Megoldásvázlatok a 2021/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán:*

a) $a^2 - 5a + 4 \leqslant 0$, (*3 pont*)

b) $\log_{\frac{1}{2}}(5^{x+1} - 25^x) \leqslant -2$. (*8 pont*)

Megoldás. *a)* Az $a^2 - 5a + 4$ másodfokú kifejezés gyökei: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$. A parabola ábrázolása után leolvasható, hogy az $[1; 4]$ intervallumon teljesül az egyenlőtlenség.

b) A logaritmus definíciója értelmében az $5^{x+1} - 25^x > 0$ feltételnek teljesülnie kell. Emiatt $0 < 5^x < 5$. Az exponenciális függvény szigorúan monoton nő, ha az alapja 1-nél nagyobb. Így a kifejezés értelmezési tartománya $D =]-\infty; 1[$.

Logaritmusos kifejezésként írhatjuk fel a jobb oldalt:

$$\log_{\frac{1}{2}}(5^{x+1} - 25^x) \leqslant \log_{\frac{1}{2}} 4.$$

A logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökken, ha az alapja kisebb, mint 1. Rendezve a másodfokú egyenlőtlenséget: $0 \geqslant 5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4$.

Új változó vezethető be 5^x helyett, legyen hát $a = 5^x$, és így az előző részfeladat eredményét felhasználhatjuk: $1 \leqslant 5^x \leqslant 4$, amelyből visszahelyettesítés után, az exponenciális függvény monoton növekedésére hivatkozva, az értelmezési tartománnyal összevetve adódik a megoldás: $x \in [0; \log_5 4]$.

2. *A bolthálózat raktárában* 14 500 *doboz üdítőt tárolnak. A rövid szavatossági idő miatt a tulajdonos szeretné a teljes készletet* 29 *napon belül eladni. Az első napon* 150 *darabot sikerült értékesíteni.*

a) Legalább mennyivel kell naponta növelni az eladott üdítők számát, hogy a terv sikerüljön? (*3 pont*)

A bolthálózat növekedése miatt szükségessé vált egy új raktárépület megvásárlása, amelyet a tulajdonos hitel felvételével kíván megvalósítani. A banktól kapott 30 *millió forint kölcsönt* 5 *éven át* 5 *egyenlő részletben kell visszafizetnie. A* 2021. *januárjában felvett kölcsönre a bank minden év végén* 3,5%*-os kamatot számít fel. A törlesztést a tulajdonos a következő év januárjában kezdi meg.*

b) Mekkorák az egyes törlesztőrészletek ezer forintra kerekítve? (*5 pont*)

A bolt gazdasági vezetője azt tanácsolta, hogy évente maximum 4 *millió forintot költsön a tulajdonos az új raktárépületre felvett kölcsön törlesztésére, az előzővel megegyező banki kamat mellett.*

c) Hány év alatt tudja így a tulajdonos visszafizetni a kölcsönt? (*5 pont*)

Megoldás. *a*) A számtani sorozat első tagja 150; a tagok száma 29; az első 29 tag összege 14 500. Behelyettesítve a számtani sorozat összegképletébe:

$$14\,500=\frac{29\cdot(300+28d)}{2}.$$

Az egyenlet megoldása után $d=25$, tehát legalább 25 darabbal kell növelni a naponta eladott mennyiséget.

b) A banktól felvett hitel: $a_0=30\,000\,000$ Ft; az éves kamat: $p=3{,}5\%$, ezért $q=1{,}035$; a törlesztőrészlet: x Ft.

