normálvektorát kapjuk: $\mathbf{n} = \left(\frac{8}{3}; -2\right)$. Használjuk ezt a normálvektort és a parabola fókuszpontját. A visszavert fénysugár egyenlete:

$$\frac{8}{3}x - 2y = \frac{16}{3} - 12.$$

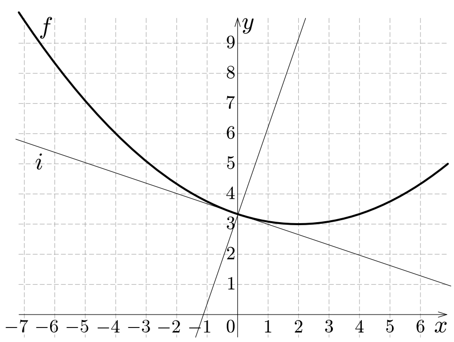
Rendezve az egyenletet: $4x - 3y = -10$.

c) A beesési merőleges meredekségének és az *a*) részben szereplő érintő meredekségének szorzata -1.

$$m_b \cdot m = m_b \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1, \quad m_b = 3.$$

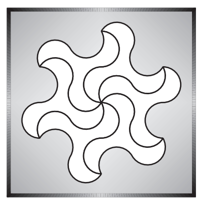
A beesési merőleges irányszöge: $\operatorname{tg}\alpha = 3$, $\alpha = 71{,}57°$.

Az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög a fent számított szög pótszöge, így $\beta = 90° - \alpha = 18{,}43°$.



Jócsik Csilla
Győr

Matematika feladatok megoldása



B. 5164. *Két játékos 3 győzelemig tartó kő-papír-olló párbajt játszik. Tegyük fel, hogy mindketten minden menetben véletlenszerűen (egymástól és a korábbi mutatásoktól függetlenül), $\frac{1}{3} : \frac{1}{3} : \frac{1}{3}$ eséllyel választják ki, hogy mit mutatnak. Adjuk meg a menetek számának várható értékét.*

(*5 pont*)

I. megoldás. Legyen $f(a,b)$ a menetek számának várható értéke, ha a győzelemhez az első játékosnak (akit A-val jelölünk a későbbiekben) a, a másodiknak (őt pedig B-vel) b menetet kell nyernie (ez az (a,b)-vel jelölt párbaj).

Amikor az (a,b) párbajban az első menet lezajlott, három dolog lehetséges. Ha az első játékos nyert, akkor neki már csak $a-1$ menetet kell nyernie, vagyis az $(a-1,b)$ párbaj alakult ki. Ha a második nyert, akkor $(a,b-1)$ párbaj alakult ki. Ha pedig döntetlen, akkor továbbra is (a,b) párbajról van szó. Az alábbi táblázatból leolvasható, hogy minden eset a fenti három közül 1/3 eséllyel alakul ki.

	B kő	B papír	B olló
A kő	$=$	B nyert	A nyert
A papír	A nyert	$=$	B nyert
A olló	B nyert	A nyert	$=$

Ebből nyerhetünk egyenletet $f(a,b)$-re. Ha A nyert, akkor a hátralévő menetek várható száma $f(a-1,b)$, ha B nyert, akkor $f(a,b-1)$. Ha döntetlen alakult ki, akkor a hátralévő menetek várható száma $f(a,b)$. Minden esetben egy menet már lement, így 1-et kell adni a fenti értékekhez. Mivel a várható érték additív, ebből

$$f(a,b)=\frac{1}{3}\big(f(a-1,b)+1\big)+\frac{1}{3}\big(f(a,b-1)+1\big)+\frac{1}{3}\big(f(a,b)+1\big),$$

$$\frac{2}{3}f(a,b)=1+\frac{1}{3}\big(f(a-1,b)+f(a,b-1)\big),$$

$$f(a,b)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(a-1,b)+f(a,b-1)\big).$$

Továbbá nyilván $f(a,b)=f(b,a)$, és $a=0$ vagy $b=0$ esetén $f(a,b)=0$. Ez már elég ahhoz, hogy kiszámoljuk $f(a,b)$-t minden a,b-re. Azonban $a=b=3$-ra inkább célszerű konkrét számokkal végigszámolni, mint meghatározni f explicit alakját.

