amiből

$$(2) \qquad v_1^2+v_2^2+v_0^2+2v_2v_0=64.$$

A (2) egyenletből (1)-et kivonva kapjuk, hogy

$$v_0^2+2v_2v_0=28, \qquad \Rightarrow \qquad v_2=\frac{28-20{,}25}{9}=0{,}86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},$$

továbbá $v_1^2+v_2^2=36$ alapján

$$v_1=\sqrt{36-0{,}86^2}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=5{,}94\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

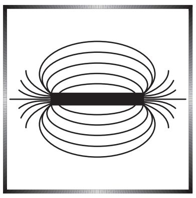
A darazsak elől éppen megmenekülő gyerek a keleti szélirányhoz képest $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{5{,}94}{0{,}86}=82^\circ$-os szögben szalad. Így azok a gyerekek menekülnek meg, akiknek sebessége legfeljebb 82°-kal tér el a keleti iránytól, ők a csoport $\frac{82}{180}\approx 0{,}45$ hányada, vagyis a 45%-a.

Csilling Dániel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A fenti megfontolások nem vették figyelembe a gyerekek alkotta kör r_0 sugarát. Ez a méret nyilván nullától különböző, ellenkező esetben a darazsak rögtön megcsíphetik az összes gyereket. A gyereket utolérő darázs a gyereknél r_0-lal hosszabb utat kell megtegyen, ez az útkülönbség azonban az üldözési idő növekedtével a darázs által megtett úthoz viszonyítva egyre jelentéktelenebbé válik. A gyereket éppen utolérő darázs repülési ideje viszonylag nagy, tehát a megoldás során alkalmazott $r_0\approx 0$ közelítés jogos.

(*G. P.*)

21 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 4, nem versenyszerű 1 dolgozat.

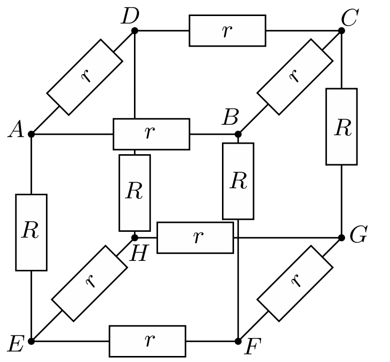


Fizika feladatok megoldása

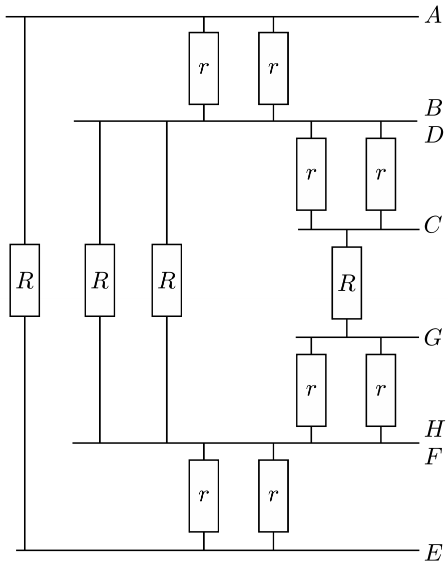
P. 5359. *Egy kocka élei kétféle ellenállásból épülnek fel. Valamelyik két szemközti laphoz tartozó* 8 db *él ellenállásának értéke r, míg az ezekre merőleges* 4 db *élt alkotó ellenállások értéke R. Határozzuk meg a hálózat eredő ellenállását az egyik R ellenállást közrefogó, két szomszédos csúcspont között!*

(*4 pont*) Közli: *Szekeres Béla,* Budapest

Megoldás. A vizsgált két szomszédos csúcspont legyen az *1. ábrán* látható A és E pont. A szimmetria miatt a D és a B, valamint az F és a H pontok azonos potenciálúak. Ezt kihasználva a kapcsolás *2. ábrán* láthatóra egyszerűsödik.



1. ábra



2. ábra

Két egyforma nagyságú ellenállás párhuzamos eredője feleakkora, mint az egyikük ellenállása (pl. BD és A között $r/2$).