2026 januárjában, az 5. törlesztőrészlet kifizetése után 0 Ft-ra csökken a tartozás:

$$a_0\cdot q^5-x\cdot q^4-x\cdot q^3-x\cdot q^2-x\cdot q-x=0.$$

Rendezzük az egyenletet:

$$a_0\cdot q^5=x\cdot q^4+x\cdot q^3+x\cdot q^2+x\cdot q+x.$$

A jobb oldalon kiemelhetünk x-et, így:

$$x=\frac{a_0\cdot q^5}{q^4+q^3+q^2+q+1}=6\,644\,441{,}2.$$

6 644 000 Ft-ot kell évente törleszteni.

c) Ha évente maximálisan $y=4\,000\,000$ Ft-ot tud törleszteni, akkor az n-edik törlesztőrészlet kifizetése után 0 Ft-ra csökken a tartozás. Ezért:

$$a_0\cdot q^n-y\cdot q^{n-1}-y\cdot q^{n-2}-\ldots-y\cdot q^2-y\cdot q-y=0.$$

Rendezzük az egyenletet, emeljünk ki y-t, és használjuk a mértani sorozat első n elemének összegére vonatkozó összefüggést:

$$a_0\cdot q^n=y\cdot\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Behelyettesítve a megadott értékeket:

$$30\,000\,000\cdot 1{,}035^n=4\,000\,000\cdot\frac{1{,}035^n-1}{1{,}035-1},$$

$$1{,}05\cdot 1{,}035^n=4\cdot 1{,}035^n-4,$$

$$\frac{80}{59}=1{,}035^n,$$

$$n=\log_{1{,}035}\frac{80}{59}\approx 8{,}85.$$

Tehát 9 év alatt tudja a tulajdonos visszafizetni a kölcsönt.

3. *Legyen az U alaphalmaz az első n pozitív egész szám, amelynek három részhalmaza:*

A : 6-*tal osztható számok,*
B : 15 *többszörösei,*
C : *olyan egészek, amelyeknek osztója a* 20.

a) Mennyi lehet n legkisebb és legnagyobb értéke, ha az $A \cap B \cap C$ halmaz elemszáma 3? (*3 pont*)

b) Hány olyan szám található 1 *és* 200 *között, amelyek A, B és C halmazok közül pontosan kettőnek elemei?* (*5 pont*)

c) Határozzuk meg a következő állítások logikai értékét. Válaszainkat minden esetben indokoljuk.

(*i*) *A* $B \setminus (A \cup C)$ *halmaz elemeinek utolsó számjegye* 5 *vagy* 6.
(*ii*) $B \setminus (A \cup C) = B \setminus A$.
(*iii*) *A* $C \setminus (A \cup B)$ *halmaz elemeinek szorzata* 10 *darab* 0-*ra végződik* $n = 200$ *esetén.* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) $A \cap B \cap C$ a 60-nal osztható számok halmaza, ennek elemszáma 3, azaz $A \cap B \cap C = \{60; 120; 180\}$. Ezért n legkisebb értéke 180; legnagyobb értéke 239 lehet.

b) Az $A \cap B$ halmaz a 30-cal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 6.

Az $A \cap C$ halmaz a 60-nal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 3.

Az $B \cap C$ halmaz a 60-nal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 3.

Az $A \cap B \cap C$ halmaz a 60-nal osztható 200-nál nem nagyobb számok; elemszáma 3.

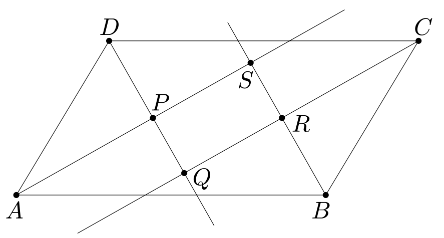
Pontosan két halmaznak elemei: $|A \cap B| + |B \cap C| + |A \cap C| - 3 \cdot |A \cap B \cap C| = 3$.

Megjegyzés. Ezek az elemek: 30; 90; 150.

c) (*i*) Igaz, mert azok a számok, amelyek 15-tel oszthatóak, de 6-tal és 20-szal nem, azok nem párosak, de oszthatóak 5-tel, ezért 5-re végződnek.

(*ii*) Igaz, Venn-diagramon ábrázolva $(B \cap C) \setminus A = \emptyset$.

(*iii*) Hamis, $C \setminus (A \cup B) = \{20; 40; 80; 100; 140; 160; 200\}$, az elemek szorzata 9 db nullára végződik.



