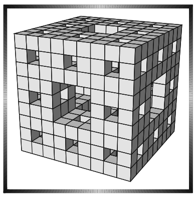
C. 1727. Fúrjunk át egy R sugarú tömör gömböt egy, a gömb középpontján átmenő egyenes mentén egy r sugarú hengeres fúróval, ahol $r < R$. Fejezzük ki a keletkezett maradéktest térfogatát a maradéktest m magasságának függvényében.

Javasolta: *Szabó Bertalan* (Miskolc, 1986)

Beküldési határidő: 2022. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5246–5253.)

B. 5246. 14 ember ül egy asztal körül, mindenki kék vagy sárga pólóban. Legfeljebb hány emberre teljesülhet, hogy a két szomszédja különböző színű pólóban van?

(*3 pont*)

B. 5247. Egy kötél két végpontját a talajhoz rögzítettük úgy, hogy a két végpont távolsága kisebb a kötél hosszánál. A kötél középső pontját 150 cm magasságra felemelve a kötél megfeszül. A kötél egyik végétől 90 cm-re lévő pontját felemelve a kötél 90 cm magasan feszül meg. Milyen hosszú a kötél?

(*3 pont*)

B. 5248. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+x+y=\frac{8}{xy},$$
$$x(x+1)+y(y+1)=6.$$

(*4 pont*)

B. 5249. Jelöljük az ABC háromszög beírt körének érintési pontjai által meghatározott háromszög területét T_0-lal, a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög területét pedig T_1-gyel. Mutassuk meg, hogy T_0 és T_1 mértani közepe megegyezik az ABC háromszög területével.

(*5 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál*

B. 5250. Igazoljuk, hogy minden nemnegatív egész n számra

$$2^{2^n(n-2)+n+2} \leqslant (2^n)! \leqslant 2^{2^n(n-1)+1}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Blahota István* (Nyíregyháza)

B. 5251. Vegyük fel azt az $ABCD$ téglalapot a koordinátarendszerben, amelynek csúcsai $A(0,0)$, $B(2022,0)$, $C(2022,2)$, $D(0,2)$. Tekintsük azokat az egységnyi területű háromszögeket, amelyek mindhárom csúcsa a téglalap hosszabbik oldalpárjának egy-egy rácspontja. Ezeket a háromszögeket szeretnénk megszínezni úgy, hogy azonos színű háromszögeknek nem lehet közös belső pontjuk. Legalább hány színre van ehhez szükségünk?

(*5 pont*) Javasolta: *Nagy Zoltán Lóránt* (Budapest)

B. 5252. Adott egy hat csúcsú $ABCA_1B_1C_1$ poliéder, amelynek ABC és $A_1B_1C_1$ két háromszöglapja, továbbá az AA_1, BB_1 és CC_1 élei párhuzamosak. Az AA_1B_1B, BB_1C_1C és CC_1A_1A trapézlapok átlóinak metszéspontjai P, Q és R. Mutassuk meg, hogy az $ABCPQR$ és $A_1B_1C_1PQR$ poliéderek térfogata megegyezik.

(*6 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5253. Igaz-e, hogy ha $\binom{n}{k}$ páros, akkor az n elemű S halmaz k elemű részhalmazai párokba rendezhetők úgy, hogy az egy párba tartozó részhalmazok szimmetrikus differenciája mindig 2 elemű?

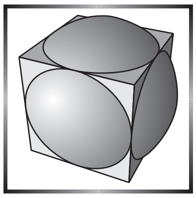
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2022. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (827–829.)



A. 827. Legyen $n>1$ egész szám. Egy pakliban n-féle színű és n-féle értékű kártya van, minden szín és érték párból pontosan egy, azaz összesen n^2 darab. A paklit megkeverjük, és kiosztjuk n játékos között úgy, hogy mindenki n darab kártyát kapjon. A játékosok azt akarják megcsinálni, hogy egy általuk választott sorrendben leülnek egy kör alakú asztalhoz, és az első játékostól kezdve sorban leraknak egy-egy lapot, míg végül mindenki lerakta az összes lapját úgy, hogy mindig olyan kártyát kell rakni, amely sem színben, sem értékben nem egyezik meg a közvetlenül előtte lerakott kártyával (az elsőnek lerakott kártya bármi lehet). Mely n-ekre lehetséges, hogy úgy lett kiosztva a pakli, hogy a játékosok ezt nem tudják megcsinálni? (A játékosok együttműködnek egymással, és látják egymás lapjait.)

Javasolta: *Kocsis Anett* (Budapest)