A párhuzamosan, illetve sorosan kapcsolt ellenállásokra érvényes összefüggések szerint a BD és HF közötti ellenállás:

$$\frac{1}{R_{BD-HF}}=\frac{1}{(r/2+r/2+R)}+\frac{2}{R}=\frac{3R+2r}{R(R+r)},$$

tehát a BD és HF pontok között látható rész ellenállása:

$$R_{BD-HF}=\frac{R(R+r)}{3R+2r}.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az A és az E pontok közötti eredő ellenállásra érvényes:

$$\frac{1}{R_{A-E}}=\frac{1}{r+\frac{R(R+r)}{3R+2r}}+\frac{1}{R}=\frac{3R+2r}{2r^2+R^2+4Rr}+\frac{1}{R}=\frac{4R^2+2r^2+6Rr}{R(2r^2+R^2+4Rr)},$$

ahonnan a kérdéses eredő ellenállás

$$R_{A-E}=R\frac{R^2+2r^2+4Rr}{4R^2+2r^2+6Rr}.$$

Yokota Adan (Gödöllő, Török Ignác Gimn., 12. évf.)

47 dolgozat érkezett. Helyes 14 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 6, hibás 11, nem versenyszerű 3 dolgozat.

P. 5382. *Egy régi szalagos magnetofon gyors áttekercseléskor a szedőorsót állandó fordulatszámmal forgatja. A két orsó belső átmérője* 5 cm, *a külső átmérőjük pedig* 15 cm. *A teljesen teli orsóról a magnószalag átcsévélési ideje* 3 perc. *A szalagot az üres orsóra tekercselik át. Indítástól számítva mennyi idő múlva lesz a két orsón éppen egyenlő hosszúságú magnószalag?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László*, Budapest

Megoldás. Az áttekercselés kezdetekor a szedőorsón a magnószalag tekercsének külső sugara $r_1 = 2{,}5$ cm, $T = 3$ perc múlva pedig $r_2 = 7{,}5$ cm. A szalag hosszúsága az orsón lévő rész keresztmetszetének területével arányos. Legyen a tekercs külső sugara r_3 akkor, amikor a szalag fele éppen átkerült a szedőorsóra. A már áttekercselt rész keresztmetszetének területe ekkor megegyezik az áttekercseletlen rész területével:

$$r_3^2\pi - r_1^2\pi = r_2^2\pi - r_3^2\pi,$$

ahonnan

$$r_3 = \sqrt{\frac{r_1^2 + r_2^2}{2}} = 5{,}6 \text{ cm}.$$

A szedőorsó állandó fordulatszáma miatt a rajta lévő tekercs külső sugara időben egyenletesen növekszik. Ha a szalag felének áttekercseléséhez t időre van szükség, akkor fennáll:

$$\frac{r_3 - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{t}{T},$$

ahonnan a keresett idő:

$$t = \frac{5{,}6 - 2{,}5}{7{,}5 - 2{,}5} \cdot (3 \text{ min}) = 1{,}85 \text{ min}.$$

Megjegyzés. Látható, hogy szalag felének áttekercselési ideje nem a teljes tekercselési idő fele, hanem annál kicsit több.

Vigh Zsófia (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk. 11. évf.)

36 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 11, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5384. *Egy vékony, homogén, függőleges pálca tetején kicsiny golyó helyezkedik el. A pálca tömegéhez képest a golyó tömege elhanyagolható, és a pálca súrlódásmentesnek tekinthető asztalon áll. A pálca egyszer csak eldől. Mikor csapódik a golyó nagyobb sebességgel az asztallapra, ha a pálca tetejére van ragasztva, vagy ha egyszerűen csak rátettük a pálcára, ahonnan nagyon könnyen lebillenhet?*

(A merev testek forgómozgásáról rövid cikk olvasható a KöMaL honlapján.)*

(*4 pont*) Közli: *Honyek Gyula,* Veresegyház

* `https://www.komal.hu/cikkek/cikklista.h.shtml`.

Megoldás. *I. eset.* A golyó rögzítve van a pálca végéhez.