Vágjunk is bele:

$$f(1,1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(0,1)+f(1,0)\big)=\frac{3}{2},$$

$$f(2,1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(1,1)+f(2,0)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4},$$

$$f(2,2)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(1,2)+f(2,1)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)=\frac{15}{4},$$

$$f(3,1)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(2,1)+f(3,0)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{21}{8},$$

$$f(3,2)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(3,1)+f(2,2)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{21}{8}+\frac{15}{4}\right)=\frac{75}{16},$$

$$f(3,3)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\big(f(2,3)+f(3,2)\big)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{75}{16}+\frac{75}{16}\right)=\frac{99}{16}.$$

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Osszuk fel a párbajt meccsekre. Egy meccs addig tart, amedig valamelyik játékos meg nem nyer egy menetet. Tehát egy meccs egy vagy több menetből áll, melyek közül az utolsó kivételével mindegyik menet döntetlen. Értelemszerűen az nyeri a párbajt, aki előbb nyer meg három meccset.

Minden menet $\frac{1}{3}$ eséllyel lesz döntetlen, függetlenül az előző menettől. Így annak a valószínűsége, hogy egy meccs pontosan n menetből áll, $m_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{3}$.

Tehát az egy meccsen belüli menetek számának várható értéke így számítható ki:

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} = nm_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{2}{3} =$$

$$= \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{2}.$$

(Valószínűségszámításban képzett megoldók azt is mondhatják erre, hogy az egy meccsen belüli menetek száma geometriai eloszlású, $p = \frac{2}{3}$ paraméterrel, tehát várható értéke $\frac{1}{p} = \frac{3}{2}$).

Mivel a játék szimmetrikus, így mindegyik meccset $\frac{1}{2}$ eséllyel nyeri A játékos és $\frac{1}{2}$ eséllyel B játékos. A különböző meccsek eredményei pedig függetlenek egymástól. Ezt felhasználva határozzuk meg a párbaj eldöntéséhez szükséges meccsek számának eloszlását.

- Akkor elég 3 meccs, ha az első három meccset ugyanaz nyeri. Ennek esélye

$$p_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}.$$

- Akkor dől el a 4. meccs végén a párbaj, ha az első négy menet győzteseinek sorozata a következő 6 sorozat valamelyike: $AABA, ABAA, BAAA$ (ilyenkor A nyer), $ABBB$, $BABB$, $BBAB$ (ilyenkor B nyer). Egy-egy ilyen sorozat esélye $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, tehát annak az esélye, hogy 4 meccsből áll a párbaj:

$$p_4 = 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}.$$

- Legkésőbb az 5. meccs végére el kell dőljön a párbaj (a skatulyaelv alapján az 5 meccsből legalább 3-at ugyanannak az embernek kell nyerni), így annak az esélye, hogy 5 meccsből áll a párbaj:

$$p_5 = 1 - p_3 - p_4 = \frac{3}{8}.$$

Legyen most X_i az a valószínűségi változó, amelyik megadja az i. meccsen belüli menetek számát. Ha a 4., illetve 5. meccs nem valósul meg, akkor $X_4 = 0$ (illetve $X_5 = 0$).

Így a teljes meccs meneteinek száma éppen $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$, ennek várható értéke (felhasználva, hogy a várható érték additív):

$$\mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) + \mathbb{E}(X_4) + \mathbb{E}(X_5).$$

Az egyes $\mathbb{E}(X_i)$ értékeket egyenként meg tudjuk mondani:

- $\mathbb{E}(X_1)=\mathbb{E}(X_2)=\mathbb{E}(X_3)=M$, hiszen az első három meccs biztosan megvalósul.
- $\mathbb{E}(X_4)=M(1-p_3)$, hiszen X_4 értéke p_3 eséllyel 0, míg $1-p_3$ eséllyel lesz 4. meccs, így ha $n\neq 1$, akkor
$$P(X_4=n)=(1-p_3)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}.$$
- $\mathbb{E}(X_5)=Mp_5$, hiszen X_5 értéke p_3+p_4 eséllyel 0, míg p_5 eséllyel megvalósul ez a meccs, így
$$P(X_5=n)=p_5\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}.$$

Tehát a feladat kérdésére a válasz
$$M(3+(1-p_3)+p_5)=\frac{3}{2}\left(1+1+1+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{33}{8}=\frac{99}{16}.$$

Megjegyzések. 1. Ha Y-nal jelöljük a meccsek számát jelölő valószínűségi változót, akkor
$$\mathbb{E}(Y)=3\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\frac{3}{8}+5\cdot\frac{3}{8}=\frac{33}{8},$$
azaz éppen teljesül, hogy:
$$\mathbb{E}(X_1)\cdot\mathbb{E}(Y)=\frac{99}{16}.$$
Így is kiszámítható lenne a feladat végeredménye?