4. *Tekintsük az $ABCD$ paralelogrammát, amelynek AB oldala* 16 cm-*rel hosszabb, mint az AD oldala, valamint hegyesszöge $DAB\sphericalangle = \alpha$.*

a) Igazoljuk, hogy a paralelogramma szögfelezői által meghatározott $PQRS$ négyszög téglalap. (*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a $PQRS$ téglalap területe cm^2-*ben mérve $T = 128 \cdot \sin\alpha$.* (*7 pont*) *c) Mekkora a $PQRS$ téglalap átlójának hossza?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Az ASB háromszög A csúcsánál lévő szöge a szögfelezés miatt $\frac{\alpha}{2}$; B csúcsánál lévő szöge:

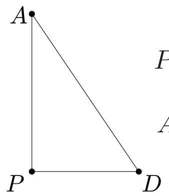
$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

A háromszög S csúcsánál lévő szöge így

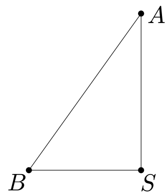
$$180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = 90^\circ.$$

Hasonlóan igazolható, hogy a P, Q, R csúcsoknál lévő szögek szintén derékszögek. Így a $PQRS$ négyszög téglalap.

b) Legyen a paralelogramma AD oldala a, így az AB oldal hossza $a+16$.



$$PD = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$
$$AP = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$



$$BS = (a+16) \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$
$$AS = (a+16) \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

A téglalap oldalai:

$$PS = AS - AP = (a+16) \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - a \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 16 \cdot \cos\frac{\alpha}{2},$$

$$PQ = QD - PD = BS - PD = (a+16) \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 16 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

A téglalap területe:

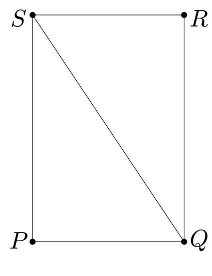
$$T = PS \cdot PQ = 16^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Használjuk a kétszeres szögekre vonatkozó addíciós tételt:

$$T = 16^2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 128 \cdot 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = 128 \cdot \sin\alpha.$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

c) A PSQ háromszögben felírhatjuk a Pitagorasz-tételt:



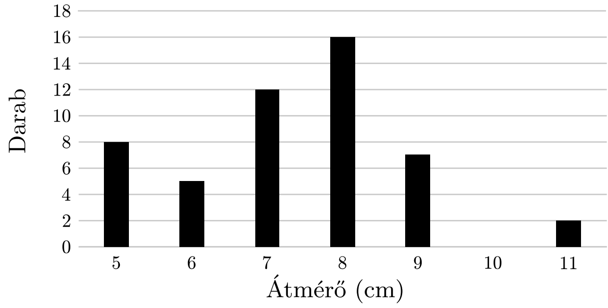
$$QS^2 = \left(16 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(16 \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

$$QS^2 = 16^2 \cdot \left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right).$$

Használhatjuk a trigonometrikus Pitagorasz-tételt, így a zárójelben szereplő kifejezés értéke pontosan 1. A téglalap átlójának hossza tehát 16 cm.

II. rész

5. *Almaszüret után véletlenszerűen kiválasztottak* 50 *darab almát, megmérték az átmérőjüket, ezt mutatja az alábbi* oszlopdiagram.



a) Mennyi az almák átmérőjének átlaga és szórása? (*4 pont*)

A következő évben újfajta tápoldatot is használtak az almafák öntözésére. Az újabb almaszüret után újra választottak 50 *darabot, amelyeknek megmérték az átmérőjét. Az előző évi mintával összehasonlítva azt tapasztalták, hogy a* 8 cm*-nél kisebb gyümölcsök átmérője* 24%*-kal nőtt, ha méretüket egész* cm*-re kerekítjük.*

b) Mekkora lesz az új minta mediánja, illetve a minta mediántól való átlagos abszolút eltérése? (*5 pont*)

A szüreten szedett gyümölcsből almalevet préselnek. A leszedett almát meghámozzák, kiszedik a magját, ezáltal 12%*-ot veszít a tömegéből. A préseléskor* 8 kg *pucolt almából átlagosan* 5 liter *levet készítenek.*

c) Hány kg almát szedtek a szüret alkalmával, ha abból összesen 3 000 liter *almalé készült?* (*3 pont*)