A pálca és a golyó tekinthető egyetlen merev testnek. Mivel a golyó tömege elhanyagolható, a teljes tehetetlenségi nyomaték megegyezik az m tömegű, ℓ hosszúságú homogén pálca saját (a tömegközéppontjára vonatkoztatott) tehetetlenségi nyomatékával:

$$\Theta = \tfrac{1}{12}m\ell^2. \tag{1}$$

A súrlódásmentességnek köszönhetően a pálca tömegközéppontja függőlegesen lefelé mozog, a pálca alsó végpontja pedig vízszintesen elcsúszik. Ha a becsapódás pillanatában a tömegközéppont sebessége v, a pálca szögsebessége pedig ω, akkor – az energiamegmaradás törvénye szerint – fennáll:

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2. \tag{2}$$

Tudjuk még, hogy a pálca elcsúszó végének függőleges irányú sebessége mindvégig nulla, tehát a pálca becsapódásának pillanatában is

$$v - \frac{\ell}{2}\omega = 0. \tag{3}$$

Az (1), (2) és (3) egyenletekből kapjuk, hogy

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\omega\ell}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\,m\ell^2\omega^2,$$

$$g = \omega^2\ell\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right),$$

tehát

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}.$$

A golyó becsapódási sebessége a pálca végpontjának sebességével egyezik meg:

$$v_1 = v + \frac{\ell}{2}\omega = \ell\omega = \sqrt{3g\ell}.$$

II. eset. Az m_0 tömegű golyó nincs rögzítve a pálcához, ezért annak megmozdulása után leesik a pálcáról és ℓ magasságból szabadon esik. A becsapódás v_2 sebességére fennáll:

$$m_0 g\ell = \frac{1}{2}m_0 v_2^2, \qquad \text{azaz} \qquad v_2 = \sqrt{2g\ell}.$$

Látható, hogy $v_1 > v_2$, tehát az *első* esetben csapódik a golyó nagyobb sebességgel az asztallapra.

Kovács Kinga (Kecskemét, Katona J. Gimn., 11. évf.)

42 dolgozat érkezett. Helyes 22 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 8, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 2, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5385. *Hányadrészére csökken az ablakon kiszökő hőáram, ha az egyrétegű, $d_{üveg} = 3$ mm vastag üvegből készült ablakot ugyanilyen üvegtáblából készült, kétrétegű ablakra cseréljük, melynek üvegei között $d_{levegő} = 7$ mm-es levegőrés van? A levegő és az üveg hővezetési tényezője $\kappa_{levegő} = 0{,}025$ W/(m K) és $\kappa_{üveg} = 1{,}2$ W/(m K).*

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. A hővezetés törvénye szerint

$$I_Q = \Delta T\,\frac{A\kappa}{d},$$

ahol $I_Q = \frac{Q}{t}$ az időegységenként átadott hő, $\Delta T = T_{\text{szoba}} - T_{\text{külső}}$ a hőmérséklet-különbség, A a felület nagysága, d a réteg vastagsága, κ pedig a hőátadást biztosító anyag hővezetési tényezője.

Megjegyzés. A hővezetési törvény alakilag nagyon hasonlít az elektromos vezetőkre alkalmazott Ohm-törvényre. A hőáram megfelelője az elektromos áramerősség, a hőmérséklet-különbség megfelelője a potenciálkülönbség (feszültség), az $\frac{A\kappa}{d}$ mennyiségnek pedig az elektromos ellenállás reciproka (a vezetőképesség) felel meg.

Az egyrétegű ablak esetében a hőáram

$$I_Q^{(1)} = A\Delta T\,\frac{\kappa_{\text{üveg}}}{d_{\text{üveg}}}.$$

A „kétrétegű" ablak (ami az üvegek közötti levegővel együtt tulajdonképpen háromrétegű) három sorosan kapcsolt „ellenállásnak" is tekinthető, és így

$$I_Q^{(2)} = A\Delta T\,\frac{1}{\frac{2d_{\text{üveg}}}{\kappa_{\text{üveg}}} + \frac{d_{\text{levegő}}}{\kappa_{\text{levegő}}}}.$$

A kérdéses hányados:

$$\frac{I_Q^{(2)}}{I_Q^{(1)}} = \frac{1}{2 + \frac{d_{\text{levegő}}}{d_{\text{üveg}}}\,\frac{\kappa_{\text{üveg}}}{\kappa_{\text{levegő}}}} = \frac{1}{2 + \frac{7}{3}\cdot\frac{1{,}2}{0{,}025}} = \frac{1}{2+112} = \frac{1}{114}.$$

A kétrétegű ablak tehát nem kétszer, hanem 114-szer jobb hőszigetelő, mint az egyrétegű.

