\alpha + \beta$ helyére (2φ)-t beírva $2\sin\varphi > \sin\gamma$.

Most pedig lássuk be, hogy $\sin\big(3\varphi\big) \geqslant 2\sin\varphi$, ha teljesülnek φ-re a feltételek, azaz $0 < \varphi \leqslant \pi/6$. Az addíciós tételekből $\sin(3\varphi) = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, amit az egyenlőtlenségbe beírva $3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi \geqslant 2\sin\varphi$. Ezt átrendezve: $\sin\varphi \geqslant 4\sin^3\varphi$, amit $\sin\varphi > 0$-val egyszerűsítve $1 \geqslant 4\sin^2\varphi$. Most gyököt vonva mindkét oldalból azt kapjuk, hogy $1 \geqslant 2\sin\varphi$, ami $0 < \varphi \leqslant \pi/6$ esetén igaz, hiszen $\pi/6$-nál egyenlőség áll fenn, 0-tól $\pi/6$-ig pedig a szinusz függvény szigorúan monoton nő. Ezzel beláttuk, hogy $\sin(3\varphi) \geqslant 2\sin\varphi$.

Tehát $\sin(3\varphi) > 2\sin\varphi$ és $2\sin\varphi > \sin\gamma$ is igaz, vagyis $\sin(3\varphi) > \sin\gamma$. Így mindig teljesül az $\alpha + \beta > 2/3 \cdot \gamma$ egyenlőtlenség, azaz $a' + b' > 2/3 \cdot c'$. Beláttuk az állítást, $a' + b' > 2c'/3$.

(A feladat feltétele, hogy a háromszög oldalai legfeljebb 2 egység hosszúak, csak arra kellett, hogy tudjuk, hogy létezik minden oldalhoz egység sugarú körív.)

Móricz Benjámin (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

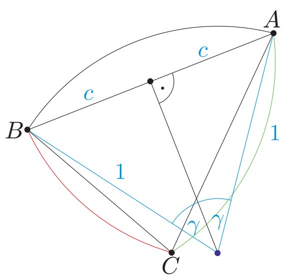
II. megoldás. Először is idézzük fel, hogy az arkuszszinusz függvény* a $[0,1]$ intervallumon konvex, azaz bármely $x_1, x_2 \in [0,1]$ esetén

$$\frac{\arcsin x_1 + \arcsin x_2}{2} \geqslant \arcsin\frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Másodszor megmutatjuk, hogy $\arcsin x \geqslant \arcsin(2x)/3$ minden $0 < x \leqslant 1/2$ esetén. A $0 < x \leqslant 1/2$ feltételből azonnal következik, hogy $x \geqslant 4x^3$. Ebből $3x - 4x^3 \geqslant 2x$, és felhasználva a jól ismert $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$ azonosságot kapjuk, hogy

$$\sin(3\arcsin x) = 3\sin(\arcsin x) - 4\big(\sin(\arcsin x)\big)^3 = 3x - 4x^3 \geqslant$$
$$\geqslant 2x = \sin(\arcsin 2x).$$

Mivel az arkuszszinusz szigorúan monoton növő, így $3\arcsin x \geqslant \arcsin 2x$ következik, ahogy állítottuk.



Ezután rátérünk a feladat megoldására. Legyenek az oldalak rendre $2a$, $2b$ és $2c$, és tegyük fel, hogy a berajzolt körívek hossza rendre 2α, 2β és 2γ, azaz az oldalak a körívek középpontjaiból rendre 2α, 2β és 2γ szög alatt látszanak (ha a középpont illeszkedik valamely oldalra, akkor a megfelelő látószög π). Ekkor

$$\sin\alpha = a; \quad \sin\beta = b; \quad \sin\gamma = c.$$

Így a bizonyítandó $2\alpha + 2\beta > 4\gamma/3$ állítás az

$$\arcsin a + \arcsin b > \frac{2}{3}\arcsin c$$

* https://hu.wikipedia.org/wiki/Szögfüggvények#Inverz_függvények

ekvivalens alakban írható. Felhasználva az $a+b>c$ háromszög-egyenlőtlenséget, valamint az arkuszszinusz függvény már említett szigorú monotonitását és konvexitását adódik, hogy

$$\arcsin a+\arcsin b\geqslant 2\arcsin\left(\frac{a+b}{2}\right)>2\arcsin\left(\frac{c}{2}\right)\geqslant\frac{2}{3}\arcsin c,$$

ahol az utolsó becslésnél a második előrebocsájtott észrevételünket használtuk (valamint a $0<c/2\leqslant 1/2$ nyilvánvalóan teljesülő összefüggést). Ezzel az állítást beláttuk.

29 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 17 versenyző: Bényei Borisz, Chrobák Gergő, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Farkas Izabella, Fazokán Marcell, Kalocsai Zoltán, Lovas Márton, Mohay Lili Veronika, Móricz Benjámin, Nagy Levente, Németh Márton, Szakács Ábel, Szanyi Attila, Tarján Bernát, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 4 pontos 1, 3 pontos 2, 2 pontos 3, 1 pontos 3, 0 pontos 3 dolgozat.

B. 5244. *Határozzuk meg azokat az $n>4$ egész számokat, melyekre minden n-nél kisebb k összetett számra $(k,n)>1$.*

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Ha egy ilyen n szám nagyobb p^2-nél, ahol p egy pozitív prímszám, akkor oszthatónak kell lennie p-vel, különben $(p^2;n)=1$ lenne. Mivel $n>4$, ezért biztosan páros, különben a 4-gyel relatív prím lenne.

Ha 3-mal nem osztható a keresett szám, akkor $3^2=9$-nél kisebbnek kell lennie, valamint 4-nél nagyobb és páros, ezért ez csak a 8 lehet.

Ha 3-mal is osztható a szám, de 5-tel nem, akkor $5^2=25$-nél kell kisebbnek lennie, vagyis, mivel $2\cdot 3=6$-tal osztható, ez a szám a $6;12;18$ és a 24 is lehet.

Ha a szám 5-tel is osztható, de 7-tel nem, akkor $7^2=49$-nél kisebb és $2\cdot 3\cdot 5=$ $=30$-cal osztható, vagyis csak a 30 lehet.

Ha 7-tel is osztható, de 11-gyel nem, akkor $30\cdot 7=210$-zel osztható, ugyanakkor $11^2=121$-nél kisebb, így nem kapunk megoldást, mivel ilyen pozitív szám nem létezik.

Továbbmenve sem találunk megfelelő számokat, mivel azt a számot, amellyel n-nek oszthatónak kell lennie, mindig egyre többszörösére, most például 11-szeresére növelnénk, míg a következő prímszám négyzete legfeljebb négyszerese az előzőének. Ennek belátásához felhasználjuk Csebisev tételét, miszerint egy egész szám és kétszerese között mindig van prím, vagyis a következő prím az előzőnek legfeljebb kétszerese, így a négyzete legfeljebb négyszerese az előző prímszám négyzetének, ezért nincs több megoldás. Megmutattuk, hogy csak a $6;8;12;18;24;30$ számok felelnek meg a feladat feltételeinek.

Szakács Ábel (Budapest, Jedlik Ányos Gimn., 8. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 59 dolgozat érkezett. 5 pontos 42, 4 pontos 5, 3 pontos 5, 2 pontos 4 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 1 versenyző kapott. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (739–743.)

K. 739. Fülöp a következő megfigyeléseket tette az ősz egy időszakában:

1. A megfigyelt idő alatt 11 napon esett az eső.
2. Esős délelőttöt mindig napos délután követett.
3. Összesen 9 délelőtt és 12 délután volt napos idő.

Hány napon nem esett egyáltalán?

K. 740. Egy 3×12-es téglalapot szeretnénk lefedni 12 db 1×3-as téglalappal. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?

K. 741. Induljunk ki az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ számokból. Egy lépésben kiválaszthatunk két számot, amelyeket 1-gyel megnövelünk. El lehet-e néhány lépésben érni, hogy mindegyik szám a 10-es legyen?

K/C. 742. Dani most tanulja az angol ábécét, és el is mondta az első nyolc betűjét (A, B, C, D, E, F, G, H), csak némileg rossz sorrendben. A nyolc betűből csak ötöt mondott jól (annyiadik betűként, ahányadik az ABC-ben). Hány ilyen különböző sorrendje van ennek a nyolc betűnek?

K/C. 743. Az $ABCD$ téglalap BC oldalának felezőpontja E, CD oldalának D-hez közelebbi harmadolópontja F. Az AE szakasz felezőpontja G, az EF szakasz E-hez közelebbi harmadolópontja pedig H. Hányadrésze az FGH háromszög területe az $ABCD$ téglalap területének?

❄

Beküldési határidő: 2022. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (742–743., 1738–1742.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 742. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 743. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1738. Egy természetes számot nevezzünk *kiegyensúlyozottnak,* ha tízes számrendszerben felírva éppen annyi számjegye van, ahány különböző prímosztóval rendelkezik. Például a 21 kiegyensúlyozott, de a 42 nem. Igaz-e, hogy végtelen sok *kiegyensúlyozott* szám van?

Javasolta: *Kozma Katalin Abigél* (Győr)

C. 1739. A valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán értelmezzük a következő függvényeket: $f(x)=\sqrt{x+5}$, $g(x)=\frac{-2x+8}{5}$ és $h(x)=[x+3]$. Határozzuk meg a három függvénygrafikon közös pontjainak koordinátáit ($[a]$ az a valós szám egészrészét jelenti, vagyis azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb a-nál).

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1740. Az $ABCD$ paralelogramma CD oldalán felvesszük a P belső pontot, a CD-vel párhuzamos AB oldalon a Q belső pontot. A PA és QD szakaszok metszéspontja M, a PB és QC szakaszok metszéspontja N.

Tegyük fel, hogy $MN \nparallel AB$, és MN a CD egyenesét az X, AB egyenesét az Y pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy $DX=BY$.

(*Amerikai versenyfeladat*)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1741. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlóinak metszéspontja M. Lehetséges-e, hogy az ABM, BCM, CDM, DAM háromszögek területe ebben a sorrendben egy

a) nemkonstans számtani sorozat,

b) nemkonstans mértani sorozat

közvetlen egymás utáni négy tagja?

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

C. 1742. Tekintsük a következő (a valós számok halmazának lehető legbővebb részhalmazán értelmezett) függvényeket:

$$f_0(x)=\frac{1}{1-x}, \quad \text{valamint} \quad f_n(x)=f_0\big(f_{n-1}(x)\big),$$

minden n pozitív egészre. Számítsuk ki $f_{2022}(2022)$ értékét.

(*Kanadai feladat*)

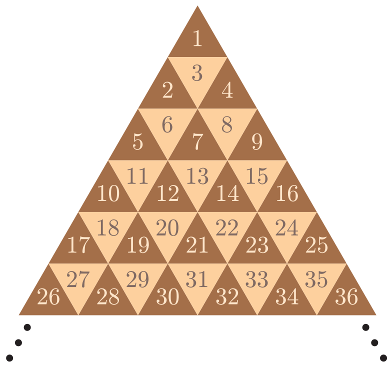
❄

Beküldési határidő: 2022. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5270–5277.)

B. 5270. n^2 darab egységnyi oldalú szabályos háromszögből egy n egység oldalú háromszöget állítottunk össze, és a kis háromszögeket felváltva sötétre és világosra színeztük. A háromszögekbe beírtuk sorban az $1, 2, 3, \ldots, n^2$ számokat az *ábra* szerint. Mennyi a sötét háromszögekbe írt számok összege?



(*3 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5271. Legyen ABC olyan egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelyben a C csúcsnál van a derékszög. Jelöljük ki az AB oldal belsejében az A', a BC oldal belsejében a B' és a CA oldal belsejében a C' pontokat úgy, hogy az $A'B'C'$ háromszög hasonló legyen az ABC háromszöghöz.

Mutassuk meg, hogy az AB oldal felezőpontja, az $A'B'$ szakasz felezőpontja és a C pont egy egyenesre esik.

(*3 pont*) Javasolta: *Hajdu Endre* (Sopron) és *Hujter Mihály* (Budapest)

B. 5272. Egy bolha a koordinátarendszer (a, b) pontjából indul, ahol a, b pozitív egészek. Egy-egy ugrással balra vagy lefele mozog egységnyit. Addig ugrál, amíg el nem éri az x vagy az y tengelyt. A lehetséges ugrássorozatok hányadrésze végződik az x tengelyen?

(*4 pont*) *Melján Dávid* (Kecskemét) ötletéből

B. 5273. Kijelöljük az ABC egyenlő oldalú háromszög AB oldalán a D, a BC oldalán pedig az E pontot úgy, hogy $BCD\sphericalangle = 45°$ és $CDE\sphericalangle = 30°$. Mutassuk meg, hogy $BE = 2AD$.