Az almát 200 Ft/kg *egységáron tudja eladni a gazda. Az almalé árát úgy szeretné meghatározni, hogy azzal* 20%*-kal több bevétele legyen.*

d) Mennyibe kerüljön 1 liter *almalé? (A választ egész forintra kerekítve adjuk meg.)* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Az almák átmérőjét tekintve az átlag

$$\overline{x} = \frac{8\cdot 5 + 5\cdot 6 + \ldots + 2\cdot 11}{50} = \frac{367}{50} = 7{,}34 \text{ cm},$$

szórása: $D(\overline{x}) = \sqrt{2{,}1444} = 1{,}464$ cm.

b) A régi 5 cm átmérőjű almából a tápoldat hatására 6 cm átmérőjű lett. A 6 cm átmérőjű 7 cm-esre nőtt, a 7 cm helyett 9 cm átmérőjűek lettek az almák. A többi alma mérete nem változott. Táblázatba foglalva a tápoldat hatására kapott új minta adatait:

átmérő (cm)	6	7	8	9	10	11
darab	8	5	16	19	–	2

A mediánt az adatok nagyság szerinti sorrendjében a 25. és 26. adat átlaga adja: 8 cm. A mediántól való átlagos abszolút eltérés:

$$\frac{8\cdot|6-8|+5\cdot|7-8|+\ldots+2\cdot|11-8|}{50}=\frac{46}{50}=0{,}92\text{ cm.}$$

c) x kg almából $0{,}88x$ kg hámozott alma lesz. Egyenes arányosság van a hámozott alma tömege és a belőle készülő almalé között. A két mennyiség hányadosa állandó. $\frac{8}{5}=\frac{0{,}88x}{3000}$, amelyből $x=5454{,}54$.

Tehát 5454,54 kg almából lesz 3000 l almalé.

d) y kg alma eladása esetén $200y$ Ft bevétel származik. Ennél szeretnénk 20%-kal többet: $200y\cdot 1{,}2$ Ft bevétel legyen az almalé árából. y kg almából $0{,}88y\cdot\frac{5}{8}$ liter almalé készül.

Legyen az almalé literenkénti ára z Ft. Így a bevételünk: $0{,}88y\cdot\frac{5}{8}\cdot z$. Felírható a

$$200y\cdot 1{,}2=0{,}88y\cdot\frac{5}{8}\cdot z$$

egyenlet, amelyből $z=436{,}36$.

Az almalevet 436 Ft-ért kell eladni.

6. *A színház szervezési osztályán* 196 *bérletet adtak el az aktuális évadra. A bérletes előadások előtt – a bérlettulajdonosok elfoglaltsága miatt – átlagosan* 5% *bérletlemondás történik. A színház pénztárában az ilyen esetekre úgynevezett lépcsőjegyeket adnak el, amelyek nem helyre szólnak, hanem a bérletlemondás miatt megüresedett helyeket tölthetik fel a nézők. A* 12. *évfolyam tanulói* 7 db *lépcsőjegyet vásároltak.*

Simon azt mondja: „Mind a 7 *diáknak jut ülőhely a színházban."*

a) *Fogalmazzuk meg Simon állításának tagadását.* (*2 pont*)

Tamás azt mondja: „Legalább 65% *a valószínűsége, hogy mindenkinek jut ülőhely a színházban."*

b) *Igazoljuk Tamás állítását.* (*6 pont*)

A színházban a szék aljára barna, sárga és lila színű borítékokat ragasztottak 4 : 5 : 5 *arányban, amelyekben vásárlási kedvezményre jogosító kuponok találhatóak. A barna borítékok felében* 10%*-os, a többiben* 15%*-os kupon található. A sárga színűek harmadában* 15%*-os, a többiben* 20%*-os kupon van. A lila borítékokba egységesen* 15%*-os kupont tettek. Réka* 15%*-os kedvezményt talált a saját borítékjában.*

c) *Mekkora a valószínűsége, hogy Réka sárga színű borítékot kapott?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az állítás tagadása: Van olyan diák, akinek nem jut ülőhely a színházban.