Elekes Dorottya (Budapest-Fasori Evangélikus Gimn., 9. évf.)
dolgozata alapján

36 dolgozat érkezett. Helyes 15 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 7, hiányos (1–2 pont) 10, hibás 3, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5387. *Egy U_0 üresjárási feszültségű, R_{b} belső ellenállású telepre különböző R nagyságú külső ellenállásokat kapcsolunk.*

a) Mekkora maximális „hasznos" (a külső ellenállásra jutó) teljesítményt nyújthat ez a telep? Milyen R esetén érhetjük el a legnagyobb $P_{\max}$ teljesítményt?

b) Mutassuk meg, hogy bármely, $P_{\max}$-nál kisebb P hasznos teljesítmény két különböző, $R_1 \neq R_2$ nagyságú külső ellenállás esetén is megvalósulhat. Mekkora az R_1 és R_2 számtani, illetve mértani középértéke?

c) Mekkora a fenti két esetben mérhető kapocsfeszültségek összege?

d) Mekkora az R_1, illetve R_2 ellenálláson folyó áramok összege?

e) Az energialeadás hatásfokát a hasznos teljesítmény és a telep által leadott összes teljesítmény hányadosaként értelmezzük. Mekkora a fenti két eset hatásfokának összege?

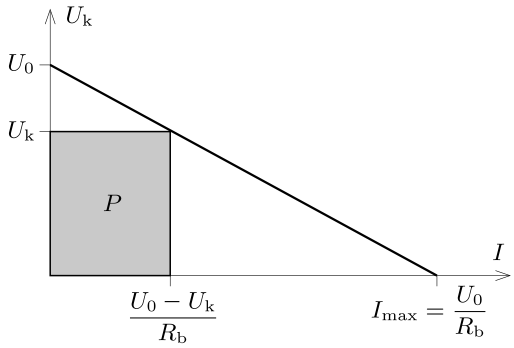
(*4 pont*) Közli: *Siposs András,* Budapest

Megoldás. *a*) Belátjuk, hogy a hasznos teljesítmény akkor a legnagyobb, amikor a külső ellenállásra jutó feszültség (a kapocsfeszültség) megegyezik a belső ellenállás feszültségével, vagyis $U_\mathrm{k} = U_\mathrm{b} = U_0/2$.

Ábrázoljuk az U_k kapocsfestültséget a terhelő áram (I) függvényében! Mivel

$$U_\mathrm{k} = U_0 - IR_\mathrm{b}, \qquad \text{azaz} \qquad I = \frac{U_0 - U_\mathrm{k}}{R_\mathrm{b}},$$

a függvény grafikonja egy egyenes (az ún. *munkaegyenes*), amelynek tengelymetszetei: U_0 és $I_{\max} = \frac{U_0}{R_\mathrm{b}}$, vagyis rendre az üresjárási feszültség és a rövidzárási áram (*1. ábra*).



1. ábra

A külső ellenállásra jutó teljesítmény általános esetben:

$$P = IU_\mathrm{k} = \frac{U_\mathrm{k}(U_0 - U_\mathrm{k})}{R_\mathrm{b}}, \tag{1}$$

ami az ábrán látható téglalap területével egyezik meg.

Mivel R_b adott érték, a hasznos teljesítmény akkor a legnagyobb, amikor $U_\mathrm{k}(U_0 - U_\mathrm{k})$ maximális. A számtani közép és a mértani közép közötti összefüggés szerint

$$\sqrt{U_\mathrm{k}(U_0 - U_\mathrm{k})} \leqslant \frac{U_\mathrm{k} + (U_0 - U_\mathrm{k})}{2} = \frac{U_0}{2},$$

tehát

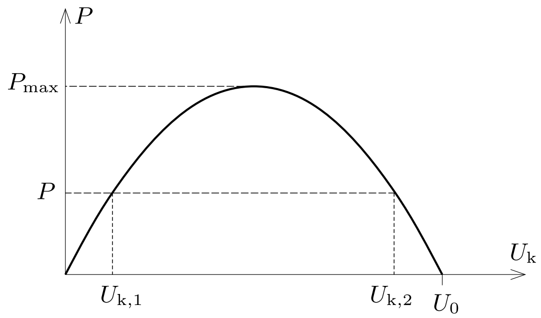
$$P \leqslant \frac{U_0^2}{4R_\mathrm{b}} = P_\mathrm{max}.$$