(*4 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5274. Az $a < b$ pozitív egészek szorzata négyzetszám. Mutassuk meg, hogy van olyan x pozitív egész, amelyre $a \leqslant x^2 \leqslant b$.

(*5 pont*) Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5275. Van-e olyan irracionális a szám, amelyre $a^{\sqrt{3}}$ racionális?

(*5 pont*) Javasolta: *Hujter Bálint* (Budapest)

B. 5276. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan pozitív egész k szám létezik, amelyre 2^k számjegyeinek összege

a) kisebb;

b) nagyobb,

mint 2^{k+1} számjegyeinek összege.

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

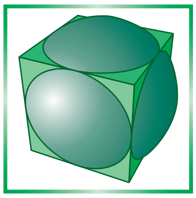
B. 5277. Az ABC háromszögbe írt kör középpontja I. A BCA körív felezőpontja F, az FI egyenes a körülírt kört másodszor az M pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a CM egyenes átmegy a beírt és a körülírt kör külső hasonlósági pontján.

(*6 pont*) Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2022. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (836–838.)

A. 836. Minden $i \in \mathbb{N}$ esetén legyen A_i, B_i és C_i három véges és páronként diszjunkt részhalmaza $\mathbb{N}$-nek. Tegyük fel, hogy $\mathbb{N}$ minden, A, B és C halmazokból álló partíciójához létezik $i \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $A_i \subset A$, $B_i \subset B$ és $C_i \subset C$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik véges $S \subset \mathbb{N}$ is, melyre $\mathbb{N}$ minden A, B és C halmazokból álló partíciójához létezik $i \in S$ úgy, hogy $A_i \subset A$, $B_i \subset B$ és $C_i \subset C$.

Javasolta: *Imolay András* (Budapest)

A. 837. Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéder minden éle érint egy G gömböt; az A_i csúcsból a G-hez húzott érintőszakasz hossza legyen a_i. Mutassuk meg, hogy

$$\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{a_i}\right)^2 > 2\left(\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{a_i^2}\right).$$

Javasolta: *Vígh Viktor* (Szeged)

A. 838. Az $X \subset \mathbb{Z}^+$ és $Y \subset \mathbb{Z}^+$ halmazokat bajtársiasnak nevezzük, ha minden pozitív egész n előáll $n = xy$ alakban, ahol $x \in X$ és $y \in Y$. Jelöljük $X(n)$-nel és $Y(n)$-nel azt, hogy az X és Y halmazoknak hány eleme van az első n pozitív egész között.

Legyen $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{R}^+$ egy tetszőleges végtelenbe tartó függvény. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan X és Y bajtársias halmazok, hogy $\frac{X(n)}{n}$ és $\frac{Y(n)}{n}$ is a 0-hoz tartanak, és tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik olyan $n\in\mathbb{Z}^+$, hogy

$$\frac{\min\big\{X(n),Y(n)\big\}}{f(n)}<\varepsilon.$$

❄

Beküldési határidő: 2022. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Informatikából kitűzött feladatok

I. 574. Egy hosszú polcon dobozok helyezkednek el sorban egymás mellett, melyeket pozitív egész számok azonosítanak. Egy robot képes arra, hogy a polcról levegyen egy dobozt, képes arra, hogy magánál tartson egy dobozt, és képes arra, hogy a polcon egy üres helyre elhelyezze a magánál tartott dobozt. Ezenkívül a robot a polc elejétől a végéig tud mozogni előre és vissza, akár úgy is, hogy dobozt hoz magával, valamint képes arra, hogy mozgás közben egy polcon lévő dobozt egy szomszédos üres helyre toljon át. A robot rendező algoritmusa a következők szerint vezérli a robotot:

1. Elindul a polc elejétől, és ha van olyan doboz, amely nagyobb azonosító számmal rendelkezik, mint az utána következő doboz, akkor azt leveszi a polcról.
2. Mozog tovább a polc vége felé, miközben tartja a kivett dobozt, és minden olyan dobozt a polc eleje felé tol a szomszédos üres helyre, amely kisebb azonosító számú, mint az a doboz, amit a kezében tart.
3. Ha talál olyan dobozt, amely nagyobb azonosító számú, mint a kezében tartott doboz, akkor azt már nem tolja a polc eleje felé, hanem az azt megelőző üres helyre leteszi a magánál tartott dobozt. Ezután visszatér a polc elejére, ahol az 1. pont szerint kezdi ismét a működését.
4. Ha a polc elejétől indulva nem talál olyan dobozt, amely nagyobb azonosító számmal rendelkezne, mint a következő doboz, akkor abbahagyja a rendezést, mivel a dobozok az azonosító számok szerint növekvő sorrendben vannak.

Készítsünk programot, amely adott dobozok esetén megadja, hogy a robotnak hányszor kell levennie dobozt a polcról, illetve hányszor kell egy hellyel odébb tolnia dobozt!

A program a *standard bemenet* első sorából olvassa be a dobozok N számát ($2 \leqslant N \leqslant 20$), majd a második sorából a dobozok azonosító számát, N darab különböző pozitív egészet. A program a *standard kimenet* egyetlen sorába írja ki, hogy hányszor kellett a robotnak a rendezés során levennie egy dobozt, illetve hányszor kellett egy szomszédos helyre odébb tolnia egy dobozt.

Példák:

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`4 / 3 6 7 4`	`2 2`
`6 / 8 4 5 9 3 1`	`6 11`
`8 / 5 6 1 9 7 3 10 2`	`12 13`

Beküldendő egy tömörített `i574.zip` állományban a program forráskódja, valamint a program rövid dokumentációja, amely tartalmazza a megoldás rövid leírását, és megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 575. Egy kiszámolóban tíz ember áll körben, és a következő szabályok szerint játszanak:

1. Először mindenki gondol egy négyjegyű egész számra. Ezután a játék menetekből áll addig, amíg valakinek 0 nem lesz a száma. Ekkor ő a kiszámoló nyertese.
2. Az első menet előtt véletlenszerűen kisorsolnak egy játékost a 10-ből, ő lesz az első menetben a „számoló”.
3. A „számoló” megnézi a számának utolsó számjegyét (legyen ez k), és számol saját magától indulva k lépést a körben előre, így kiszámolja a következő körben „számoló” játékost. Ha k értéke 0, akkor ismét ő lesz a számoló. Ezután elhagyja a saját számának utolsó jegyét, és az így kapott szám az ő száma.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		**1. játékos**	**2. játékos**	**3. játékos**	**4. játékos**	**5. játékos**	**6. játékos**	**7. játékos**	**8. játékos**	**9. játékos**	**10. játékos**
2	**1. menet**	5817	6332	8987	2139	4965	4547	8127	3720	8095	4322
3	**2. menet**	5817	6332	8987	213	4965	4547	8127	3720	8095	4322
4	**3. menet**	5817	6332	898	213	4965	4547	8127	3720	8095	4322
5	**4. menet**	5817	6332	898	213	4965	4547	8127	3720	8095	432
6	**5. menet**	5817	633	898	213	4965	4547	8127	3720	8095	432
7	**6. menet**	5817	633	898	21	4965	4547	8127	3720	8095	432
8	**7. menet**	5817	633	898	21	4965	4547	812	3720	8095	432
9	**8. menet**	5817	633	898	2	4965	4547	812	3720	8095	432
10	**9. menet**	5817	633	898	2	496	4547	812	3720	8095	432
11	**10. menet**	5817	633	898	2	496	4547	812	3720	8095	43
12	**11. menet**	5817	63	898	2	496	4547	812	3720	8095	43
13	**12. menet**	5817	63	898	2	49	4547	812	3720	8095	43
14	**13. menet**	581	63	898	2	49	4547	812	3720	8095	43
15	**14. menet**	581	63	898	2	49	4547	812	372	8095	43
16	**15. menet**	581	63	898	2	49	4547	812	37	8095	43
17	**16. menet**	581	63	898	2	49	4547	812	37	8095	4
18	**17. menet**	581	63	89	2	49	4547	812	37	8095	4
19	**18. menet**	58	63	89	2	49	4547	812	37	8095	4
20	**19. menet**	58	6	89	2	49	4547	812	37	8095	4
21	**20. menet**	58	6	89	2	4	4547	812	37	8095	4
22	**21. menet**										
23	**22. menet**										

4. A játék minden menetében a 3. pontban leírtak szerint jár el a számláló, kivéve akkor, ha az ő száma már egyjegyű. Ebben az esetben a játék véget ér, ő a nyertes.

Szimuláljuk a játékot táblázatkezelő segítségével az alábbi mintát felhasználva. Minden sorban számítsuk ki az egyes játékosok számát, illetve jelezzük feltételes formázással, hogy ki a számoló játékos. A táblázatban csak az utolsó menetig jelenjenek meg adatok, de a munkafüzet legyen felkészítve a lehető leghosszabb, azaz legtöbb menetből álló játékra is.

A megoldást a táblázatkezelő beépített függvényeivel készítsünk el, az `L` oszloptól jobbra segédcellákat használhatunk, de saját függvényt vagy makrót ne alkalmazzunk. A táblázat formázását a *mintához* hasonlóan alakítsuk ki.

Beküldendő egy tömörített `i575.zip` állományban a megoldást tartalmazó munkafüzet és a megoldás rövid leírását bemutató dokumentáció.

I. 576 (É). A digitális kultúra emelt szintű érettségi vizsga gyakorlati feladatsorában az adatbázis-kezelési feladatot az XAMPP nyílt forráskódú webszerver és adatbázis-kezelő rendszerrel kell megoldani. A vizsgázó SQL-parancsok formájában kapja meg az adatbázist, a táblákat létrehozó és adatfeltöltő eljárásokat. Ebben a feladatban az érettségihez hasonló feladatokat kell megoldani, illetve az adatbázis létrehozását is nekünk kell elvégezni.

A *Nemzet Művésze* díj a legmagasabb művészi elismerés, amelyet 2014 óta osztanak ki. A jelenlegi és a már elhunyt díjazottakról a magyar nyelvű Wikipédia oldalán adatok állnak rendelkezésre, amit forrásként használhatunk:
`https://hu.wikipedia.org/wiki/A_Nemzet_Művésze`.

Az itt található adatok segítségével hozzuk létre azt a `nemzetmuvesze.sql` állományt, amelyet végrehajtva létrejön az adatbázis, a szükséges táblák a megfelelő számú, típusú, beállítású mezőkkel és az adatok feltöltése is megtörténik a táblákba. Ügyeljünk arra, hogy kiszámítható, felesleges adatokat ne tároljunk.

A következő feladatok megoldó SQL parancsokat rögzítsük a feladatok végén zárójelben megadott nevű és `.sql` kiterjesztésű szöveges állományokban. A lekérdezésekben pontosan a kívánt mezők szerepeljenek, felesleges mezőt ne jelenítsünk meg.

1. Mentsük le a megadott webcímről a Nemzet Művésze-díj adatait.

Tetszőleges alkalmazással rendezzük át, töröljük ki a felesleges, illetve egészítsük ki a szükséges adatokkal a táblákat. Használhatunk például szövegszerkesztőt, táblázatkezelőt vagy készíthetünk saját programot is. Az átalakítás egyes lépéseit más-más programmal is végezhetjük. A rendezett adatokat utolsó lépésként TXT típusú, tabulátorokkal tagolt UTF-8 kódolású egyszerű szöveges állományokként mentsük, amelyek neve a táblanevekkel egyezzen meg. Az állományok első sora tartalmazza a mezőneveket az azonosításhoz.

2. Készítsünk új adatbázist `nemzetmuvesze` néven. Készítsük el az adattáblákat az adatbázisban. A létrehozás során állítsuk be a megfelelő típusokat és elsődleges kulcsokat! (`2nemzet`)

3. Töltsük be az adattáblákba az adatokat a szöveges állományokból!
4. Lekérdezés segítségével írassuk ki, hogy Rubik Ernő milyen művészeti ágban és hány évesen nyerte el a címet. (`4rubik`)
5. Készítsünk lekérdezést, amely meghatározza, hogy melyik évben adták ki utoljára a Nemzet Művésze díjat. (`5utolso`)
6. Lekérdezés segítségével adjuk meg, hogy ki a legfiatalabb díjazott és mennyi idős a lekérdezés futtatásának pillanatában. (`6fiatal`)
7. Lekérdezés segítségével adjuk meg, hogy a jelenlegi díjazottak közül hányan tartoznak az egyes művészeti ágakhoz. A létszám mellett a művészeti ágak nevei jelenjenek meg. (`7stat`)
8. Soroljuk fel lekérdezés segítségével *Varga Imrével* együtt azoknak a nevét, akik vele azonos évben kapták meg a kitüntetést. (`8varga`)
9. Listázzuk ki azon díjazottak nevét és művészeti ágát, akiknek a művészeti tevékenysége ebben a körben ritka, azaz kevesebb, mint 5 személynél szerepel az adatbázisban. (`9ritka`)

Beküldendő egy tömörített `i576.zip` állományban az adatbázist létrehozó szöveges állomány és a feladatok megoldását adó lekérdezések.