b) Ahhoz, hogy mindenkinek jusson ülőhely a színházban, legalább 7 embernek le kell mondania a bérletet. Binomiális eloszlást használhatunk 196 emberre, 0,05 lemondási valószínűség mellett. Kezdjük el kiszámolni annak a valószínűségét, hogy pontosan $7; 8; 9; \ldots$ bérletlemondás történik. Ezek összege 12 bérletlemondásig meghaladja a 0,65-öt, így igaz lesz Tamás állítása.

Az X valószínűségi változó jelentse a bérletlemondások számát:

$$P(X=7)=\binom{196}{7}\cdot 0{,}05^7\cdot 0{,}95^{189}=0{,}095,$$

$$P(X=8)=\binom{196}{8}\cdot 0{,}05^8\cdot 0{,}95^{188}=0{,}1184,$$

$$P(X=9)=0{,}1302,$$

$$P(X=10)=0{,}128\,15,$$

$$P(X=11)=0{,}114\,05,$$

$$P(X=12)=0{,}0925.$$

Összegük: $P(7\leqslant X\leqslant 12)=0{,}6783$.

c) A barna borítékok száma $4x$ darab, ezekből 10% kedvezményt tartalmaz: $4x\cdot 0{,}5$, 15% kedvezmény: $4x\cdot 0{,}5$. Sárga színű boríték: $5x$ darab, ezekből 15% kedvezmény: $5x\cdot\frac{1}{3}$, 20% kedvezmény: $5x\cdot\frac{2}{3}$. Lila boríték: $5x$ darab ezek mindegyikében 15% kedvezmény található.

Annak valószínűsége, hogy az összes boríték közül egy olyat talál Réka, amelyben 15% kedvezmény van:

$$P(15\%)=\frac{4x\cdot 0{,}5+5x\cdot\frac{1}{3}+5x}{4x+5x+5x}=\frac{13}{21}.$$

A megoldás feltételes valószínűség kiszámításával adódik:

$$P(\text{sárga}\mid 15\%)=\frac{P(\text{sárga}\cdot 15\%)}{P(15\%)}=\frac{\frac{5x\cdot\frac{1}{3}}{14x}}{\frac{13}{21}}=\frac{5}{26}=0{,}1923.$$

Tehát 0,1923 annak valószínűsége, hogy ha Réka 15%-os kupont talált a saját borítékjában, akkor sárga színű borítékot kapott.

7. *a*) *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$2\sin x=|x-1|+|x-3|. \qquad (7\ pont)$$

b) *Mekkora az $f(x)=2\sin x$, $g(x)=|x-1|+|x-3|$ görbék és az y tengely által határolt korlátos síkidom területének pontos értéke?* *(9 pont)*

Megoldás. *a*) Az egyenlet megoldásához először tekintsük az abszolút értékek definícióját:

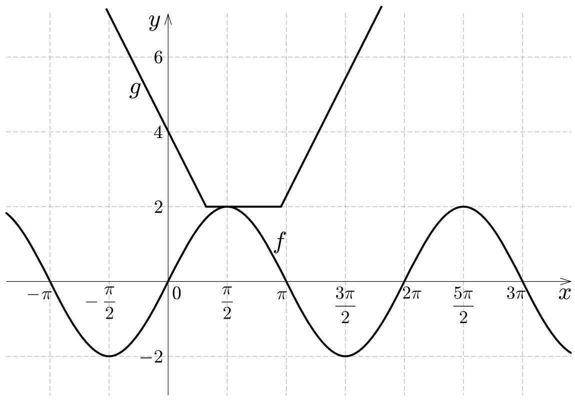
$$|x-1|=\begin{cases} x-1, & \text{ha } x \geqslant 1,\\ -(x-1), & \text{ha } x<1;\end{cases}$$

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, & \text{ha } x \geqslant 3,\\ -(x-3), & \text{ha } x<3.\end{cases}$$

Ezeket felhasználva a jobb oldalon szereplő függvény:

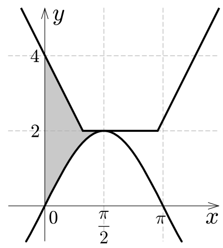
$$g(x)=|x-1|+|x-3|=\begin{cases} -2x+4, & \text{ha } x<1,\\ 2, & \text{ha } 1 \leqslant x<3,\\ 2x-4, & \text{ha } x \geqslant 3.\end{cases}$$

Ábrázoljuk közös koordináta-rendszerben a jobb és bal oldalon szereplő függvényeket:



A két függvény értékkészletének egyetlen közös eleme a 2. Ezt az $f(x)=2\sin x$ függvény $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi$ helyeken veszi fel. Ezekből az eredeti egyenletnek csak az $x=\frac{\pi}{2}$ a megoldása a függvény-grafikonok alapján. Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

b) A keresett korlátos síkidomot az *ábra* mutatja:



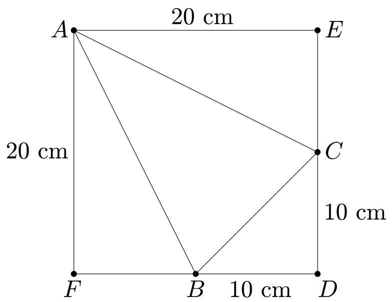
Területét integrálszámítás segítségével számíthatjuk ki:

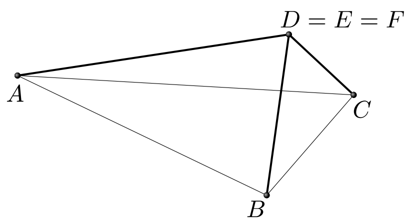
$$T=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(g(x)-f(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(-2x+4-2\sin x)\,\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{\pi}{2}}(2-2\sin x)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left[-x^2+4x+2\cos x\right]_0^1+\left[2x+2\cos x\right]_1^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=(-1+4+2\cos 1)-(0+2\cos 0)+\left(\pi+2\cos\frac{\pi}{2}\right)-(2+2\cos 1)=\pi-1.$$

8. *A* 20 cm *oldalhosszúságú négyzet alakú fehér lapból a kezdő origami szakkörön tetraédert hajtogatnak a gyerekek úgy, hogy az* ábrán *jelölt* AC, AB *és* BC *szakaszok mentén hajtják meg a lapot.*





a) Mekkora a tetraéder legnagyobb és legkisebb területű lapjának hajlásszöge a hajtogatás után? (*7 pont*)

b) Mekkora a tetraéder térfogata? (*3 pont*)

Az elkészített tetraédereket a gyerekek megerősítik az élek hosszára ragasztott színes szívószálak segítségével. Majd a legnagyobb területű lapjára állítva leteszik egy asztalra egyformán igazítva a testeket.

c) Hány különböző megerősített tetraéder készíthető piros, zöld, sárga és kék színű szívószállal, ha az egy csúcsban találkozó szívószálak nem lehetnek egyforma színűek? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A négyzet oldala 20 cm, a B és C pontok az adott oldalak felezőpontjai. A tetraéder lapjainak területe:

$$T_{AFB}=T_{AEC}=\frac{20\cdot 10}{2}=100\ \mathrm{cm}^2,$$

$$T_{BDC}=\frac{10\cdot 10}{2}=50\ \mathrm{cm}^2,\qquad \text{ez a legkisebb,}$$

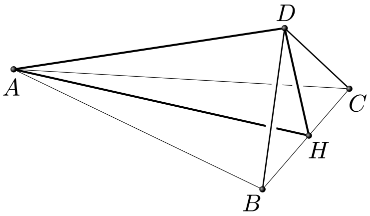
$$T_{ABC}=20^2-2\cdot 100-50=150\ \mathrm{cm}^2,\qquad \text{ez a legnagyobb.}$$

A H pont legyen a BC szakasz felezőpontja. A tetraéder ADH síkmetszetében kapjuk a legnagyobb és legkisebb területű lapok hajlásszögét. Ebben a háromszögben:

$$AD = 20 \text{ cm},$$

$$DH = 5\sqrt{2} \text{ cm},$$

$$AH = 20\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 15\sqrt{2} \text{ cm}.$$

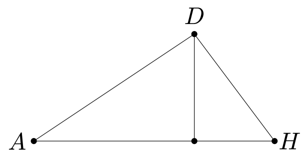


Az ADH háromszög H csúcsánál lévő szöge adja a választ. Felírva a koszinusztételt:

$$20^2 = \left(15\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2 - 2\cdot 15\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot\cos\alpha, \quad \cos\alpha = \frac{1}{3}, \quad \alpha = 70{,}53^\circ.$$

b) A tetraéder magassága az ADH háromszög AH oldalához tartozó magassága (M).

$$\sin\alpha = \frac{M}{5\sqrt{2}}, \quad M = \frac{20}{3} \text{ cm}.$$

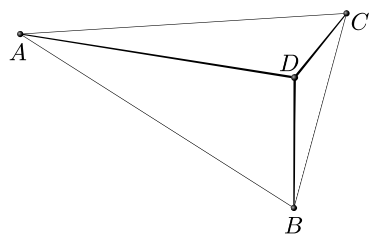


A tetraéder térfogata:

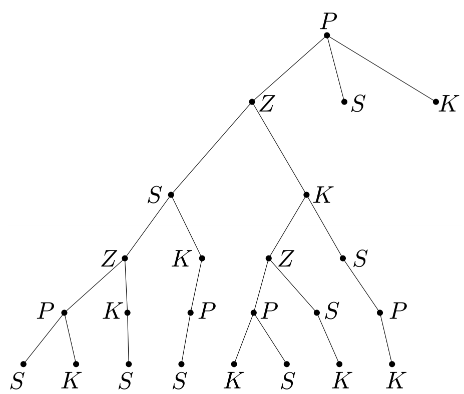
$$V = \frac{T_{ABC}\cdot M}{3} = \frac{150\cdot\frac{20}{3}}{3} = 333{,}3 \text{ cm}^3.$$

Megjegyzés. Az ADH háromszög D csúcsánál derékszög van, így a térfogat a BCD háromszögre mint alapterületre és az AD oldalra mint magasságra támaszkodva is kiszámítható.

c) A tetraéder élei 4-féle színnel színezhetők: piros, zöld, sárga és kék. Vegyük sorra az éleket: AD, AB, AC, CD, BC és végül BD (*1. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Nézzük azokat a konkrét eseteket, amikor az AD él piros, az AB ekkor 3-féle lehet még (zöld, sárga vagy kék). Ha az AB él zöld, akkor a többi él lehetséges színei a *2. ábrán* láthatók.

Ebben a konkrét esetben 8 lehetőség van. Figyelembe véve, hogy az AD élre van összesen 4 lehetőség, majd az AB élre ezután 3 lehetőség, így összesen $4\cdot 3\cdot 8=96$ lehetőség van.

Tehát 96 különböző megerősített tetraéder készíthető.

9. *A koordinátarendszerben megrajzoltuk a* $p:\ y=\frac{1}{12}x^2-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$ *egyenletű parabolát.*

a) Írjuk fel a parabola és az y-tengely metszéspontjában a parabolához húzott érintő egyenletét. *(6 pont)*

Fizika tanulmányok alapján ismert, hogy a parabolatükör a tengelyével párhuzamos fénysugarakat a fókuszponton keresztül veri vissza.

b) A parabola belsejében fénysugár érkezik az y-tengely mentén. Mi a visszaverődő fénysugár egyenesének egyenlete? *(7 pont)*

Fizikában beesési merőlegesnek hívják a beesési pontban a parabola érintőjére állított merőlegest.

c) Mekkora az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög? *(3 pont)*

Megoldás. *a*) A parabola és az y-tengely közös pontjának koordinátáit meghatározhatjuk, felhasználva, hogy az y-tengely pontjainak abszcisszája $x=0$. A metszéspont ordinátája behelyettesítés után $y=\frac{10}{3}$. Így $M=\left(0;\frac{10}{3}\right)$.

A metszéspontba húzott érintő meredeksége az

$$f(x)=\frac{1}{12}\cdot x^2-\frac{1}{3}x+\frac{10}{3}$$

függvény deriváltjának $x_0=0$ pontban számított helyettesítési értéke:

$$f'(x)=\frac{1}{6}x-\frac{1}{3},\quad m=f'(0)=\frac{1}{6}\cdot 0-\frac{1}{3}=-\frac{1}{3}.$$

Az érintő egyenlete: $y-\frac{10}{3}=-\frac{1}{3}\cdot x$. Rendezve az egyenletet: $x+3y=10$.

b) A parabola tengelypontjának koordinátáit a parabola egyenletének teljes négyzetté alakítása után tudjuk megadni.

$$y=\frac{1}{12}\cdot(x-2)^2+3,\quad y-3=\frac{1}{12}\cdot(x-2)^2,$$

így a tengelypont koordinátái: $T(2;3)$, a parabola paramétere $p=6$. Megadható a parabola fókuszpontja: $F\left(2;3+\frac{6}{2}\right)=(2;6)$.

A visszaverődő fénysugár egyenletének felírásához használjuk, hogy a fénysugár egyenesének irányvektora az $\overrightarrow{MF}=\left(2;\frac{8}{3}\right)$. A vektort 90°-kal elforgatva a fénysugár normálvektorát kapjuk: $\mathbf{n}=\left(\frac{8}{3};-2\right)$. Használjuk ezt a normálvektort és a parabola fókuszpontját. A visszavert fénysugár egyenlete:

$$\frac{8}{3}x-2y=\frac{16}{3}-12.$$

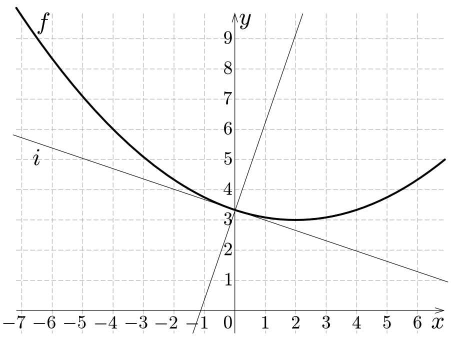
Rendezve az egyenletet: $4x-3y=-10$.

c) A beesési merőleges meredekségének és az *a*) részben szereplő érintő meredekségének szorzata -1.

$$m_b\cdot m=m_b\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1,\quad m_b=3.$$

A beesési merőleges irányszöge: $\operatorname{tg}\alpha=3$, $\alpha=71{,}57^\circ$.

Az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög a fent számított szög pótszöge, így $\beta=90^\circ-\alpha=18{,}43^\circ$.



Jócsik Csilla
Győr

Matematika feladatok megoldása

B. 5164. *Két játékos 3 győzelemig tartó kő-papír-olló párbajt játszik. Tegyük fel, hogy mindketten minden menetben véletlenszerűen (egymástól és a korábbi mutatásoktól függetlenül), $\frac{1}{3}:\frac{1}{3}:\frac{1}{3}$ eséllyel választják ki, hogy mit mutatnak. Adjuk meg a menetek számának várható értékét.*

(*5 pont*)

I. megoldás. Legyen $f(a,b)$ a menetek számának várható értéke, ha a győzelemhez az első játékosnak (akit A-val jelölünk a későbbiekben) a, a másodiknak (őt pedig B-vel) b menetet kell nyernie (ez az (a,b)-vel jelölt párbaj).

Amikor az (a,b) párbajban az első menet lezajlott, három dolog lehetséges. Ha az első játékos nyert, akkor neki már csak $a-1$ menetet kell nyernie, vagyis az $(a-1,b)$ párbaj alakult ki. Ha a második nyert, akkor $(a,b-1)$ párbaj alakult ki. Ha pedig döntetlen, akkor továbbra is (a,b) párbajról van szó. Az alábbi táblázatból leolvasható, hogy minden eset a fenti három közül $1/3$ eséllyel alakul ki.