Az egyenlőség akkor teljesül, ha $U_\mathrm{k} = U_0 - U_\mathrm{k}$, vagyis ha a terhelő ellenállásra jutó kapocsfeszültség megegyezik a belső ellenállásra jutó feszültséggel, tehát ha $IR = IR_\mathrm{b}$, azaz $R = R_\mathrm{b}$.

b) Ábrázoljuk a hasznos teljesítményt a kapocsfeszültség függvényében. Az (1) összefüggés szerint

$$P = -\frac{1}{R_\mathrm{b}}\, U_\mathrm{k}^2 + \frac{U_0\, U_\mathrm{k}}{R_\mathrm{b}},$$

aminek grafikonja egy lefelé nyitott parabola $U_\mathrm{k} = U_0$ és $U_\mathrm{k} = 0$ zérushelyekkel (*2. ábra*).



2. ábra

Láthatjuk, hogy bármely – a maximálisnál kisebb – hasznos teljesítmény két különböző kapocsfeszültség esetén is megvalósulhat. Jelöljük ezt a két feszültséget $U_{\mathrm{k},1}$-gyel és $U_{\mathrm{k},2}$-vel. Ezekhez (lásd az 1. ábrát) különböző I_1 és I_2 áramerősség tartozik. A megfelelő terhelő ellenállások (R_1 és R_2) is különbözőek lesznek, hiszen $P = I_1^2 R_1 = I_2^2 R_2$ miatt

$$\frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{I_2}{I_1}\right)^2 \neq 1.$$

A terhelő ellenállás és a teljesítmény közötti kapcsolat:

$$P = \left(\frac{U_0}{R + R_\mathrm{b}}\right)^2 R,$$

amit algebrai átalakítások után így is felírhatunk:

$$R^2 - \left(\frac{U_0^2}{P} - 2R_\mathrm{b}\right) R + R_\mathrm{b}^2 = 0.$$

Adott P esetén a fenti egyenlet R-re nézve másodfokú, melynek gyökei R_1 és R_2. A gyökök és az együtthatók közötti összefüggés szerint

$$R_1 + R_2 = \frac{U_0^2}{P} - 2R_\mathrm{b}, \qquad \text{illetve} \qquad R_1 R_2 = R_\mathrm{b}^2,$$

vagyis a két különböző terhelő ellenállás számtani középértéke

$$A=\frac{R_1+R_2}{2}=\frac{U_0^2}{2P}-R_\mathrm{b},$$

a mértani középértékük pedig

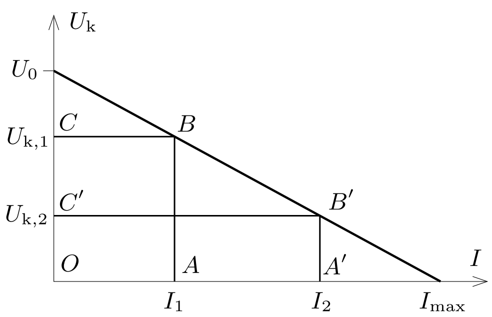
$$G=\sqrt{R_1R_2}=R_\mathrm{b}.$$

Az ismert $A\geqslant G$ egyenlőtlenség szerint

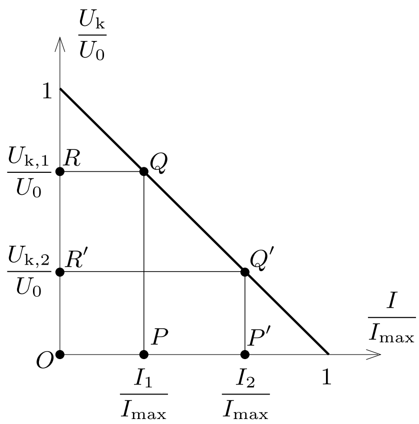
$$\frac{U_0^2}{2P}-R_\mathrm{b}\geqslant R_\mathrm{b},\qquad \text{azaz}\qquad P\leqslant\frac{U_0^2}{4R_\mathrm{b}}=P_\mathrm{max},$$

ahogy ezt már korábban beláttuk.

c) Térjünk vissza a kapocsfeszültség és az áramerősség 1. ábrán látható kapcsolatához. Ha adott U_0 és R_b mellett kétféle módon is megvalósul a hasznos teljesítmények egyenlősége, akkor a *3. ábrán* látható $OABC$ és $OA'B'C'$ téglalapok területe megegyezik.