Mivel X_1 és Y független, teljesül $\mathbb{E}(X_1)\cdot\mathbb{E}(Y)=\mathbb{E}(X_1Y)$, de X_1Y általában nem egyezik meg a menetek számával (bár némi köze van hozzá). Tehát erre nem tudunk hivatkozni.

Valójában ez a kiszámítási mód egy mély és általános összefüggés, az úgynevezett Wald-azonosság (ld. `https://en.wikipedia.org/wiki/Wald's_equation`) egy egyszerű speciális esete.

Az azonosság feltalálójáról, Wald Ábrahámról érdemes elolvasni ezt a történetet is: `https://ematlap.hu/konyvespolc-2017-03/443-hogy-ne-tevedjunk-wald-abraham-es-a-hianyzo-lovedeknyomok`.

2. A leggyakoribb hiba a második (honlapon is közölt) megoldás végi megjegyzésnek megfelelő hiba volt.

3. Emellett több olyan versenyző is volt, aki nem volt tisztában a várható érték fogalmával, és azt hitte, hogy a feladat azt kérdezi, hogy melyik a legnagyobb valószínűségű (egész) menetszám.

4. A feladat első részét sokan a honlapihoz hasonlóan oldották meg, de a második részben gyakoribb volt a megjegyzésként írt hibás indoklást alkalmazó megoldás, mint az ott leírt helyes megoldás. Többen is felírták az egyes menetszámokhoz tartozó valószínűségeket a menetszámok n függvényében, és ezt helyettesítették be a várható érték megfelelő képletébe. Így egy igen bonyolult összeghez jutottak, melynek kiszámításával hosszú oldalakon át vesződtek. Szerencsére ennél többen alkalmazták a Markov-láncokkal történő megoldást, mely segítségével sokkal barátságosabb számolás után könnyedén eljutottak a helyes eredményhez.

54 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 25 versenyző: Beinschroth Ninett, Csizmadia Miklós, Diaconescu Tashi, Duchon Márton, Fekete Richárd, Han Ziying, Hegedűs Dániel, Koleszár Domonkos, Kovács Alex, Kökényesi Márk Péter, Lenkey Gyöngyvér, Lovas Márton, Mácsai Dániel, Metzger Ábris András, Molnár-Szabó Vilmos, Nagy Levente, Németh Márton, Simon László Bence, Szanyi Attila, Sztranyák Gabriella, Terjék András József, Varga Boldizsár, Velich Nóra, Wiener Anna, Zömbik Barnabás. 4 pontos 10, 3 pontos 3, 2 pontos 4, 1 pontos 6, 0 pontos 5 dolgozat.

B. 5178. *Legyen x pozitív valós szám. Mutassuk meg, hogy*

$$\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\leqslant\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}+\frac{8}{\sqrt{x}}\right).$$

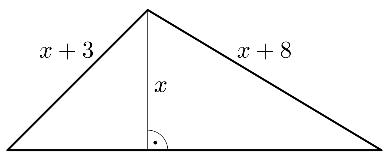
(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

I. megoldás. Először is jegyezzük meg, hogy egyenlőtlenségünk minden pozitív valós számra értelmes (a negatívokra nem, de a feladat ezt kizárta).

Ezután szorozzuk meg x-szel az egyenlőtlenség mindkét oldalát, a kapott egyenlőtlenség ekvivalens lesz az eredetivel, és mivel x pozitív, nem fordul meg a relációjel. Ezt kapjuk: $x\left(\sqrt{6x+9}+\sqrt{16x+64}\right)\leqslant(x+3)(x+8)$. Észrevehetjük, hogy a bal oldalon a gyökjel alatti tagok felírhatók két szám négyzetének különbségeként: $6x+9=(x+3)^2-x^2$, míg $16x+64=(x+8)^2-x^2$, ezáltal a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens az

$$x\left(\sqrt{(x+3)^2-x^2}+\sqrt{(x+8)^2-x^2}\right)\leqslant(x+3)(x+8)$$

egyenlőtlenséggel.



Vegyünk fel egy olyan háromszöget, amelynek két oldala $x+3$ és $x+8$, a harmadikhoz tartozó magasság pedig x. Meg kell jegyezzük, hogy ilyen háromszög mindig létezik, ugyanis megkapható két olyan derékszögű háromszög uniójaként, amelyek egyik befogója x, átfogóik pedig $x+3$ és $x+8$, márpedig derékszögű háromszöget akármilyen 1-nél kisebb befogó-átfogó arányból lehet szerkeszteni. Továbbá az x-re vonatkozó pozitivitást használva az is egyszerűen látható, hogy ezek a hosszok pozitívak lesznek.

