A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1721–1727.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1721. Boglárka felírt sorban egymás után 2022 darab számot úgy, hogy a második számot elosztva az elsővel, a hányados éppen a harmadik számmal lett egyenlő, és így tovább, például a hetedik szám egyenlő a hatodik és az ötödik szám hányadosával. Melyik számot írta fel utoljára Boglárka, ha az első a 20, a második pedig a 22 volt?

C. 1722. Az $ABCD$ négyszögről tudjuk, hogy a AD oldal ugyanolyan hosszú, mint a DC oldal, valamint hogy a DAB szöget α-val jelölve $ABC\sphericalangle = 2\alpha$, $BCD\sphericalangle = 3\alpha$ és $CDA\sphericalangle = 4\alpha$. Bizonyítsuk be, hogy az AB oldal kétszer olyan hosszú, mint az AD oldal.

(*Német versenyfeladat*)

Feladatok mindenkinek

C. 1723. Határozzuk meg mindazon, csupa különböző számjegyből álló, legfeljebb négyjegyű $\overline{abcd}$ számokat (ahol $a = 0$ is megengedett), amelyekre $9 \cdot \overline{abcd} = \overline{acbcd}$.

Javasolta: *Siposs András* (Budapest)

C. 1724. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 30^\circ$. Mekkorák a háromszög ismeretlen szögei, ha a háromszög C pontból induló súlyvonala 45°-os szöget zár be az AB egyenessel?

C. 1725. Legyen p pozitív prímszám. Tudjuk, hogy az $x^2 - px - 580p = 0$ egyenlet gyökei egész számok. Határozzuk meg p értékét.

Javasolta: *Szalai Máté* (Szeged)

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1726. Mutassuk meg, hogy ha x, y, z olyan valós számok, amelyekre

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} = 1, \quad \text{akkor} \quad \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = 0.$$

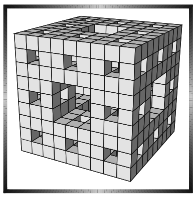
Adjunk meg a feltételt teljesítő valós számokat.

C. 1727. Fúrjunk át egy R sugarú tömör gömböt egy, a gömb középpontján átmenő egyenes mentén egy r sugarú hengeres fúróval, ahol $r < R$. Fejezzük ki a keletkezett maradéktest térfogatát a maradéktest m magasságának függvényében.

Javasolta: *Szabó Bertalan* (Miskolc, 1986)

Beküldési határidő: 2022. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5246–5253.)

B. 5246. 14 ember ül egy asztal körül, mindenki kék vagy sárga pólóban. Legfeljebb hány emberre teljesülhet, hogy a két szomszédja különböző színű pólóban van?

(*3 pont*)

B. 5247. Egy kötél két végpontját a talajhoz rögzítettük úgy, hogy a két végpont távolsága kisebb a kötél hosszánál. A kötél középső pontját 150 cm magasságra felemelve a kötél megfeszül. A kötél egyik végétől 90 cm-re lévő pontját felemelve a kötél 90 cm magasan feszül meg. Milyen hosszú a kötél?

(*3 pont*)

B. 5248. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}+x+y=\frac{8}{xy},$$
$$x(x+1)+y(y+1)=6.$$

(*4 pont*)

B. 5249. Jelöljük az ABC háromszög beírt körének érintési pontjai által meghatározott háromszög területét T_0-lal, a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög területét pedig T_1-gyel. Mutassuk meg, hogy T_0 és T_1 mértani közepe megegyezik az ABC háromszög területével.

(*5 pont*) Javasolta: *Bártfai Pál*

B. 5250. Igazoljuk, hogy minden nemnegatív egész n számra

$$2^{2^n(n-2)+n+2} \leqslant (2^n)! \leqslant 2^{2^n(n-1)+1}.$$

(*5 pont*) Javasolta: *Blahota István* (Nyíregyháza)