3. ábra



4. ábra

Ha mind az áramerősséget, mind pedig a kapocsfeszültséget elosztjuk a maximális értékükkel, és az ezek közötti kapcsolatot ábrázoljuk (*4. ábra*), akkor a munkaegyenes meredeksége -1 lesz, miközben a két téglalap területe továbbra is egyenlő marad, hiszen

$$\frac{U_{\mathrm{k},1}}{U_0}\cdot\frac{I_1}{I_\mathrm{max}}=\frac{U_{\mathrm{k},2}}{U_0}\cdot\frac{I_2}{I_\mathrm{max}}=\frac{P}{U_0I_\mathrm{max}}.$$

A 4. ábra szimmetriájából következik, hogy az egyforma területű $OPQR$ és az $OP'Q'R'$ téglalap egybevágó, egymásból 90°-os elforgatással kapható meg. Ezek szerint

$$\frac{U_{\mathrm{k},1}}{U_0}+\frac{U_{\mathrm{k},2}}{U_0}=1,$$

vagyis a két esetben mérhető kapocsfeszültségek összege éppen az U_0 üresjárati feszültséggel egyezik meg.

d) Ugyancsak a 4. ábráról olvashatjuk le, hogy

$$\frac{I_1}{I_{\max}} + \frac{I_2}{I_{\max}} = 1,$$

tehát az ugyanakkora hasznos teljesítményhez tartozó áramerősségek összege a rövidzárási árammal egyenlő:

$$I_1 + I_2 = I_{\max} = \frac{U_0}{R_\mathrm{b}}.$$

e) A hasznos teljesítmény és a telep által leadott teljesítmény hányadosa (a hatásfok):

$$\eta = \frac{IU_\mathrm{k}}{IU_0} = \frac{U_\mathrm{k}}{U_0}.$$

A két eset hatásfokának összege (a *c*) kérdésre adott választ felhasználva):

$$\eta_1 + \eta_2 = \frac{U_{\mathrm{k},1}}{U_0} + \frac{U_{\mathrm{k},2}}{U_0} = 1.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)
dolgozatának felhasználásával

26 dolgozat érkezett. Helyes 19 megoldás. Hiányos (2–3 pont) 5, hibás 2 dolgozat.

P. 5388. *Egy* 15 mW-*os lézer* $\lambda = 632{,}8$ nm *hullámhosszú, lineárisan polarizált fénye egy* 2 mm *átmérőjű körkörös apertúrán lép ki a lézer dobozából.*

a) Mekkora az elektromos térerősség maximális értéke a lézernyalábban?

b) Mekkora az impulzusa a lézernyaláb 1 méter *hosszú darabjának?*

(*4 pont*) Példatári feladat nyomán

Megoldás. *a*) A lézernyaláb $s = 1$ m hosszúságú utat

$$t = \frac{s}{c} = \frac{1\ \mathrm{m}}{3\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}} = 3{,}33\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}$$

idő alatt tesz meg. Ennyi idő alatt a P teljesítményű lézer

$$W = P\,t = \left(15\cdot 10^{-3}\ \mathrm{W}\right)\cdot\left(3{,}33\cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}\right) = 5\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

elektromágneses energiát bocsát ki. A nyaláb 1 méter hosszú, 3,14 mm^2 keresztmetszetű darabjának térfogata $V_0 = 3{,}14\cdot 10^{-6}$ m^3.