Először számoljuk ki a harmadik oldalt. Mivel a magasság két derékszögű háromszögre bontja a nagy háromszöget, használhatjuk mindkettőben a Pitagorasz-tételt, azt kapjuk, hogy a két másik befogó rendre

$$\sqrt{(x+3)^2-x^2},\quad\text{illetve}\quad\sqrt{(x+8)^2-x^2},$$

azaz a harmadik oldal hossza $\sqrt{(x+3)^2-x^2}+\sqrt{(x+8)^2-x^2}$. Legyen az ezzel szemközti szög α. Ennek segítségével írjuk fel kétféleképpen a háromszög területét az ismert területképletekkel. Rögtön a kétszeres területre térve:

$$2t=\left(\sqrt{(x+3)^2-x^2}+\sqrt{(x+8)^2-x^2)}\right)x=(x+3)(x+8)\sin\alpha.$$

Mivel egy szög szinusza legfeljebb 1, ezért

$$(x+3)(x+8) \geqslant 2t = \left(\sqrt{(x+3)^2 - x^2} + \sqrt{(x+8)^2 - x^2}\right)x,$$

ami éppen a bizonyítandó.

Varga Boldizsár (Verőce, Géza Fejedelem Református Ált. Isk., 8. évf.)

II. megoldás. Mivel x pozitív valós szám, ezért mindent értelmezünk, és mindkét oldal pozitív. Bontsuk fel a zárójelet az egyenlőtlenség jobb oldalán:

$$\sqrt{6x+9} + \sqrt{16x+64} \leqslant x + \frac{24}{x} + 11.$$

Mindkét oldal pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$\sqrt{384x^2 + 2112x + 2304} + 22x + 73 \leqslant x^2 + 22x + 169 + \frac{528}{x} + \frac{576}{x^2},$$

$$2\sqrt{96x^2 + 528x + 576} \leqslant x^2 + 96 + \frac{528}{x} + \frac{576}{x^2}.$$

A pozitív x^2-tel szorozva:

$$2x^2\sqrt{96x^2 + 528x + 576} \leqslant x^4 + 96x^2 + 528x + 576.$$

Legyen $a := 96x^2 + 528x + 576$, hogy egyszerűbb legyen az egyenletünk:

$$2x^2\sqrt{a} \leqslant x^4 + a.$$

Mivel mindkét oldal pozitív, ismét emeljünk négyzetre:

$$4x^4 a \leqslant x^8 + 2ax^4 + a^2,$$

$$0 \leqslant x^8 - 2ax^4 + a^2,$$

$$0 \leqslant (x^4 - a)^2,$$

ami nyilván teljesül. Mivel végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti egyenlőtlenség is minden pozitív x esetén fennáll.

Csizmadia Miklós (Budapest XIV. Kerületi Szent István Gimnázium, 11. évf.)

52 dolgozat érkezett. 4 pontos 46, 3 pontos 5, 0 pontos 1 dolgozat.

B. 5187. *Az $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz egy részhalmaza* primitív, *ha nincs benne két olyan elem, melyek közül az egyik osztója a másiknak. Mutassuk meg, hogy ha egy $A \subseteq S$ primitív halmazhoz nem lehet úgy hozzávenni újabb S-beli elemet, hogy primitív maradjon, akkor vagy $A = \{1\}$, vagy A mérete legalább annyi, mint n-ig a prímek száma.*

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

Megoldás. Ha $1 \in A$, akkor A-nak nem lehet más eleme, vagyis teljesül a feladat feltétele, a továbbiakban feltételezzük, hogy $1 \notin A$.

Hajtsuk végre a következő algoritmust: kezdetben a B halmaz legyen üres, a C halmazban pedig legyenek benne a prímek 1-től n-ig. Ismételjük, ameddig lehet, a következőt: ha létezik olyan $p \in C$ és $y \in A$, hogy alkalmas j pozitív egésszel $y = p^j \cdot k$, ahol k néhány (nem feltétlenül páronként különböző) B-beli szám szorzata, akkor a p prímet vegyük ki C-ből, és rakjuk át B-be.