I/S. 66. Bábel tornyát több évszázada folyamatosan építik, és (a földszinten kívül) már N emelettel rendelkezik. Hillalum (egy kőműves, akit most vettek fel, hogy segítsen az építkezésen) a földszinten áll és felkészül az akár több hétig tartó lépcsőzésre, mire feljut a torony legfelső emeletére.

Mivel a torony minden emeletén más-más turisztikai látványosság kapott helyet, Hillalum tudja, hogy egy nap csak D emeletet fog feljebb mászni. Sőt, minden T-edik nap pihenőt tart, és egyáltalán nem lépcsőzik aznap. Hillalum csak nappal mászik felfelé, éjszaka azonban a kőművesek mindig hozzáépítenek még X darab emeletet a toronyhoz.

Adjuk meg, hogy Hillalumnak hány napba telik, mire feljut a torony legfelső emeletére.

A bemenet egyetlen sorában az N, D, T és X számok szerepelnek szóközzel elválasztva.

A kimenet egyetlen sorában egy szám szerepeljen, hogy hány nap alatt jut fel Hillalum a torony tetejére (vagy `-1`, ha sosem ér fel a legfelső emeletre).

Példák:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`7 3 100 1`	`3`
`7 3 2 1`	`9`
`100 5 10 6`	`-1`

Korlátok: $N, D, T, X \leqslant 10^9$; $0 \leqslant X$; $1 \leqslant N, D$; $2 \leqslant T$. Időlimit: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad $N, D, T, X \leqslant 100$ esetén.

Beküldendő egy `is66.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

S. 165. Egy gyorsétteremlánc két különböző étteremben dolgozó alkalmazottja rájött, hogy ha a jelenlegi munkahelyük helyett egymás munkahelyére járnának dolgozni, akkor mindkettőjüknek kevesebbet kellene utazni. Szeretnének javaslatot tenni a felettesüknek a munkahelyek újraosztására, de a probléma sajnos túl bonyolultnak bizonyult, hogy papíron kiszámolják.

Adott egy város úthálózata, mely csúcsokból és az őket összekötő súlyozott élekből áll. Van továbbá valahány éttermünk és D alkalmazottunk, akikről tudjuk, honnan és hova járnak dolgozni. A feladatunk úgy újraosztani a munkahelyeket, hogy az alkalmazottak munkahelytől vett távolságának összege a lehető legkisebb legyen. (Tegyük fel, hogy a dolgozóknak egyéb preferenciája nincs.)

A bemenet első sorában a csúcsok N és az élek M száma található. A következő M sor egy-egy utat ír le, a két végpontjának sorszámával és az él súlyával (az út hosszával). Ezután az alkalmazottak D száma, majd D sorban az alkalmazottak lakhelyének és munkahelyének csúcsszáma található. Mindent 0-tól indexelünk és egy csúcsban legfeljebb egy étterem van.

A kimenet egyetlen sorában az elérhető legkisebb távolságösszeg szerepeljen, ha az újraosztás után minden étteremben ugyanannyian dolgoznak, mint előtte.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`6 5 / 0 1 1 / 1 2 2 / 1 5 1 / 3 4 2 / 4 5 1 2 / 0 5 / 3 2`	`6`

Megjegyzés: Mint ahogy a példa is mutatja, előfordulhat, hogy valaki így többet fog utazni.

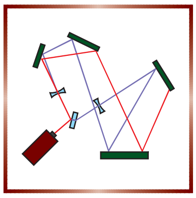
Korlátok: $N \leqslant 500$, $M \leqslant 1000$, $D \leqslant 100$. Időlimit: 1 mp.

Értékelés: A pontok 50%-a kapható, ha a program helyes kimenetet ad a $D \leqslant 10$ esetekre.

Beküldendő egy `s165.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható. A dokumentáció tartalmazza a megoldás elméleti hátterét, az esetleg felhasznált forrásokat. Ne tartalmazzon kódrészleteket, azok magyarázata kódkommentek formájában a forrásprogramban szerepeljen.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2022. december 15.

A röntgenszórás, más néven Bragg-reflexió

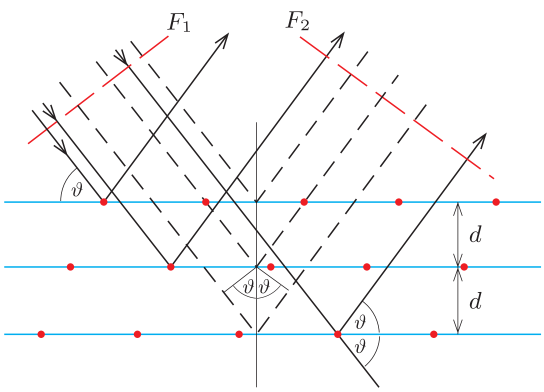


A kristályos anyagok szerkezetvizsgálatának legfontosabb módszere a röntgenszórás. Ennek lényege a következő. Ha a kristályrácsban periodikus rendben elhelyezkedő atomokat (ionokat, molekulákat) röntgensugarakkal, azaz elegendően rövid hullámhosszú elektromágneses sugarakkal megvilágítjuk, azok maguk is hullámforrássá válnak: a bejövő sugarakhoz képest valamilyen állandó fázissal eltolva, de azonos frekvenciával minden irányba sugároznak. A sok különböző centrumból jövő, ún. szórt sugarak általában kioltják egymást, de bizonyos irányokban, hasonlóan az optikai rácshoz, pozitív interferencia lép fel, és jól detektálható intenzitásmaximumokat észlelünk, és ezen maximumok pozíciójából határozzák meg a kristály szerkezetét.

Azt, hogy milyen feltételek esetén kapunk pozitív interferenciát valamilyen irányban, egy egyszerű analógia segítségével határozhatjuk meg. Képzeljünk el egy olyan síktükörsereget, amelyben a tükrök párhuzamosak, a szomszédok távolsága d, a fénynek csak egy részét verik vissza, és „hátulról” átlátszóak. Ezt a rendszert a síkokkal ϑ szöget bezáró, λ hullámhosszúságú fénnyel megvilágítva pozitív interferenciát észlelünk a visszaverődés irányában, ha a szomszédos síkokról visszaverődő hullámok útkülönbsége a hullámhossz egész számú többszöröse, azaz

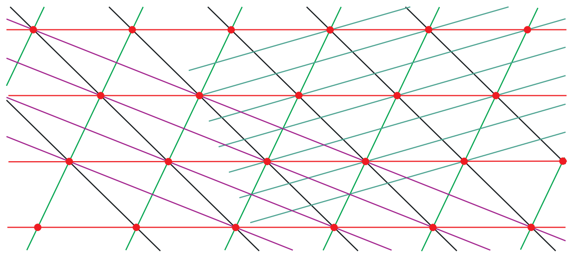
$$2d\sin\vartheta = n\lambda, \quad \text{ahol} \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

Egy kristályrácsban nincsenek tükrök, de a térben periodikus rendben elhelyezkedő szórócentrumokhoz ilyen kristálysíkok (ahogy mondani szokták: rácssíkseregek) rendelhetők, és nyilvánvaló, hogy ha ezeket tükörnek képzelve egy adott irányban pozitív interferencia lépne fel, akkor pozitívan interferál a megfelelő síkokban elhelyezkedő centrumokról az adott irányba szórt sugárzás is.



1. ábra

Az *1. ábra* a háromdimenziós jelenségnek a rácssíkokra merőleges, a beeső (és „visszavert") sugarakkal párhuzamos vetületét mutatja. Itt F_1 és F_2 bejövő és kimenő hullámfrontok (olyan síkok, amelyeken belül a fázis azonos), a szaggatott vonalak a képzeletbeli visszaverődést illusztrálják, az erősebb folytonos vonalak pedig néhány, a Bragg-feltétel teljesülése esetén pozitívan interferáló sugármenetet jelenítenek meg. Bármely két rácsponthoz tartozó, a bejelöltekhez hasonló sugármenet útkülönbsége csak attól függ, hogy az egyes rácspontok melyik rácssíkon helyezkednek el. A kristálysíkok rendszere nemcsak a fő kristálytani irányokhoz igazodva, hanem – ahogy azt a *2. ábra* érzékelteti – sokféleképpen kijelölhető, és ezek összessége jellemző a kristályszerkezetre. (A háromdimenziós kristályban bármely három, nem egy egyenesbe eső rácspont kijelöl egy síkot, amelyre természetesen nagyon („végtelen") sok másik rácspont is illeszkedik. A kristály periodikussága miatt minden rácspontra fektethető egy ezzel párhuzamos, nagyon sok másik rácspontot is tartalmazó sík, azaz minden rácspont illeszkedik egy, az eredetivel egybeeső, vagy azzal párhuzamos rácssíkra. Ezek együtt alkotnak egy rácssíksereget.)



2. ábra

Ezek után a szerkezetmeghatározás menete lényegében a következő: az ismert hullámhosszú monokromatikus sugárzással működő röntgendiffraktométerbe helyezett mintát szisztematikusan forgatják, és megkeresik azokat az irányokat, amelyekben fényes intenzitásmaximum észlelhető. A szóródás nélkül kimenő primer sugár és az intenzitásmaximum iránya közötti szög (az elhajlás szöge) éppen 2ϑ, a két sugár síkjára a szögfelezőben állított merőleges sík (szögfelező sík) pedig párhuzamos a megfelelő rácssíkokkal. Ezekből és a minta pillanatnyi pozíciójából a különböző rácssíkseregek távolságadatai és egymáshoz viszonyított helyzete meghatározható, így a kristályszerkezet rekonstruálható.

Az eljárás két Bragg, apa és fia, *William Henry Bragg* (1862–1942) és *William Lawrence Bragg* (1890–1971) nevéhez fűződik, akik ezért 1915-ben megkapták a fizikai Nobel-díjat. A fenti feltételt *Bragg-egyenletnek* nevezik, és érdekességképpen megjegyezzük, a megértéséhez használt hasonlat annyira beivódott a tudományos köztudatba, hogy a jelenséget Bragg-reflexiónak nevezik, pedig helyesen diffrakciónak kellene mondani.

Gyakorló feladatok

1. Egy röntgendiffraktométer sugárforrása $\lambda = 154$ pm hullámhosszúságú, monokromatikus sugárnyalábot állít elő. Mekkora ennek a berendezésnek a felbontása, azaz legalább milyen távol vannak egymástól azok a rácssíkok, amelyek segítségével még éppen előállhat diffrakció?

2. A fenti berendezéssel egy tércentrált kocka (más néven tércentrált köbös) szerkezetű, 613 pm rácsállandójú kristályt vizsgálunk. Adjuk meg a fő kristálytani tengelyekre (az elemi cellák éleire) merőleges rácssíkokon keletkező elhajlási maximumok ϑ pozícióit!

3. Ugyanezen a mintán egy másik rácssíksereghez öt elhajlási maximum tartozik, melyek közül a legmagasabb rendű 62,65°-ot zár be a síkokkal. Azonosítsuk a megfelelő rácssíksereget!

Megoldások

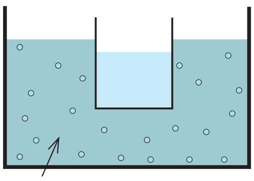
1. A Bragg-egyenletnek nincs megoldása, ha $d \leqslant \lambda/2$, tehát a berendezéssel csak azok a rácssíkok „láthatók”, amelyek távolsága legalább 77 pm.

2. Az elemi cellák éleire merőleges rácssíkokokat a cellák párhuzamos alsó, illetve felső lapjai, és a cellák közepén átmenő síkok adják. Ezek távolsága az a rácsállandó fele: $d = a/2$. Ilyen adatokkal a Bragg-egyenletnek $n = 1, 2$, és 3 mellett van megoldása. Ezek rendre 14,5°, 30,2° és 48,9°.

3. A megadott szöggel $n = 5$ mellett $d = 433{,}45$ pm adódik, azaz $d = 0{,}7071\,a \simeq \simeq a/\sqrt{2}$. Ekkora az elemi cellák lapátlóira merőleges rácssíkok távolsága.

Woynarovich Ferenc
Budapest

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 781. *Forraljunk vizet egy nagy lábosban a tűzhelyen. Tegyünk egy vékonyfalú pohárba csapvizet, majd merítsük a forrásban lévő vízbe úgy, hogy az sehol se érintkezzen a lábos falával. Felforr-e a pohárban a víz, ha elegendően hosszú ideig várunk?*

(*3 pont*)

Megoldás. Hanyagoljuk el a pohár fala, illetve a levegő okozta hőveszteséget. A lábosban lévő víz csak akkor tud energiát (hőt) átadni a pohárban lévő csapvíznek, hogyha köztük hőmérséklet-különbség van. Ezért a belső pohárban lévő csapvíz tetszőlegesen meg tudja közelíteni a 100 °C-ot, azonban azt sosem éri el. Ráadásul a pohárban lévő víz elforralásához a lábosban lévő víznek még a forráshőt is biztosítania kellene, de ezt hőmérséklet-különbség nélkül (hőátadás hiányában) nem teheti meg. Tehát a pohárban lévő víz biztosan nem forr fel.

Klement Tamás (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 9. évf.)

22 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Hibás 3 dolgozat.

G. 782. *Egy kerékpár egyenletesen,* 3 m/s *sebességgel halad vízszintes úton. Kerekeinek átmérője* 70 cm. *Ábrázoljuk a kerék különböző helyzeteiben az egyik kerületi pont sebességvektorait és gyorsulásvektorait egy-egy közös pontból indulva, azaz készítsük el a sebesség- és gyorsuláshodográfokat.*

(A hodográfról rövid cikk olvasható a KöMaL honlapján.)*

(4 pont) *Vermes Miklós* feladata nyomán

Megoldás. Tételezzük fel, hogy a kerékpár jobbra halad állandó, $v_0 = 3$ m/s nagyságú sebességgel, és a kerekei csúszásmentesen gördülnek. Az egyik kerék valamelyik kiválasztott kerületi pontjának sebességvektora a kerék tengelyének vízszintes $\boldsymbol{v}_\mathrm{t}$ sebességvektorából és a tengely körüli forgás $\boldsymbol{v}_\mathrm{k}$ kerületi sebességvektorából tevődik össze. Az *1. ábrán* a tengely transzlációs mozgásának sebességvektorát barna, a kerületi sebességeket pedig különböző időpontokban (a kiválasztott pont különböző helyzeteiben) kék nyilak jelölik. A talajjal érintkező A pontban a talajhoz viszonyított (eredő) sebesség nulla, emiatt

$$|\boldsymbol{v}_\mathrm{t}| = |\boldsymbol{v}_\mathrm{k}| = v_0,$$

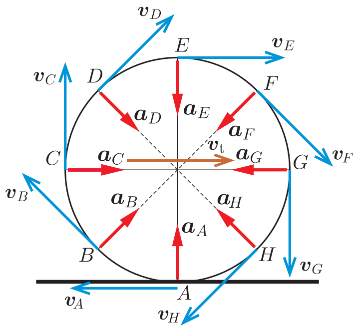
tehát az ábrán bejelölt valamennyi kék sebességvektor ugyanakkora nagyságú:

$$|\boldsymbol{v}_A| = |\boldsymbol{v}_B| = |\boldsymbol{v}_C| = \ldots = |\boldsymbol{v}_H| = |\boldsymbol{v}_\mathrm{k}| = v_0.$$

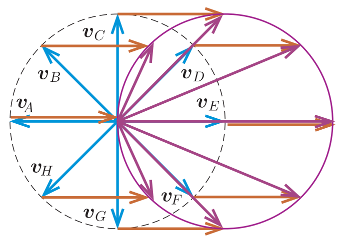
Az ábrán a kerék kiválasztott pontjának a gyorsulását is jelöltük (piros nyilakkal). Ezek iránya mindenféle lehet, de a nagyságuk ugyanakkora:

$$a_0 = \frac{v_0^2}{R} = 25{,}7\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2},$$

hiszen a kerék sugara $R = 0{,}35$ m.



1. ábra

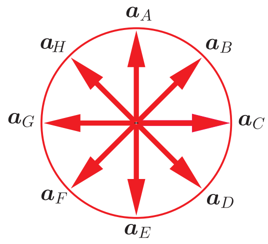


2. ábra

A sebességhodográfot úgy kapjuk meg, hogy a sebességvektorok kezdőpontját egy közös pontba toljuk el. A kerületi sebességek kéken jelzett vektorait egy pontból felmérve a vektorok végpontjai egy v_0 sugarú körön helyezkednek el (*2. ábra*). Ez

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`

a – szaggatott vonallal jelzett – kör lenne a sebességhodográf a kerékpárhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben. A talajhoz viszonyított sebességeket úgy kapjuk meg, hogy a kék vektorokhoz hozzáadjuk (a végpontjukból felmérjük) a transzlációs mozgás vízszintes, barnával jelölt sebességvektorát. Az eredő sebességeket az ábrán lila nyilak jelölik. Ezek végpontjai egy ugyancsak v_0 sugarú kört „rajzolnak ki", amelynek középpontja azonban a kerékpár haladási irányában v_0-lal eltolódott a szaggatott vonalú körhöz képest (ha azonos pontból mérjük fel azokat). A gyorsuláshodográfot hasonló módon kapjuk: egy közös pontba toljuk el a gyorsulásvektorok kezdőpontját. A gyorsulásvektorok egyforma hosszúságúak, így a végpontjaik egy a_0 sugarú körön helyezkednek el (*3. ábra*).



3. ábra

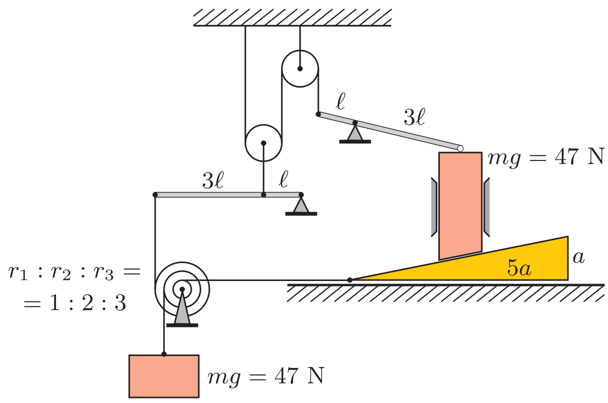
A kerékpár egésze (és így a kerekek tengelye) nem gyorsul, emiatt a gyorsuláshodográf ugyanúgy néz ki mind a kerékpárhoz, mind pedig a talajhoz rögzített vonatkoztatási rendszerben.

Hruby Laura (Budapest, Veres Pálné Gimn., 10. évf.)
dolgozatának felhasználásával

16 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (2 pont) 3 dolgozat.

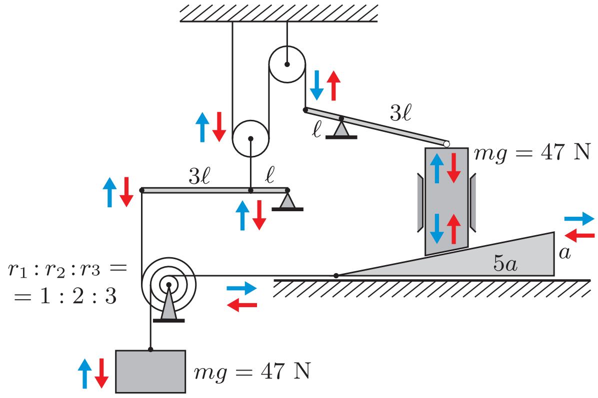
G. 784. *Az* alábbi ábrán *egyszerű gépek kavalkádját láthatjuk. A súrlódás, valamint a csigák és emelők tömege elhanyagolható. Melyik irányba indul el a legalsó test?*

(*4 pont*)



Megoldás. Tételezzük fel, hogy a legalsó test lefelé mozog. Rajzoljuk be az *ábrába piros* nyilakkal, hogy ebben az esetben a többi test milyen irányba fog mozogni! Kövessük nyomon a mozgásirányokat egészen az éken lévő testig úgy, hogy először a hengerkerékhez csatlakozó vízszintes, majd a függőlegesen felfelé haladó fonál mentén indulunk el.

A lefelé süllyedő alsó test a hengerkereket az óramutató járásával ellentétes irányban forgatja, emiatt az ék balra fog mozogni, a felette lévő test pedig *meg-*



emelkedik. Másrészt a hengerkerék forgása miatt az egyoldalú emelő és vele együtt a mozgócsiga lefelé, így a kétoldalú emelő bal oldala felfelé, a jobb oldali végpontja pedig *lefelé* mozdulna el. Ez azonban nem lehetséges, hiszen megállapítottuk, hogy az éken lévő test felfelé mozog. Ilyenfajta mozgás tehát nem jöhet létre.

Lehetséges-e, hogy az alsó test felfelé mozduljon el? Ebben az esetben az ábrán látható *kék* nyilak mutatják a mozgásirányokat. Ezek mindenhol ellentétes irányúak, mint a piros nyilak, tehát ez a mozgás sem lehetséges, mert az ék fölötti test aljának lefelé, a tetejének pedig felfelé kellene mozognia. Tehát ilyen mozgás sem jöhet létre.

Eddigi megfontolásaink során feltételeztük, hogy a fonalak a mozgás közben feszesek maradnak. Elvben elképzelhető lenne, hogy a csigákhoz és az emelőkhöz csatlakozó fonalak meglazulnak, nem fejtenek ki erőt, de az ék jobbra mozog, és a legalsó test emelkedik. Az energiaviszonyokat vizsgálva könnyen beláthatjuk, hogy ez az eset sem valósulhat meg. Ha ugyanis az éken lévő test s utat tenne meg, akkor a helyzeti energiája mgs-sel csökkenne, a másik test pedig $10\,s$-et emelkedne, tehát a helyzeti energiája $10\,mgs$-sel növekedne. Az egész rendszer helyzeti energiája megnőne, miközben még mozgási energia is megjelenne, tehát nem teljesülhetne az energiamegmaradás törvénye.

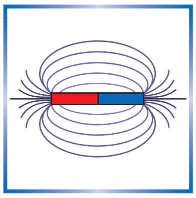
Megjegyzés. Ha az éken lévő test tömege – a feladatban szereplő adatokkal ellentétben – több mint 10-szer nagyobb lenne, mint az alsó test tömege, akkor az ék jobbra indulna el, miközben a fonalak egy része meglazulna.

Minden esetet megvizsgáltunk, akár azt tételeztük fel, hogy lefelé, akár azt, hogy felfelé mozog a legalsó test, mindig ellentmondásba ütköztünk. Ez azt jelenti, hogy semerre sem tud elmozdulni, az egyszerű gépek mindegyike nyugalomban marad.

Fehérvári Donát (Miskolc, Földes F. Gimn., 10. évf.) és
Klement Tamás (Pécs, Leővey Klára Gimn., 9. évf.)

10 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás, hibás 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása



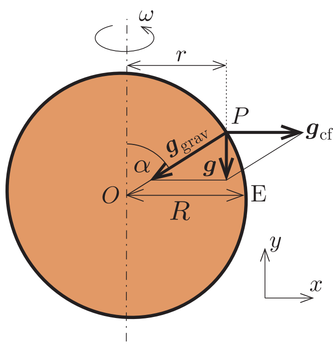
P. 5400. *A kis herceg egyik gömb alakú bolygója olyan gyorsan forog a tengelye körül, hogy az egyenlítőjén nulla a nehézségi gyorsulás. Milyen irányban nőnek a fák a bolygón?*

(*4 pont*)

Megoldás. Célszerű a bolygóhoz rögzített, forgó koordináta-rendszerből szemlélni a helyzetet. Ebben a rendszerben a gravitációs gyorsulás ($\boldsymbol{g}_{\text{grav}}$) mellett fellép egy $r\omega^2$ nagyságú, a bolygó forgástengelyére merőleges, attól „elfele" mutató *centrifugális gyorsulás* ($\boldsymbol{g}_{\text{cf}}$), ahol r a forgástengelytől mért távolság, ω pedig a bolygó szögsebessége. A gravitációs gyorsulás g_0 nagysága csak a bolygó középpontjától mért távolságtól függ, tehát a bolygó felszínén mindenhol ugyanakkora.

Az eredő nehézségi gyorsulás a gravitációs és a centrifugális gyorsulás vektori összege (lásd az *ábrát*):

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_{\text{grav}} + \boldsymbol{g}_{\text{cf}}.$$



Feltételezzük, hogy a fák $\boldsymbol{g}$-vel ellentétes irányban nőnek.

Tudjuk, hogy az R sugarú bolygó egyenlítője (E) mentén

$$|\boldsymbol{g}_{\text{cf}}| = R\omega^2 \qquad \text{és} \qquad |\boldsymbol{g}| = 0,$$

tehát fennáll, hogy $g_0 = R\omega^2$.

Tekintsünk most egy tetszőleges P pontot a bolygó felszínén, és legyen az OP egyenesnek a forgástengellyel bezárt szöge α. Az ábrán jelölt koordináta-rendszerben a gyorsulások komponensei:

$$g_{\text{grav},x} = -g_0 \sin\alpha, \qquad g_{\text{grav},y} = -g_0 \cos\alpha,$$

$$g_{\text{cf},x} = r\omega^2 = R\omega^2 \sin\alpha, \qquad g_{\text{cf},y} = 0,$$

és így

$$g_x = g_{\text{grav},x} + g_{\text{cf},x} = -g_0 \sin\alpha + R\omega^2 \sin\alpha = \sin\alpha (R\omega^2 - g_0) = 0,$$

valamint $g_y = -g_0 \cos\alpha$.

Ezek szerint a fák ezen a furcsa bolygón a forgástengellyel párhuzamosan nőnek, mivel a centrifugális gyorsulás ellensúlyozza a gravitációs gyorsulásnak a forgástengelyre merőleges komponensét. Az északi feltekén tehát „felfelé", a délin „lefelé" fognak nőni a fák.

Seprődi Barnabás Bendegúz (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Az egyenlítőn, ahol súlytalanság van, feltehetően egyáltalán nem nőnek fák, vagy ha mégis, akkor azok irányát nem a nehézségi erő, hanem valami más (pl. a fény) határozhatná meg.

30 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Hiányos (1–2 pont) 9, hibás 10, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5404. *Egy ideális Carnot-gép T_1 és T_2 ($T_2 < T_1$) hőmérsékletű hőtartályok segítségével (izotermikus és adiabatikus állapotváltozásokon keresztül) ciklusonként W hasznos munkát tud végezni. Hogyan módosul a hőerőgép hatásfoka, ha a munkahenger dugattyújának kicsiny súrlódása miatt ciklusonként $2q$ hő fejlődik ($q \ll W$), és ez a hő fele-fele arányban megosztva visszakerül a hőtartályokba?*

(*5 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest

Megoldás. Az ideális Carnot-gép hatásfoka (a szokásos jelölésekkel):

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{fel}}} = \frac{Q_{\text{fel}} - Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

ahonnan

$$Q_{\text{fel}} = \frac{W}{\eta}, \qquad \text{illetve} \qquad Q_{\text{le}} = \frac{1-\eta}{\eta} W.$$

Ha a hőerőgép nem ideális, mert a dugattyú súrlódása miatt ciklusonként $2q$ hő fejlődik, amely fele-fele arányban visszakerül a hőtartályokba, akkor a felvett és leadott hő, valamint a munkavégzés a következőképen módosul:

$$Q'_{\text{fel}} = Q_{\text{fel}} - q = \frac{W}{\eta} - q,$$

$$Q'_{\text{le}} = Q_{\text{le}} + q = \frac{1-\eta}{\eta} W + q,$$

$$W' = Q'_{\text{fel}} - Q'_{\text{le}} = W - 2q.$$

Ezek szerint a módosult hatásfok:

$$\eta' = \frac{W'}{Q'_{\text{fel}}} = \frac{W - 2q}{(W/\eta) - q} = \frac{W - 2q}{W - \eta q}\eta.$$

Számítsuk ki, hogy mennyivel kisebb ez a hatásfok a Carnot-hatásfoknál:

$$\eta - \eta' = \left(1 - \frac{W - 2q}{W - \eta q}\right)\eta = \frac{(2-\eta)\eta q}{W - \eta q} \approx \eta(2-\eta)\frac{q}{W}.$$

(Az utolsó lépésnél kihasználtuk, hogy $q \ll W$.)

A hőerőgép hatásfoka tehát kicsiny súrlódás esetén

$$\eta' = \eta - \eta(2-\eta)\frac{q}{W},$$

amelyet a hőtartályok hőmérsékletével így is megadhatunk:

$$\eta' = \frac{T_1 - T_2}{T_1} - \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1^2} \cdot \frac{q}{W}.$$

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Gimn., 12. évf.)

17 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott Toronyi András megoldása. Hiányos (1–3 pont) 9, hibás 5, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5405. *Két különálló ellenálláson összesen I erősségű áram folyik át. Igazoljuk, hogy a két ellenállásra eső összteljesítmény akkor minimális, ha a két ellenállásra eső feszültség megegyezik!*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

Megoldás. Legyen az egyik ellenállás R, a másik ellenállás az elsőnek x-szerese, azaz xR. Az egyik ellenálláson átfolyó áramerősség i_1, a másikon átfolyó áram erőssége $i_2 = I - i_1$.

Egy R nagyságú ellenállásra eső teljesítmény (általánosságban):

$$P = U \cdot i = R\,i^2,$$

így a feladatban szereplő két ellenállás összteljesítménye:

$$P_{\text{összes}} = P_1 + P_2 = R \cdot i_1^2 + xR \cdot (I - i_1)^2 = R\big[(1+x)i_1^2 - 2xI\,i_1 + xI^2\big].$$

Ismert, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú másodfokú kifejezésnek $x = -\frac{b}{2a}$-nál van szélsőértéke ($a > 0$ esetén minimuma). Ennek megfelelően $P_{\text{összes}}$ legkisebb értékéhez tartozó áramerősségek:

$$i_1 = \frac{x}{1+x} I, \qquad \text{illetve} \qquad i_2 = I - i_1 = \frac{1}{1+x} I.$$

Így az R_1 ellenállásra eső feszültség:

$$U_1 = R\,i_1 = \frac{x}{1+x}\,IR,$$

a másik ellenállás feszültsége

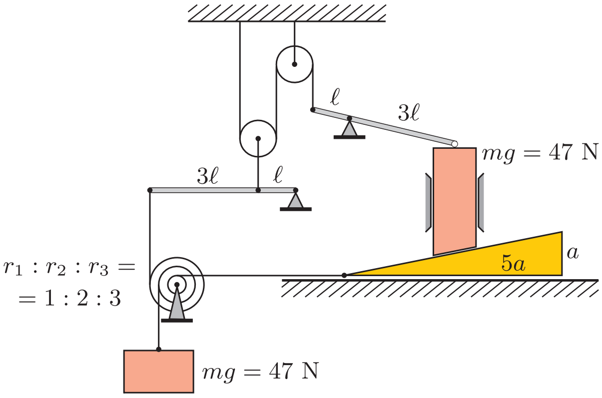
$$U_2 = (xR) \cdot i_2 = \frac{x}{1+x}\,IR.$$

Látjuk, hogy a legkisebb összteljesítmény esetén $U_1 = U_2$, tehát a feladat szövegében szereplő állítás valóban igaz.

Hauber Henrik (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 11 évf.)

34 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 6, nem versenyszerű 3 dolgozat.

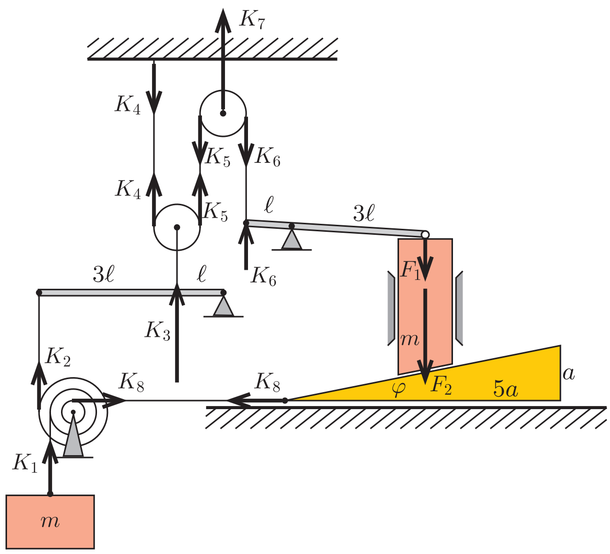
P. 5409. *Az* ábrán *egyszerű gépek kavalkádját láthatjuk. A súrlódás, valamint a csigák és emelők tömege elhanyagolható. Mekkora erő ébred a fonalakban?*



(*4 pont*) *Holics László* feladata nyomán

Megoldás. Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket, és használjuk ki, hogy

$$mg = 47\ \mathrm{N} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{5a} = \frac{1}{5}.$$



Mivel a rendszer egésze és annak minden egyes része egyensúlyban van, a következő egyenleteket írhatjuk fel:

$$K_1 = mg = 47\ \mathrm{N},$$

$$\ell \cdot K_3 = 4\ell \cdot K_2, \qquad \text{azaz} \qquad K_3 = 4K_2,$$

$$K_4 = K_5 = K_6 = \frac{1}{2}K_3 = 2K_2,$$
$$K_7 = K_5 + K_6 = K_3.$$
$$F_1 = \frac{K_6\,\ell}{3\,\ell} = \frac{2}{3}K_2,$$
$$F_2 = F_1 + mg = \frac{2}{3}K_2 + 47\ \mathrm{N},$$
$$K_8 = \operatorname{tg}\varphi\, F_2 = 9{,}4\ \mathrm{N} + \frac{2}{15}K_2.$$

Tudjuk továbbá, hogy a hengerkerékre ható eredő forgatónyomaték nulla:

$$2r_1K_1 - 3r_1K_2 = r_1K_8 = r_1\left(9{,}4\ \mathrm{N} + \frac{2}{15}K_2\right),$$

vagyis

$$2\cdot 47\ \mathrm{N} - 3K_2 = 9{,}4\ \mathrm{N} + \frac{2}{15}K_2.$$

Ennek a lineáris egyenletnek $K_2 = 27$ N a megoldása, amit a többi egyenletbe visszaírva kapjuk:

$$K_3 = K_7 = 108\ \mathrm{N},\qquad K_4 = K_5 = K_6 = 54\ \mathrm{N},\qquad F_8 = 13\ \mathrm{N}.$$

Seprődi Barnabás Bendegúz (Budapest, Óbudai Árpád Gimn., 10. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes a Csillingek csapatának, továbbá Seprődi Barnabás Bendegúz, Toronyi András és Vig Zsófia megoldása. Hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 5410. *A vándorsólyom szárnycsapások nélkül is képes megtenni nagyobb távolságokat. Ilyenkor a mozgása két részből áll. Az első részben kiterjesztett szárnyakkal körözve emelkedik egy fölfelé áramló meleg levegőoszlopban (termikben)* v_1 *függőleges sebességgel. A második részben a termiket elhagyva a vízszintessel* α *szöget bezárva állandó sebességgel siklik a következő,* L *távolságra lévő termikig. A* v_2 *siklási sebesség jó közelítéssel egyenesen arányos a siklás vízszintessel bezárt* α *szögének szinuszával:* $v_2 = k\sin\alpha$*, ahol* k *egy ismert állandó.*

a) Legalább milyen magasra kell a madárnak emelkednie a termikben, hogy egy emelkedésből és egy siklásból álló mozgás a legrövidebb ideig tartson?

b) Legalább mennyi időre van szüksége a vándorsólyomnak, hogy az egyik termik aljától eljuthasson a másik termik aljáig?

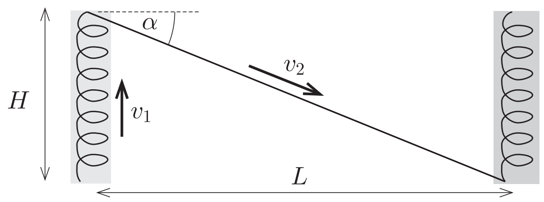
c) Határozzuk meg az optimális menetidejű mozgáshoz tartozó siklási szöget!

Adatok: $v_1 = 2\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $k = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, $L = 2$ km.

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

Megoldás. Az *ábra* alapján az emelkedés és a siklás teljes idejére érvényes:

$$t = \frac{H}{v_1} + \frac{L}{v_2 \cos\alpha}.$$



Mivel

$$\cos\alpha = \frac{L}{\sqrt{H^2+L^2}} \qquad \text{és} \qquad v_2 = k\sin\alpha = k\frac{H}{\sqrt{H^2+L^2}},$$

az egyik termik aljától a következő termik aljáig

$$t = \frac{H}{v_1} + \frac{L^2+H^2}{kH} \tag{1}$$

idő alatt jut el a vándorsólyom.

Ha valahonnan ismernénk t értékét, akkor annak segítségével az (1) egyenletből ki tudnánk számítani az emelkedés H magasságát. Rendezés után egy (H-ra nézve) másodfokú egyenlethez jutunk:

$$(k+v_1)\,H^2 - kv_1t\,H + v_1L^2 = 0.$$

Ennek csak akkor van (valós) megoldása, ha a diszkrimináns nem negatív:

$$k^2v_1^2t^2 - 4(k+v_1)v_1L^2 \geqslant 0,$$

vagyis

$$t \geqslant \frac{2L}{k}\sqrt{\frac{k+v_1}{v_1}} = t_{\min}.$$

b) Ezek szerint egy-egy repülési ciklus legrövidebb ideje a fenti $t_{\min}$, ami a megadott számadatok mellett kb. 980 s, azaz 16,3 perc.

a) A legrövidebb időhöz tartozó emelkedési magasság:

$$H=\frac{v_1 k t_{\min}}{2(k+v_1)}=L\sqrt{\frac{v_1}{k+v_1}}\approx 816\ \text{m}.$$

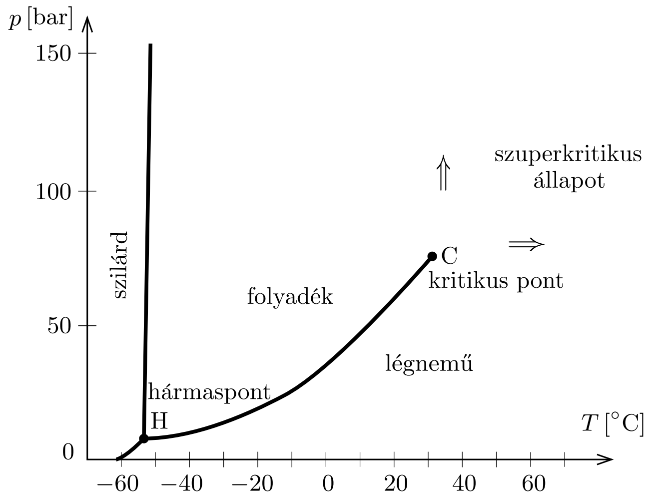
c) A fentebb kiszámolt optimális „menetidőhöz” tartozó siklási szög:

$$\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{v_1}{k+v_1}}\approx 22^\circ.$$

Téglás Panna (Révkomárom, Selye J. Gimn., 12. évf.)

26 dolgozat érkezett. Helyes 17 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.

P. 5412. *Ha egy gázt (állandó nyomás mellett) lehűtünk, akkor elegendően alacsony hőmérsékleten a gáz általában cseppfolyósodik (kondenzálódik, lecsapódik). Ez azonban csak bizonyos nyomástartományban történik így. Az* ábra *a szén-dioxid „fázisdiagramját” mutatja. Legalább, illetve legfeljebb mekkora nyomás mellett történik meg a cseppfolyósodás a fenti módon? Mi történik, ha a hűtést ennél a tartománynál magasabb, illetve alacsonyabb nyomáson végezzük?*



(Lásd még „A gőz, gáz és a kritikus hőmérséklet” c. rövid cikket a KöMaL honlapján.)*

(*3 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

Megoldás. Az *ábrán* látható, hogy ha a H-val jelölt hármaspont nyomása alatti nyomáson légnemű szén-dioxidot hűtünk, akkor a gáz nem fog cseppfolyósodni, hanem bizonyos hőmérsékleten azonnal szilárd halmazállapotba megy át, megszilárdul. A hármaspont nyomása az ábra alapján kb. 5 bar.

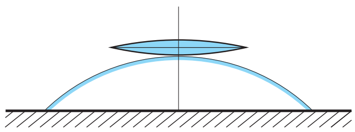
* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`

A szén-dioxid nyomását az ábrán C-vel jelölt kritikus pont nyomása fölé emelve a szén-dioxid szuperkritikus állapotba kerül. Itt eltűnnek a fázishatárok, vagyis a szén-dioxid nem gőzként, de nem is folyadékként fog viselkedni, tehát hűtés hatására nem fog cseppfolyósodni a fent leírt módon. Az ábra alapján a kritikus pont nyomása kb. 75 bar.

Tehát a szén-dioxid 5 bar és 75 bar nyomás között cseppfolyósítható a fent leírt módon. (A Wikipedia alapján a pontosabb értékek 5,1 bar és 73,8 bar).

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 12. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes Horváth Zsóka, Szabó Márton és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (2 pont) 4, hiányos (1 pont) 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.



P. 5413. *Egy* 20 cm *fókusztávolságú gyűjtőlencsét az* ábra *szerint egy domború gömbtükörre helyezünk. Mekkora legyen a tükör görbületi sugara, hogy a lencsére függőlegesen érkező, párhuzamos fénynyaláb a rendszerről való visszaverődés után is párhuzamos maradjon?*

(*4 pont*) *Példatári feladat nyomán*

I. megoldás. Ha az optikai rendszerre párhuzamosan érkeznek a fénysugarak, és ugyancsak párhuzamosan haladva távoznak onnan, akkor a rendszer dioptriája *nulla.* A fénysugarak kétszer haladnak át lencsén, így

$$D_{\text{rendszer}} = 2D_{\text{lencse}} + D_{\text{tükör}} = 2 \cdot \frac{1}{f_{\text{lencse}}} - \frac{2}{R_{\text{tükör}}} = 0,$$

ahonnan a gömbtükör görbületi sugara

$$R_{\text{tükör}} = f_{\text{lencse}} = 20 \text{ cm}.$$

Pethő Dorottya (Kecskeméti Katona J. Gimn., 11. évf.)

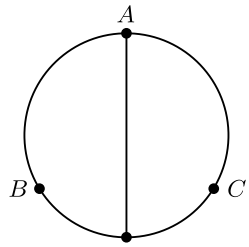
II. megoldás. A rendszer forgásszimmetriája miatt a visszaverődés után párhuzamosan távozó fénynyaláb is függőleges. A tükörről visszavert fénysugaraknak tehát úgy kell a lencséhez érkezniük, mintha a lencse fókuszpontjából indultak volna, hiszen ekkor távozik a lencséből függőleges, párhuzamos fénynyaláb.

A lencsére érkező párhuzamos fénynyaláb a lencsén való törés után annak fókuszpontja felé halad tovább. Az előbbiekben tárgyaltaknak megfelelően a domború tükörről való visszaverődés után a fénysugarak ugyanezen az útvonalon, de fordított irányban haladnak. Ez akkor következik be, ha minden egyes fénysugár merőlegesen, vagyis a gömb középpontja felé tartva esik a gömbtükörre. Ezek szerint a lencse fókuszpontjának egybe kell esnie a gömb középpontjával, vagyis a gömbtükör görbületi sugara is 20 cm.

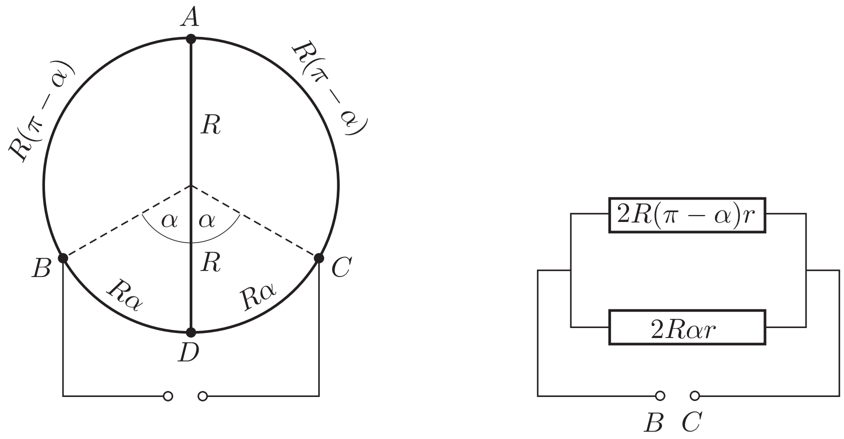
18 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (2 pont) 2 dolgozat.

P. 5414. *Fémdrótból egy R sugarú kört formáztunk, és ugyanebből a drótból az egyik átmérőt is elkészítettük. Mekkora legyen az $AB=AC$ ívek hossza, hogy az A és B pontok között mérhető eredő ellenállás megegyezzen a B és C pontok között mérhető eredő ellenállással?*

(*4 pont*) Közli: *Gáspár Merse Előd,* Budapest



Megoldás. Legyen a huzal egységnyi hosszúságú darabjának ellenállása r. Határozzuk meg először a B és a C pontok közötti eredő ellenállást. Mivel az egyenes vezeték végpontjai (az elrendezés szimmetriája miatt) ekvipotenciálisak, közöttük nem folyik áram, az átmérő menti vezeték tehát eltávolítható (*1. ábra*).



1. ábra

$$R_{BC}=\left(\frac{1}{2R(\pi-\alpha)r}+\frac{1}{2R\alpha r}\right)^{-1}=2Rr\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}.$$

Az A és B pontok közötti eredő ellenállást a *2. ábra* alapján lépésről lépésre számolhatjuk.

A felső ág bal oldalán látható párhuzamosan kapcsolt ellenállások eredője:

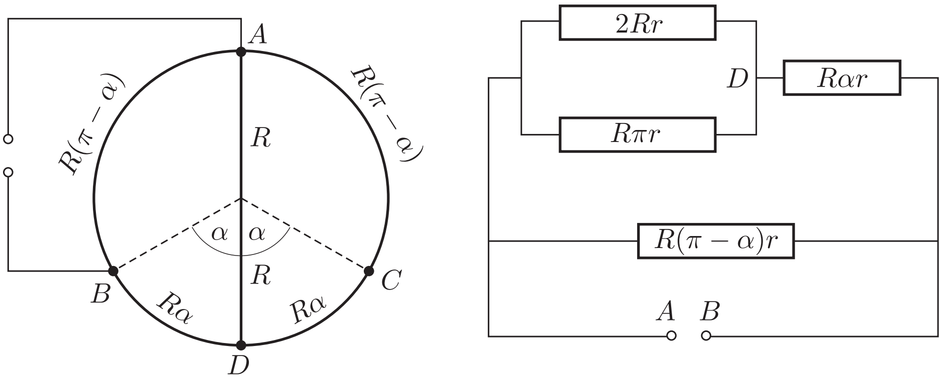
$$R_1=\frac{2Rr\cdot R\pi r}{2Rr+R\pi r}=\frac{2R\pi}{2+\pi}r.$$

A felső ág két sorosan kapcsolt ellenállásának eredője:

$$R_2=R_1+R\alpha r=\frac{2\pi+\pi\alpha+2\alpha}{\pi+2}Rr,$$

végül pedig (algebrai átalakítások után)

$$R_{AB}=\frac{(\pi-\alpha)Rr\cdot R_2}{(\pi-\alpha)Rr+R_2}=\frac{(\pi-\alpha)(2\pi+2\alpha+\pi\alpha)}{\pi(\pi+4)}Rr.$$



2. ábra

Az $R_{AB}=R_{BC}$ feltétel szerint fennáll, hogy

$$2Rr\frac{\alpha(\pi-\alpha)}{\pi}=\frac{(\pi-\alpha)(2\pi+2\alpha+\pi\alpha)}{\pi(\pi+4)}Rr.$$

Ennek az egyenletnek az egyik megoldása: $\alpha_1=\pi$. Ha ez teljesül, akkor az A, B és C pontok egybeesnek, és így nyilván $R_{AB}=R_{BC}=0$. Számunkra ez a gyök érdektelen, hiszen ebben az esetben nem is beszélhetünk AB és AC ívekről. Az egyenlet másik gyöke:

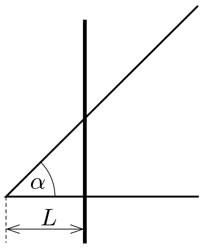
$$\alpha_2=\frac{2\pi}{6+\pi}\approx 0{,}69 \text{ radián},$$

és így a keresett ívhosszak:

$$\widehat{AB}=\widehat{BC}=(\pi-\alpha_2)R=\pi\frac{4+\pi}{6+\pi}R\approx 2{,}45\,R.$$

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

23 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 4 dolgozat.



P. 5415. *Egy elhanyagolható ellenállású, szigetelés nélküli huzalból, a vízszintes síkban elhelyezkedő, $\alpha=45°$-os szöget bezáró, V alakot hajlítunk. Ezt az elrendezést olyan mágneses mezőbe helyezzük, melynek $\boldsymbol{B}$ indukcióvektora merőleges a vízszintes síkra, és nagysága a $B(t)=B_0/t_0\cdot t$ összefüggés szerint változik az időben, ahol B_0 és t_0 ismert állandók. A* V *alakú vezetőre szigetelés nélküli, kezdetben rögzített fémrudat helyezünk az* ábrának *megfelelő módon. A rúd egységnyi hosszúságú darabjának ellenállása r.*

a) Mennyi hő fejlődik a fémrúdban t_0 idő alatt?

b) A bekapcsolástól ($t=0$ időpillanat) számított t_0 időpillanatban a mágneses indukció változása megszűnik. Ebben a pillanatban az eddig rögzített fémrudat a vízszintes síkban, a fémrúdra merőlegesen v_0 sebességgel mozgatni kezdjük. Mekkora legyen ez a sebesség, hogy a rúdban folyó áram erőssége ne változzon?

c) Hányszor több hő fejlődik a fémrúdban a mozgatás során, mint a rögzített helyzetben, ha a fémrudat $2t_0$ *hosszú ideig mozgatjuk?*

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. Az ellenállás nélküli huzal és a fémrúd zárt áramkört alkot, amelyben a változó mágneses fluxus miatt feszültség indukálódik, áram folyik és hő fejlődik.

a) A $0 \leqslant t \leqslant t_0$ időintervallumban az indukált feszültséget a nyugalmi indukció összefüggése alapján számíthatjuk. Mivel a mágneses indukció nagysága $\Delta t = t_0$ idő alatt (egyenletesen változva) nulláról B_0-ra nő, a hurok területe pedig $L^2/2$, Faraday törvénye szerint az indukált feszültség

$$U = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\Delta B}{\Delta t} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{B_0 L^2}{2t_0}.$$

Ekkora feszültség az $R = Lr$ ellenállású áramkörben

$$I_a = \frac{U}{R} = \frac{B_0 L}{2rt_0}$$

erősségű áramot hoz létre, és így t_0 idő alatt

$$Q_a = I_a^2 R t_0 = \frac{B_0^2 L^3}{4rt_0}$$

hő fejlődik.

b) A $t_0 \leqslant t \leqslant 3t_0$ időintervallumban a mágneses indukció nagysága állandó B_0, viszont a fémrúdnak a vezetékek közé eső részének ℓ hossza egyre nagyobb lesz:

$$\ell(t) = L + v_0(t - t_0).$$

Az áramkörben indukálódott feszültség a mozgási indukció törvénye szerint

$$U(t) = B_0 v_0 \ell(t),$$

tehát időben változik, de az áramkör ellenállása is ugyanilyen ütemben növekszik: $R(t) = r\ell(t)$. A kialakuló áramerősség:

$$I_b = \frac{U(t)}{R(t)} = \frac{B_0 v_0 \ell(t)}{r\ell(t)} = \frac{B_0 v_0}{r} = \text{állandó}.$$

Ez az áramerősség akkor egyezik meg a korábban kiszámított I_a áramerősséggel, ha

$$\frac{B_0 v_0}{r} = \frac{B_0 L}{2rt_0},$$

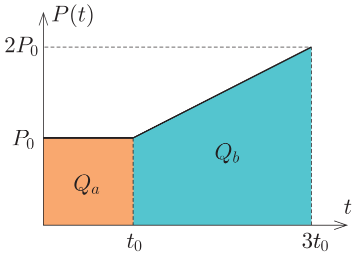
vagyis a rúd sebessége

$$v_0 = \frac{L}{2t_0}.$$

A rúd vezetékek közötti részének hossza a mozgás végén

$$\ell(3t_0) = 2t_0 v_0 = 2L.$$

c) Amikor a rúd még nem mozog, a feszültség is és az áramerősség is állandó, tehát a hőfejlődés teljesítménye is időben állandó P_0. A rúd mozgása során az áramerősség időben állandó, de a rúdnak az áramvezetésben részt vevő hossza L-ről $2L$-re nő, és emiatt az ellenállása is a kezdeti érték kétszerese lesz. Ennek megfelelően a teljesítmény is időben (egyenletesen) változik, és a mozgás végén $2P_0$ lesz.



Ábrázoljuk a hőfejlődés teljesítményét az idő függvényében. A grafikon alatti területek a fejlődött hő nagyságát adják meg.

Az *ábráról* leolvasható, hogy

$$Q_a = P_0 t_0, \qquad \text{illetve} \qquad Q_b = \frac{P_0 + 2P_0}{2} \cdot 2t_0 = 3P_0 t_0,$$

vagyis $Q_b = 3\,Q_a$.

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)
dolgozata felhasználásával

15 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 6 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 417. Készítsünk 50 gemkapocsból álló láncot. Tartsuk a láncot függőlegesen az egyik végénél fogva úgy, hogy a másik vége éppen az asztalhoz érjen. Sokszor egymás után ejtsük le a láncot, és mérjük meg minden alkalommal az összegabalyodott lánckupac legnagyobb méretét, illetve a lánc két vége közötti távolságot. Számoljuk ki a mért értékek átlagát és szórását! Hasonlítsuk össze ezeket a kifeszített lánc teljes hosszával!

(*6 pont*) Közli: *Schramek Anikó,* Fót

G. 793. Egy ember testén 1000 hPa nyomáson 15 tonna súlyának megfelelő nyomóerő oszlik el.

a) Mekkora a testfelülete?

b) Mekkora ez a nyomóerő a Magas-Tátra legmagasabb pontján?

(*3 pont*)

G. 794. U alakú cső keresztmetszete 1,5 cm^2. A csőbe higanyt töltünk úgy, hogy az mindkét szárban elég magasan álljon. A cső egyik szárába a higanyra 0,1 dl vizet öntünk. Melyik szárban és mennyivel fog magasabban állni a folyadék felszíne?

(*4 pont*)

G. 795. Két síktükör egymással 60°-os szöget zár be. A két tükör metszésvonalától 30 cm-re 30°-os beesési szögben fénysugár érkezik az egyik tükörre. Legalább mennyi idő telik el, amíg a visszaverődő fény az egyik tükörről a másikig ér?

(*3 pont*)

G. 796. Egy ózongenerátor óránként 5 g ózont állít elő kisüléssel, és ventilátorral juttatja azt a fertőtlenítendő felületre.

a) Hány ózonmolekula keletkezik 1 óra alatt?

b) A használati útmutató 28 m^2 felület fertőtlenítésére 30 percet javasol. A levegő tiszta és pormentes, így a keletkező ózon csak a felületen bomlik fel. Becsüljük meg, hány ózonmolekula jut egy olyan baktériumra, amely 10 négyzetmikron felületet foglal el!

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

P. 5436. Két, egymást merőlegesen keresztező egyenes autópályán egy-egy pontszerűnek tekinthető autó a kereszteződési pont felé tart állandó nagyságú sebességgel. Az A jelű autó sebessége $v_A = 50$ km/h, a B jelű autóé $v_B = 40$ km/h. Egy adott időpontban a két autó a kereszteződési ponttól mért távolsága $d_A = 20$ km, illetve $d_B = 36$ km.

a) Mekkora lesz köztük a minimális távolság?

b) Mennyi idő múlva lesznek egymáshoz legközelebb?

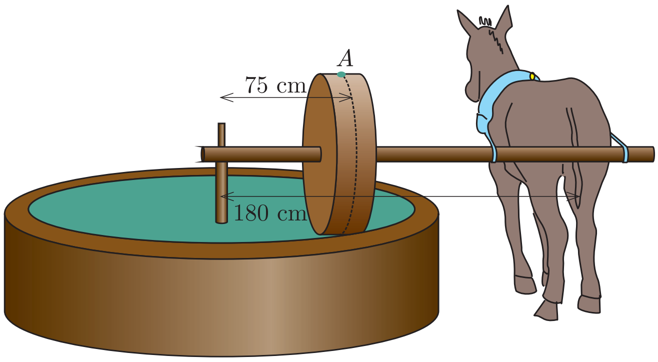
(*4 pont*) Közli:*Holics László,* Budapest

P. 5437. Egy kettőscsillag egyik tagja háromszor nagyobb tömegű, mint a másik csillag. A két égitest (amelyek mérete sokkal kisebb, mint a távolságuk) közelítőleg kör alakú pályákon keringenek a közös tömegközéppontjuk körül. Melyik csillagnak és hányszor nagyobb a mozgási energiája a tömegközépponti koordinátarendszerben?

(*3 pont*) Tankönyvi feladat

P. 5438. Egy spanyol gazdaságban a képen látható olajbogyópréssel törik péppé a bogyókat. A 90 cm átmérőjű zúzókerék tisztán gördülő síkja, amit az *ábrán* szaggatott vonal jelez, a tengelytől 75 cm távolságban van. A csacsi farka a tengelytől 180 cm távolságban verdesi a rudat, miközben az állat 2,4 m/s sebességgel körbe-körbe fut. A zúzókerékre egy 1 g tömegű olajbogyó ragad.

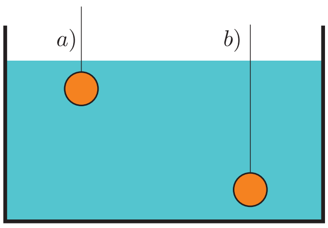
a) Mekkora az olajbogyó sebessége, amikor a felső A pontba ér?



b) Mekkora a olajbogyó gyorsulása az A pontban?

c) Mekkora és milyen irányú eredő erőt fejt ki a zúzókerék az olajbogyóra a legfelső A pontban?

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház



P. 5439. Egy gömb alakú, kezdetben 20 °C hőmérsékletű rézgolyót vékony, hőszigetelő szál segítségével nagy mennyiségű, 80 °C-os vízbe merítünk. A fémgolyó t_1 idő elteltével melegszik fel 50 °C-ra. Ezután a kísérletet megismételjük úgy, hogy a víz hőmérséklete 20 °C, a golyóé pedig 80 °C. A rézgolyó most t_2 idő alatt hűl le 50 °C-ra. Melyik idő rövidebb, t_1 vagy t_2, ha a golyót

a) éppen csak belemerítjük a vízbe,

b) majdnem az edény aljáig engedjük le?

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5440. Egy méhkaptártól 2 km távolságra van egy akácos, ahonnét egy-egy méh fordulónként 30 mm^3 térfogatú nektárt szállít be a kaptárba. A méz készítésekor a méhek a nektár tömegének 55%-át kitevő víz egy részét a kaptárban elpárologtatják, a kész mézben a víz tömege már csak 19%. A virágzás 12 napja alatt a méhcsalád 25 kg mézet készít. A párologtatás energiaigényét a hazahozott nektár egy részének elfogyasztásával fedezik a méhek.

a) Hány watt a méhcsaládnak csupán a párologtatásba fektetett átlagos teljesítménye?

b) Hány kilométert tesznek meg a család gyűjtőtagjai összesen, amíg a szükséges nektármennyiséget a kaptárba hordják?

A nektár sűrűsége 1,2 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; a nektár 1 kg-ja 6000 kJ energiát szolgáltat; 1 kg víz elpárologtatásához 2400 kJ energiát használnak fel a méhek.

(*4 pont*) Érettségi-felvételi feladat

P. 5441. Egy fémdrótból kört formáztunk, és ugyanabból a drótból az egyik húrt is szeretnénk elkészíteni a kör két pontja közé. Hol fusson a húr, hogy a lehető legnagyobb legyen az eredő ellenállás a húr két végpontja között, és mekkora lesz az eredő ellenállás ebben az esetben? Jelölje R a sugárhosszúságú drót ellenállását.

(*4 pont*) Közli: *Gáspár Merse Előd,* Budapest

P. 5442. Egy eredetileg nyugvó atommag 20 kV potenciálkülönbség befutása után a haladási irányára merőleges, 1,0 T indukciójú homogén mágneses mezőbe kerül. A mágneses mezőt egy, a részecske haladási irányára merőleges sík választja el az erőtérmentes tartománytól. A részecske $3{,}3 \cdot 10^{-8}$ s múlva lép ki a mágneses mezőből. Melyik atommagról van szó?

(*4 pont*) Közli: *Tornyos Tivadar Eörs,* Budapest

P. 5443. A KCl lapcentrált kockarendszerben kristályosodik, és a rácsállandója 628 pm. Legfeljebb mekkora lehet a röntgenfény hullámhossza, hogy létrejöhessen Bragg-reflexió az elemi cella testátlóira merőleges rácssíkokon? (Lásd *A röntgenszórás, más néven Bragg-reflexió* c. cikket lapunk 489. oldalán.)

(*4 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

P. 5444. Egy vékony, hosszú, függőleges, szigetelőrúdon súrlódásmentesen mozoghat egy kicsiny töltött golyócska. Ha egy ezzel azonos töltésű, ugyancsak kicsiny testet helyezünk a rúd tövébe, a mozgó golyó h_0 magasságban lesz egyensúlyban. Milyen messzire távolíthatjuk el a rúdtól vízszintes irányba az alsó testet úgy, hogy a rúdon lévő golyó még egyensúlyban lehessen valahol? Milyen magasan van ez a hely?

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata nyomán

Beküldési határidő: 2022. december 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS (Volume 72. No. 8. November 2022)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 480): **K. 739.** Phil made the following observations throughout a certain period in autumn: 1. During that period, there were 11 days when it rained. 2. A rainy morning was always followed by a sunny afternoon. 3. Altogether, there were 9 sunny mornings and 12 sunny afternoons. How many days were there when it did not rain at all? **K. 740.** In how many different ways is it possible to tile a 3×12 rectangle with twelve 1×3 rectangles? **K. 741.** Starting with the numbers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, in each step two numbers are chosen and increased by 1. Is it possible to achieve that each number is 10? **K/C. 742.** Danny is learning the alphabet. He has successfully named the first eight letters (A, B, C, D, E, F, G, H), but the order of the letters was not entirely correct. Only five of the eight letters were listed in the right position (i.e. in the position where it occurs in the alphabet). How many such orders of the eight letters are there? **K/C. 743.** The midpoint of side BC of a rectangle $ABCD$ is E, and F is the point lying closer to D which divides side CD in a $2:1$ ratio. The midpoint of line segment AE is G, and H is the point lying closer to E which divides line segment EF in a $2:1$ ratio. What fraction is the area of triangle FGH of the area of rectangle $ABCD$?

New exercises for practice – competition C (see page 480): **Exercises up to grade 10: K/C. 742.** See the text at Exercises **K. K/C. 743.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1738.** A natural number is called *balanced,* if the number of digits in its representation in decimal notation equals the number of different prime factors it has. For example, 21 is balanced, but 42 is not. Is it true that there are infinitely many *balanced* numbers? (Proposed by *K. A. Kozma,* Győr) **C. 1739.** Define the following functions on the largest possible subset of the set of real numbers: $f(x)=\sqrt{x+5}$, $g(x)=\frac{-2x+8}{5}$ and $h(x)=[x+3]$ (here $[a]$ denotes the integer part of the real number a, that is, the greatest integer which is not greater than a). Find the common points of the graphs of the three functions. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1740.** P is an interior point of side CD of a parallelogram $ABCD$, and Q is an interior point of side AB parallel to CD. The intersection of line segments PA and QD is M, and the intersection of line segments PB and QC is N. Assume that $MN \nparallel AB$, and MN intersects the line of CD at point X, and the line of AB at point Y. Prove that $DX=BY$. (*American competition problem*) **Exercises upwards of grade 11: C. 1741.** The diagonals AC and BD of a convex quadrilateral $ABCD$ intersect at M. Is it possible that the areas of triangles ABM, BCM, CDM and DAM, in this order, are four consecutive terms of a) an arithmetic sequence; b) a geometric sequence? (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **C. 1742.** Consider the following functions (defined on the largest possible subset of the set of real numbers): $f_0(x)=\frac{1}{1-x}$, and $f_n(x)=f_0\big(f_{n-1}(x)\big)$, for all positive integers n. Calculate the value of $f_{2022}(2022)$. (*Canadian problem*)

New exercises – competition B (see page 482): **B. 5270.** n^2 regular triangles of unit side are used to make a large regular triangle of side n units. The small triangles are coloured alternately dark and light. The numbers $1, 2, 3, \ldots, n^2$ are written in the triangles, as shown in the *figure.* What is the sum of the numbers in the dark triangles? (*3 points*) (Proposed by *L. Németh,* Fonyód) **B. 5271.** ABC is an isosceles right angled triangle with the right angle lying at vertex C. A', B' and C' are interior points of sides AB, BC and CA, respectively, such that triangle $A'B'C'$ is similar to ABC. Show that the midpoint of the side AB, the midpoint of line segment $A'B'$, and point C are collinear. (*3 points*) (Proposed by *E. Hajdu,* Sopron and *M. Hujter,* Budapest) **B. 5272.** A flea starts out from point (a,b) of the coordinate plane, where a, b are positive integers. With each jump, the flea will move one unit to the left or downwards. It keeps jumping until it reaches either the x axis or the y axis. What fraction of the possible sequences of jumps terminate on the x axis? (*4 points*) (Based on the idea of *D. Melján,* Kecskemét) **B. 5273.** D is a point on side AB of an equilateral triangle ABC, and E is a point on side BC such that $\angle BCD=45^\circ$ and $\angle CDE=30^\circ$. Show that $BE=2AD$. (*4 points*) (Proposed by *S. Róka,* Nyíregyháza) **B. 5274.** The product of the positive integers $a<b$ is a perfect square. Show that there is a positive integer x such that $a\leqslant x^2\leqslant b$. (*5 points*) (Proposed by *S. Róka,*

Nyíregyháza) **B. 5275.** Is there an irrational number a such that $a^{\sqrt{3}}$ is rational? (*5 points*) (Proposed by *B. Hujter,* Budapest) **B. 5276.** Prove that there exist infinitely many positive integers k for which the sum of the digits of 2^k is a) smaller; b) greater than the sum of the digits of 2^{k+1}. (*6 points*) (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **B. 5277.** The centre of the inscribed circle of triangle ABC is I. The midpoint of the circular arc BCA is F, and line FI intersects the circumscribed circle again at point M. Show that line CM passes through the external centre of similitude of the inscribed circle and the circumscribed circle. (*6 points*) (Proposed by *G. Kós,* Budapest)

New problems – competition A (see page 483): **A. 836.** For every $i \in \mathbb{N}$ let A_i, B_i and C_i be three finite and pairwise disjoint subsets of $\mathbb{N}$. Suppose that for every partition of $\mathbb{N}$ consisting of sets A, B and C there exists $i \in \mathbb{N}$ such that $A_i \subset A$, $B_i \subset B$ and $C_i \subset C$. Prove that there also exists a finite $S \subset \mathbb{N}$ such that for every partition of $\mathbb{N}$ consisting of sets A, B and C there exists $i \in S$ such that $A_i \subset A$, $B_i \subset B$ and $C_i \subset C$. (Submitted by *András Imolay,* Budapest) **A. 837.** Let all the edges of tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ be tangent to sphere S. Let a_i denote the length of the tangent from A_i to S. Prove that $\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i}\right)^2 > 2\left(\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{a_i^2}\right)$. (Submitted by *Viktor Vígh,* Szeged) **A. 838.** Sets $X \subset \mathbb{Z}^+$ and $Y \subset \mathbb{Z}^+$ are called comradely, if every positive integer n can be written as $n = xy$ for some $x \in X$ and $y \in Y$. Let $X(n)$ and $Y(n)$ denote the number of elements of X and Y, respectively, among the first n positive integers. Let $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$ be an arbitrary function that goes to infinity. Prove that one can find comradely sets X and Y such that $\frac{X(n)}{n}$ and $\frac{Y(n)}{n}$ goes to 0, and for all $\varepsilon > 0$ exists $n \in \mathbb{Z}^+$ such that $\frac{\min\{X(n),Y(n)\}}{f(n)} < \varepsilon$.

Problems in Physics

(see page 506)

M. 417. Make a chain from 50 paper clips. Hold the chain vertically at one of its ends such that the other end just touches the table. Drop the chain several times in succession, and measure each time the maximum size of the tangled chain and the distance between the two ends of the chain. Calculate the mean and standard deviation of the measured values. Compare these with the total length of the chain when stretched.

G. 793. At a pressure of 1000 hPa a force equivalent to the weight of a 15 ton object is distributed over the body of a human being. a) what is the surface area of the body of the person? b) what is this weight at the highest point of the High Tatra Mountains? **G. 794.** The cross-section of a U-shaped tube is 1.5 cm^2. The tube is filled with mercury such that there is high enough mercury in both arms of the tube. 0.1 dl of water is poured on the mercury in one arm of the tube. In which arm and by what distance will the surface of the liquid be higher? **G. 795.** The angle between two plane mirrors is 60°. At a distance of 30 cm from the intersection of the two mirrors, a ray of light is incident on one of the mirrors, its angle of incidence is 30°. What is the minimum time that it takes for the reflected light to travel from one mirror to the other? **G. 796.** An ozone generator produces 5 g of ozone per hour by corona discharge and delivers it by a fan to the surface, which is to be disinfected. a) How many ozone molecules are produced in one hour? b) The manual recommends 30 minutes to disinfect a surface of area 28 m^2. The air is clean and dust-free, so the generated ozone will only decompose on the surface. Estimate the number of ozone molecules per bacterium on a surface area of 10 square microns.

P. 5436. Two cars, which can be considered to be point-like, are travelling at constant speed, each on a straight motorway towards the intersection of the motorways. (The angle between the two motorways is 90°.) The speed of car A is $v_A = 50$ km/h, the speed of car B is $v_B = 40$ km/h. At a given moment, the distance of the two cars from the intersection is $d_A = 20$ km, and $d_B = 36$ km. *a*) what will the minimum distance between the two cars be? *b*) How long will it be until they are closest? **P. 5437.** The mass of one of the starts of a binary star system is three times as much as that of the other. The two celestial bodies (whose size is much smaller than their distance) orbit in approximately circular orbits around their centre of mass. Which star has greater kinetic energy, with respect to the coordinate system fixed to the centre of mass of the system, and by what factor is it greater than that of the other star? **P. 5438.** On a Spanish farm, the olives are crushed to a pulp with the olive press shown in the figure. The plane of the crushing wheel, of diameter 90 cm, shown by the dashed line in the *figure,* is at a distance of 75 cm from the shaft. The wheel rolls without sliding. The tail of the donkey is 180 cm from the shaft, and the donkey undergoes circular motion at a speed of 2.4 m/s. An olive weighing 1 g got stuck to the crushing wheel. *a*) What is the speed of the olive when it is at the topmost point A of the wheel? *b*) what is the acceleration of the olive at this point? *c*) What is the magnitude and the direction of the force exerted by the wheel on the olive when it is at point A? **P. 5439.** A spherical copper ball at 20 °C hanging on a thin insulator string is immersed in a large amount of water at 80 °C. After a time of t_1 the copper ball warms up to 50 °C. Later the experiment is repeated in such a way that the initial temperature of water is 20 °C, while the ball is at 80 °C. In this way the copper ball cools down to 50 °C during a time of t_2. What is shorter, t_1 or t_2, if the ball *a*) is just immersed into the water, or *b*) is submerged almost to the bottom of the container? **P. 5440.** At a distance of 2 km from a beehive there is a black locust forest, from where a single bee can bring nectar of volume 30 mm^3 to the hive in each turn. 55% of the mass of the collected nectar is water, and when making honey, the worker bees in the hive make some portion of the water evaporate, such that the finished honey contains only 19% water. During the 12 days of flowering, the colony of the hive produces 25 kg of honey. The bees cover the energy requirements of evaporation by eating some part of the nectar they brought to the hive. *a*) How many watts is the average power output of the colony in the hive invested in the evaporation of the water? *b*) Altogether how many kilometres are covered by the worker bees while the total amount of nectar is carried to the hive? The density of nectar is 1.2 $\frac{\text{kg}}{\text{dm}^3}$; 1 kg nectar gives 6000 kJ energy; in order to evaporate 1 kg water the bees need 2400 kJ energy. **P. 5441.** We have formed a circle from a piece of metal wire, and from the same wire we would like to to make one of the chords between the two points of the circle. Where should the chord be in order that the equivalent resistance between the two end points of the chord is maximum, and what is the value of this largest equivalent resistance? Let R be the resistance of a wire which has a length equal to the radius of the circle. **P. 5442.** A nucleus, which was initially at rest, was accelerated though a potential difference of 20 kV, and then it enters into a uniform magnetic field of induction 1.0 T. The magnetic induction is perpendicular to the velocity of the nucleus. The magnetic field is separated from the force-free region by a plane perpendicular to the particle's direction of travel. The particle leaves the magnetic field after $3.3 \cdot 10^{-8}$ s. Which nucleus is it? **P. 5443.** KCl crystallises in a face-centred cubic system and has a lattice constant of 628 pm. What is the maximum wavelength of X-ray that can be used to create a Bragg reflection on the lattice planes perpendicular to the diagonal of the unit cell in the crystal? **P. 5444.** A small charged ball can move frictionlessly along a long, thin, vertical, insulating rod. If an equally small body of the same charge is placed at the bottom of the rod, the moving ball will be in equilibrium at a height of h_0. How far away from the rod in the horizontal direction can we move the lower body so that the ball on the rod can still be in equilibrium somewhere. What is the height of this is this position?