A lézernyaláb energiasűrűsége (térfogategységre jutó energiája)

$$w = \frac{W}{V_0} = \frac{5\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}}{3{,}14\cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^3} = 1{,}59\cdot 10^{-5}\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}.$$

Az energiasűrűség kifejezhető a lineárisan polarizált fény elektromos térerősségének maximális értékével is:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2_{\max}.$$

Megjegyzés. Az elektromágneses síkhullám energiasűrűsége egy adott $\boldsymbol{r}$ helyen

$$w(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2(\boldsymbol{r}) + \frac{1}{2}\varepsilon_0\, c^2 B^2(\boldsymbol{r}) = \varepsilon_0\, E^2(\boldsymbol{r}).$$

A lineárisan polarizált síkhullámban az elektromos térerősség

$$E(\boldsymbol{r}) = E_{\max}\cdot \sin\frac{2\pi}{\lambda}x$$

módon változik, így az átlagos értéke:

$$w_{\text{átlag}} = \varepsilon_0\, E^2_{\max}\cdot\left(\sin^2\frac{2\pi}{\lambda}x\right)_{\text{átlag}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\, E^2_{\max}.$$

Ha a lézerfény cirkulárisan poláros, abban az elektromos térerősség nagysága a nyaláb mentén nem változik, így az energiasűrűség a fenti érték kétszerese lenne.

A nyalábban az elektromos térerősség maximális értéke a fentiek szerint:

$$E_{\max} = \sqrt{\frac{2w}{\varepsilon_0}} = 1{,}9\cdot 10^3\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = 1{,}9\ \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{mm}}.$$

b) A lézerfény fotonjainak energiája:

$$E_{\text{foton}} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{\left(6{,}63\cdot 10^{-34}\ \mathrm{Js}\right)\left(3\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}\right)}{632{,}8\cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}} = 3{,}14\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

A nyaláb 1 méter hosszú darabjában lévő fotonok száma:

$$n = \frac{W}{E_{\text{foton}}} = \frac{5\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}}{3{,}14\cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}} = 1{,}59\cdot 10^8.$$

Minden foton

$$P_{\text{foton}} = \frac{h}{\lambda} = 1{,}05\cdot 10^{-27}\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}$$

impulzussal rendelkezik, így a nyaláb 1 méter hosszú darabjának összimpulzusa:

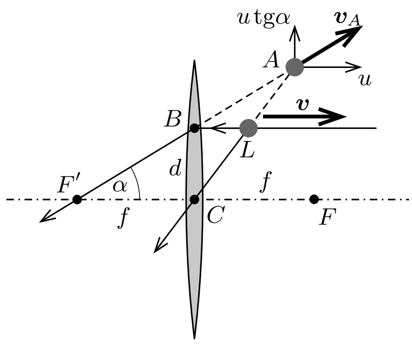
$$P_{\text{összes}} = n\cdot P_{\text{foton}} = 1{,}66\cdot 10^{-19}\ \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}.$$

Albert Máté (Szeged, SZTE Gyak. Gimn. és Ált. Isk., 11. évf.) és
Szabó Márton (Szeghalom, Péter András Gimn. és Koll., 11. évf.)
dolgozata alapján

13 dolgozat érkezett. Helyes 6 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 5389. *Egy (pontszerűnek tekinthető) légy repül állandó v sebességgel az f fókusztávolságú lencse optikai tengelyével párhuzamosan, attól d távolságra. Legalább mekkora nagyságú a légy és a légy képének relatív sebessége?*

(*5 pont*) *Észtországi versenyfeladat* nyomán



1. ábra

Megoldás. Többféle lehetőséget fogunk vizsgálni. Kezdjük azzal, amikor gyűjtőlencsénk van, és a légy (L) a lencse B pontjától indulva v sebességgel repül jobbra (*1. ábra*). Ameddig a légy a fókusztávolságnál közelebb van még a lencséhez, az A kép látszólagos (virtuális), és az $F'B$ egyenesen mozog ugyancsak jobb felé. Jelöljük az A pont sebességének az optikai tengellyel párhuzamos komponensét u-val. Mivel az $F'B$ egyenes meredeksége

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{BC}{F'C} = \frac{d}{f},$$

az A pont sebességvektorának az optikai tengelyre merőleges irányú komponense $u\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

A légy sebességvektora: $\boldsymbol{v} = (v, 0)$, a képé pedig $\boldsymbol{v}_A = (u, u\,\mathrm{tg}\,\alpha)$. A légy és a légy képének relatív sebessége