(Kezdetben tehát rakjuk át B-be azokat a prímeket, amelyeknek van hatványa A-ban, majd az olyanokat, amelyeknek valamely hatványa előáll egy A-beli elem és néhány B-beli prím szorzatának hányadosaként, stb.) Ha már nem tudunk több ilyen lépést végezni, a következő esetek állhatnak fenn:

– A C halmaz üres. Ekkor $|A| \geqslant |\{\text{prímek 1-től } n\text{-ig}\}|$ – így teljesül a feladat feltétele – mivel minden lépés során olyan A-beli elemet választottunk ki, amelyet korábban nem (és összesen $|\{\text{prímek 1-től } n\text{-ig}\}|$ lépés történt). Tegyük fel ugyanis, hogy az $y \in A$ számot az i-edik és a j-edik lépésben is kiválasztottuk, ahol $i < j$. Jelölje B_1 és C_1, illetve B_2 és C_2 a B és C halmaz aktuális állapotát közvetlenül az i-edik, illetve a j-edik lépés végrehajtása előtt. Indirekt feltevésünk szerint ekkor $y = p_1^{j_1} \cdot k_1$ és $y = p_2^{j_2} \cdot k_2$. A prímtényezős alak egyértelműsége miatt p_2 osztója k_1-nek, így $p_2 \in B_1$, másrészt $p_2 \in C_2 \subseteq C_1$. Tehát p_2 a B_1 és a C_1 halmaznak is eleme, ami lehetetlen, hiszen a B és C halmazok az eljárás során végig diszjunktak.

– $C = \{p\}$. Ekkor A-ban nincs p-vel osztható elem, tehát még hozzávehetjük a halmazhoz p-t, és ez ellentmondás.

– Minden más esetben vegyük a legkisebb $p \in C$ elemet. Mivel A primitív, van p-vel osztható eleme; legyen $z \in A$ olyan, hogy a p prímtényező hatványa z-ben maximális az A elemei közül. Tudjuk, hogy van olyan $q \in C$, $q > p$ prím, amelyre $q \mid z$, máskülönben még egy lépést elvégezve p-t átrakhattuk volna B-be.

Tekintsük az $s := \frac{z}{q} \cdot p$ számot. Nyilván $s < z \leqslant n$, és s-nek nincs osztója A-ban, mivel az z-nek is osztója lenne, vagy nagyobb lenne benne a p kitevője, mint z-ben. Továbbá s-nek nincs többszöröse sem A-ban, mert abban nagyobb lenne p kitevője, mint z-ben. Tehát s-et hozzá lehetne venni A-hoz, ami ellentmondás.

Németh Márton (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 11. évf.)

72 dolgozat érkezett. 6 pontos 34, 5 pontos 7, 4 pontos 5, 3 pontos 2, 2 pontos 3, 1 pontos 12, 0 pontos 7 dolgozat.

B. 5206. *Egy n-jegyű $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_n}$ számot* hegyszerűnek *nevezünk, ha van olyan $1 \leqslant k \leqslant n$ egész, amelyre $a_1, a_2, \ldots, a_k$ szigorúan monoton növekvő, míg $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n$ szigorúan monoton csökkenő sorozat. (Például az* 1, 121, 1231 *számok hegyszerűek, de az* 1442 *és az* 12313 *nem hegyszerűek.) Hány hegyszerű szám van?*

(*3 pont*)

Megoldás. Ahhoz, hogy egy hegyszerű számot tudjunk készíteni, először válasszuk ki, hogy mely számjegyek fognak benne szerepelni (a 0-s számjegyet egyelőre ne válasszuk ki). Rendezzük sorba nagyság szerint ezeket a számjegyeket. Írjuk le most először a legnagyobb számjegyet. Ezután haladjunk nagyság szerint lefelé. Mindegyik számjegyet a készülő n-jegyű számnak vagy a bal, vagy a jobb, vagy mindkét oldalalára írhatjuk le. Ez a módszer nyilván mindig különböző, és helyes hegyszerű számot ad; másrészt pedig megkapunk minden lehetséges hegyszerű számot az adott számjegyekből képezve. Ez azt jelenti, hogy k számjegy esetén elrendezésükre 3^{k-1}-féle lehetőség van. Ha bármelyik kiválasztás bármelyik sorrendjéhez hozzávesszük még a nullát (amely mindig csak az utolsó helyre kerülhet), akkor készítettünk egy újabb hegyszerű számot, tehát az 1–9-es számjegyekből képzett hegyszerű számok száma az összes készíthető szám fele.

Az eddigiek alapján a legnagyobb számjegy szerint összegezve:

$$\left[\binom{9}{1}\cdot 3^0+\binom{9}{2}\cdot 3^1+\binom{9}{3}\cdot 3^2+\ldots+\binom{9}{8}\cdot 3^7+\binom{9}{9}\cdot 3^8\right]\cdot 2=174\,762.$$

Kovács Móric (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Ha 0 számot is hegyszerűnek tekintjük, akkor eggyel nagyobb összeget kapunk.

2. A szereplő binomiális együtthatók valószínűsítik, hogy ez az összeg a binomiális tétel alapján is kiszámítható. Valóban, írjuk fel a 4^9-t $(1+3)^9$-ként:

$$4^9=(1+3)^9=\binom{9}{0}\cdot 3^0+\binom{9}{1}\cdot 3^1+\binom{9}{2}\cdot 3^2+\ldots+\binom{9}{8}\cdot 3^8+\binom{9}{9}\cdot 3^9.$$

Ha ebből az összegből elhagyjuk az első tagot – az 1-et –, majd a fennmaradó tagokat 3-mal osztjuk, akkor éppen a feladat végeredményében szereplő zárójeles kifejezést kapjuk. Tehát a hegyszerű számok száma pontosan:

$$\frac{4^9-1}{3}\cdot 2=\frac{262\,144-1}{3}\cdot 2=174\,762.$$

Összesen 112 dolgozat érkezett. 3 pontot kapott 75, 2 pontot 11 tanuló. 1 pontos 17, 0 pontos 5 versenyző dolgozata. Nem versenyszerű 4 dolgozat.

B. 5209. *Egy* 2022 *elemű, egészekből álló halmaznak legfeljebb hány olyan kételemű részhalmaza lehet, melyre a két elem összege szintén a halmazhoz tartozik?*

(*5 pont*)

Megoldás. A nullát feltétlenül érdemes belevennünk a halmazba, mert azt bármely másik számmal összeadva ismét az elemet kapjuk.

Tekintsük először csak a pozitív elemeket. Legyenek ezek $x_1<x_2<\ldots<x_n$. Vizsgáljuk meg mindegyik elem esetében, hogy legfeljebb hány darab nála kisebb párja lehet (a pár itt azt jelenti, hogy összeadva őket ismét a halmaz egy elemét kapjuk). Így meg fogjuk kapni az összes párt. Mivel az x_n a legnagyobb elem, ahhoz nem rendelhetünk további pozitív elemet. Az x_{n-1}-hez csak egyet rendelhetünk, hiszen csak egy nála nagyobb eleme van a halmaznak. Látjuk, hogy egyik számhoz sem rendelhetünk sem a nála nagyobb elemek számánál több, sem a nála kisebb

pozitív elemek számánál több darab elemet. (Az elméleti maximum pl. $n=4$-re $0+1+1+0=2$.) Ezt az elméleti maximumot el is lehet érni úgy, ha 1-től n-ig vesszük a pozitív egész számokat.

Ez a módszer a negatív elemek között is ugyanígy működik.

Tekintsük most a különböző előjelű számok összegeit. Legyenek a pozitív számok 1-től n-ig, a negatívak pedig (-1)-től $(-k)$-ig. Az eddigiek alapján $n+k=$ $=2021$. Ha bármelyik negatív elemhez bármelyik pozitívat párosítjuk az biztosan megfelelő lesz, mert az összeg $-k$ és n közé fog esni. Ilyen párból $n\cdot k$ darabot tudunk megadni. A pozitív és negatív elemek száma közül az egyik páros, a másik páratlan. A szimmetria miatt feltehetjük továbbá, hogy a pozitívak száma páratlan, $n=2u+1$, $k=2021-2u-1=2020-2u$.

A negatív párok száma: $(1010-u-1)(1010-u)$, a pozitív párok száma $(u-1)u+u$, végül a vegyes párok száma: $(2020-2u)(2u+1)$.

Ezek összegét vizsgáljuk. Az u másodfokú polinomját kapjuk:

$$1009\cdot 1010-2019u+u^2+u^2+4040u-4u^2+2020-2u=$$
$$=-2u^2+2019u+1010\cdot 1011.$$

Ez a függvény maximumát a másodfokú függvényekre vonatkozó ismert eljárás alapján $u=-\frac{b}{2a}\approx 505$ esetén veszi fel. Ha az $u=505$-höz tartozó helyettesítési értékhez hozzáadjuk még a 0-val képzett 2021 párt, kapjuk az elérhető maximumot:

$$-2\cdot 505^2+2019\cdot 505+1010\cdot 1011+2021=1\,532\,676.$$

László Anna (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 65 dolgozat érkezett. 5 pontot kapott 30, 4 pontot 4 tanuló. 3 pontos 9, 2 pontos 12, versenyző dolgozata. 1 pontra értékelt 6, 0 pontra 4 versenyző dolgozata.

B. 5214. *A* 110 *egy olyan számjegysorozat, amelyet bármilyen* 1*-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve páros számot kapunk. Van-e olyan* 1*-esekből és* 0*-kból álló számjegysorozat, amelyet bármilyen* 1*-nél nagyobb pozitív egész alapú számrendszerben tekintve* 3*-mal osztható pozitív egész számot kapunk?*

(*3 pont*)

I. megoldás. Olyan számot keresünk, amely legalább egy darab 1-est tartalmaz, hiszen pozitív; viszont nem végződhet 1-re, mert akkor a 3-as számrendszerben 1 maradékot adna 3-mal osztva, tehát az utolsó számjegye 0.

Ha a számrendszer alapja osztható 3-mal, akkor a nem utolsó helyiértékek mindegyike 0 maradékot ad 3-mal osztva, mert tartalmaznak 3-as prímtényezőt, így ez esetben bárhol lehet 1-es a keresett számban.

Azokban a számrendszerekben, amelyekben az alap 3-as maradéka 1, minden helyiérték 3-as maradéka 1, mert ha összeszorozzuk a maradékokat, az mindig $1\cdot 1=1$. Ekkor annyi 1-es számjegy szükséges, hogy a számuk 3-mal osztható legyen, azaz legalább 3 darab 1-est tartalmaz a szám.

Ha pedig a számrendszer alapjának 3-as maradéka 2, akkor a maradékok sorban a következők: $1, 2, 1, 2\dots$, mert 1-nek 1, ezt 2-vel (a 3-as maradékkal) szorozva 2 a maradék, ezt megint 2-vel szorozva 4, melynek 3-as maradéka 1, és így tovább. Ez esetben az imént említett 3 darab 1-esnek azokon a helyiértékeken kell elhelyezkednie, amelyek 3-mal osztva ugyanazt a maradékot adják.

Az 101010 szám a fenti feltételek mindegyikének megfelel, ezért van ilyen szám.

BLG-s kobakok (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

II. megoldás. A 101010 szám ilyen, n alapú számrendszerben ($n > 1$ egész) ennek a számnak a valódi értéke

$$n^5 + n^3 + n = n(n^4 + n^2 + 1).$$

Ha n osztható 3-mal, akkor az $(n^4 + n^2 + 1)$-szerese is.

Ha n nem osztható 3-mal, akkor, mivel minden 3-mal nem osztható négyzetszám 3-mal osztva 1 maradékot ad, ezért az 1, az n^2 és az $n^4 = (n^2)^2$ is. Ilyenkor az összegük 3-mal osztható, így annak n-szerese is.

Beláttuk, hogy az n-es számrendszerben felírt 101010 szám bármilyen n-re osztható 3-mal, tehát van ilyen szám.

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

Összesen 133 dolgozat érkezett. 3 pontos 86, 2 pontos 34, 1 pontos 6 dolgozat. 0 pontot 1 versenyző kapott. Nem versenyszerű 6 dolgozat.

B. 5229. *Az $a \neq 0$ valós számra és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre*

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f(y) + ay \tag{1}$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy f additív, vagyis $f(x + y) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, New Brunswick, Kanada)

Megoldás.

Először a feladatban szereplő egyenlet (a továbbiakban (1)) mindkét oldalához adjunk x-et, majd vegyük mindkét oldal f szerinti képét:

$$f\Big(x + f\big(x + f(y)\big)\Big) = f\big(x + f(x) + f(y) + ay\big).$$

Az (1) alapján bontsuk ki a bal oldali kifejezést:

$$\begin{aligned} f\Big(x + f\big(x + f(y)\big)\Big) &= f(x) + f\big(x + f(y)\big) + a\big(x + f(y)\big) = \\ &= f(x) + f(x) + f(y) + ay + ax + af(y), \end{aligned}$$

majd a jobb oldal kifejezést is:

$$f\big(x+f(x)+f(y)+ay\big)=f(x+f(x)+ay)+f(y)+ay=$$
$$=f(x+ay)+f(x)+ax+f(y)+ay.$$

Az egyenlőség fennáll, így:

$$f(x)+f(x)+f(y)+ay+ax+af(y)=f(x+ay)+f(x)+ax+f(y)+ay,$$
$$f(x)+af(y)=f(x+ay), \tag{2}$$

amely egyenletből $x=y=0$ helyettesítéssel megkapjuk $f(0)$-t:

$$f(0)+af(0)=f(0),$$

így $af(0)=0$. Ebből $a\neq 0$ miatt következik, hogy $f(0)=0$.

Ha most (1)-be x helyére 0-t helyettesítünk és felhasználjuk, hogy $f(0)=0$, akkor az f függvény újabb tulajdonságához jutunk:

$$f\big(f(y)\big)=f(0)+f(y)+ay=f(y)+ay. \tag{3}$$

Most pedig helyettesítsünk (2)-be x helyére $f(y)$-t:

$$f\big(f(y)\big)+af(y)=f\big(f(y)+ay\big),$$

amiből a jobb oldalon (1), a bal oldalon (3) alkalmazásával

$$f(y)+ay+af(y)=f(ay)+f(y)+ay,$$
$$af(y)=f(ay).$$

Ezt (2)-be visszahelyettesítve az

$$f(x)+f(ay)=f(x+ay)$$

egyenlethez jutunk, ami éppen az additivitást jelenti, hiszen $ay=z$ esetén z tetszőleges valós szám, mivel $a\neq 0$ és y tetszőleges valós szám. Ekkor tehát x és z tetszőleges valós számokra teljesül, hogy

$$f(x)+f(z)=f(x+z).$$

Éppen ezt akartuk megmutatni, így a bizonyításunkat befejeztük.

Fazokán Marcell (Debreceni Fazekas Mihály Gimn., 10. évf.)
dolgozata alapján

Összesen 42 dolgozat érkezett. 6 pontos 20, 5 pontos 2, 4 pontos 4 dolgozat. 3 pontot 5, 2 pontot 3, 1 pontot 3 versenyző kapott. 5 dolgozat 0 pontos lett.

B. 5235. *Mutassuk meg, hogy a Fibonacci-sorozatban minden 3-nál nagyobb prímszám $4k+1$ alakú.*

(*5 pont*)

Megoldás. Az n-edik Fibonacci-számot F_n-nel jelöljük. Vizsgáljuk meg a Fibonacci-számok négyes maradékát, az előző két szám összege a következő (a sorozat definíciójából adódóan). Az első két szám maradéka 1, a harmadiké $1+1=2$, a negyediké $2+1=3$, az ötödiké $3+2=5\equiv 1$, a hatodiké $1+3=4\equiv 0$, a hetediké $1+0=1$, a nyolcadiké $1+0=1$ és innentől ismétlődik, mivel a következő szám csak az előző kettőtől függ. Láthatjuk, hogy hatos periódusonként ismétlődnek a számok, a 0 és a 2 maradékú biztosan páros, ezért nem lehet 3-nál nagyobb prím. Az egyetlen $4k+3$ alakú ebben a negyedik, tehát a sorozatban az ilyen számok az F_{6l+4} alakúak, ahol l nemnegatív egész. Mivel $6l+4$ páros, így felírható $2n$ alakban, ahol $n=3l+2$, ahol $n\geqslant 2$.

A Fibonacci-sorozattal kapcsolatban sok közismert azonosság létezik (lásd korábbi cikkünket: Énekes Béla – Kós Géza: *Néhány érdekesség a Fibonacci- és a Fibonacci-típusú sorozatokról,* amely ezen a linken érhető el:

`http://db.komal.hu/KomalHU/cikk.phtml?id=200117`,

illetve

`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=200117`).

Az ismert tételek közül most a teljes indukcióval könnyen belátható

$$F_{n+k-1}=F_nF_k+F_{n-1}F_{k-1}$$

azonosságot alkalmazzuk (a cikkben a 4. oldalon (6)-os számmal található meg). Alkalmas $(k-1=n)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F_{2n}=F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_n=F_n(F_{n+1}+F_{n-1}),$$

ami azt jelenti, hogy $F_n\mid F_{2n}$, vagyis, ha F_{2n} prímszám, akkor $F_n=1$ vagy $F_n=F_{2n}$. Utóbbi ellentmondás, hiszen a Fibonacci-sorozat $n\geqslant 2$-re szigorúan monoton növekedő. Ha pedig $F_n=1$, akkor $n=1$ vagy $n=2$, azonban az $n\geqslant 2$ feltétel miatt csak az $n=2$ esetet kell vizsgálnunk. Ekkor $F_{2n}=F_4=3$, tehát valóban $4k+3$ alakú prímszámot kaptunk. Több eset nincs, így beláttuk, hogy a Fibonacci-számok közül az egyetlen $4k+3$ alakú prím a 3, azaz a Fibonacci-sorozatban szereplő, 3-nál nagyobb prímszámok szükségképpen $4k+1$ alakúak. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Bényei Borisz (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

Összesen 66 dolgozat érkezett. 5 pontos 26, 4 pontos 23, 3 pontos 10 dolgozat. 2 pontot 6, 1 pontot 1 versenyző kapott.