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_A = (v - u, -u\,\mathrm{tg}\,\alpha).$$

Keressük azt az u-t, amire a relatív sebesség nagysága, vagyis

$$v_{\mathrm{rel}} = |\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}| = \sqrt{(v-u)^2 + (u\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2}$$

a lehető legkisebb. Ezt deriválással könnyen meg lehet kapni, de elemi módszerekkel is célhoz érhetünk, ha v_{rel} helyett

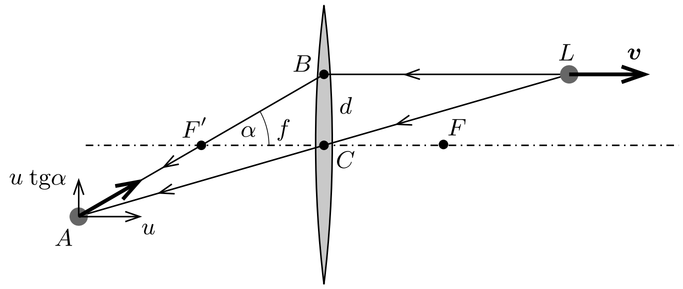
$$v_{\mathrm{rel}}^2 = (v-u)^2 + (u\,\mathrm{tg}\,\alpha)^2 \equiv (1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha)u^2 - 2vu + v^2$$

legkisebb értékét keressük meg. Ez u-nak másodfokú kifejezése, aminek minimuma teljes négyzetté alakítással is meghatározható. Mivel $\mathrm{tg}\,\alpha = d/f$, ezt kapjuk:

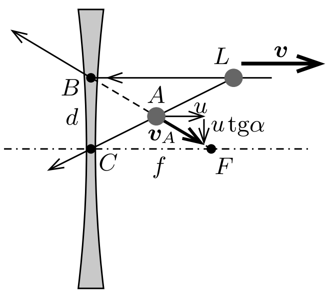
$$v_{\mathrm{rel}}^2 = \left(u\frac{\sqrt{f^2+d^2}}{f} - \frac{vf}{\sqrt{f^2+d^2}}\right)^2 + v^2\frac{d^2}{f^2+d^2} \geqslant \left(v\frac{d}{\sqrt{f^2+d^2}}\right)^2,$$

vagyis a légynek és a virtuális képének relatív sebessége legalább $vd/\sqrt{f^2+d^2}$.

Amikor a légy már távolabb került a lencsétől, mint annak fókusztávolsága, az A kép valódivá válik (*2. ábra*). Az A pont sebességét most is $(u, u\,\mathrm{tg}\,\alpha)$ alakban írhatjuk fel, éppen úgy, mint a látszólagos kép esetében. A relatív sebességet és annak legkisebb értékét is ugyanazok az összefüggések határozzák meg, és így ebben a tartományban is v_{rel} legkisebb értéke $vd/\sqrt{f^2+d^2}$.



2. ábra



3. ábra

Vizsgáljuk meg most a szórólencse esetét (*3. ábra*)! A légy képe – a légy helyzetétől függetlenül – mindig látszólagos, és a sebességvektora így adható meg:

$$\boldsymbol{v}_A = (u, -u \operatorname{tg} \alpha), \quad \text{ha} \quad \boldsymbol{v} = (v, 0).$$

A relatív sebesség ebben az esetben

$$\boldsymbol{v}_{\text{rel}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_A = (v - u, u \operatorname{tg} \alpha),$$

aminek abszolút értéke:

$$v_{\text{rel}} = \sqrt{(v-u)^2 + (u \operatorname{tg} \alpha)^2}.$$

Ennek a minimumát keressük u függvényében. Látjuk, hogy ez a kifejezés ugyanaz, mint amit a gyűjtőlencsénél kaptunk, így a legkisebb értéke is ugyanakkora, nevezetesen $vd/\sqrt{f^2+d^2}$.

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

13 dolgozat érkezett. Helyes Antalóczy Szabolcs, Biebel Botond, Gábriel Tamás, Kertész Balázs és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (2–3 pont) 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 414. Mérjük meg a csúszási súrlódási együttható értékét több, különböző finomságú csiszolópapír és egy fahasáb között!

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy