Kedves Olvasóink!

A következő tanévre szóló megrendelésről szóló információk várhatóan május közepén kerülnek fel a honlapra.

A Kiadó

Ericsson-díj – tájékoztató

A következő évi Ericsson-díj várhatóan nyár elején kerül kiírásra. Kérjük, kövessék figyelemmel honlapunkat és/vagy facebook oldalunkat.

MATFUND Alapítvány

Konvex testbe írható tetraéder d-dimenzióban*

1. Egy egyszerű feladat: síkidom háromszögek közé „szendvicselve"

Adott egy korlátos konvex síkidom, K, amely zárt, tehát a határoló görbét is tartalmazza. Vegyük az összes K által tartalmazott háromszöget. Belátható (ezt hidd el), hogy ezek között van (esetleg több) maximális területű, legyen S ilyen háromszög. Igazold, hogy ha S-et az $\mathbf{s}$ súlypontjából (-2)-szeresére nagyítjuk (tehát középpontosan tükrözzük $\mathbf{s}$-re, majd vesszük a képét a 2 arányú, $\mathbf{s}$ középpontú hasonlóságnál), akkor az így kapott S' háromszög tartalmazza K-t. *Ne olvass tovább, a megoldás következik!*

Megoldás. Vegyünk egy S'-n kívüli $\mathbf{p}$ pontot. Ekkor S' valamelyik oldalegyenese elválasztja $\mathbf{p}$-t S'-től. Jelölje $\mathbf{a}_1'$ és $\mathbf{a}_2'$ az S' háromszög ezen egyenesen fekvő két csúcsát, és $\mathbf{a}_1$, illetve $\mathbf{a}_2$ az S háromszög megfelelő csúcsait. Könnyű látni, hogy

* A cikk az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-20-5 kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapból finanszírozott szakmai támogatásával készült.

az $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{p}$ háromszögnek nagyobb a területe, mint S-é (azonos alap, nagyobb magasság). Ezért S választásából adódóan $\mathbf{p}$ nem lehet K pontja, amivel az állítást beláttuk. $\square$

Ennek a cikknek a célja, hogy kimondjuk és belássuk a fenti feladat d-dimenziós analogonját. Ehhez először röviden bevezetjük a d-dimenziós tér fogalmát, és geometriájának néhány alapelemét.

2. Magasabb dimenzió – Bevezetés

Hogy néz ki a kérdés a háromdimenziós térben? Hasonló érveléssel belátható, hogy ha egy korlátos konvex testben, amely zárt, tehát a határoló felületet is tartalmazza, veszünk egy legnagyobb térfogatú tetraédert, akkor annak a súlypontjából vett (-3)-szoros nagyítottja tartalmazza a testet. Ehhez két dolgot kell tudni. Egyrészt azt, hogy ha a tér egy pontja nincs a tetraéderben, akkor annak egyik lapsíkja a tetraédert a ponttól elválasztja. Másrészt azt, hogy a tetraéder térfogata egyenesen arányos az alapterület és a magasság szorzatával (az arányossági tényező $\frac{1}{3}$, de ez itt nem fontos).

Mi történik háromnál magasabb dimenzióban? Ehhez egy-két dolgot tisztázni kell, leginkább azt, hogy mit jelent a magasabb dimenzió. Erről részletesen írtunk a KöMaL 2018 szeptemberi számában [1]. Röviden a *d-dimenziós euklídeszi geometria* felépítését így (is) lehet kezdeni: Vegyük a valós rendezett szám d-esek halmazát (d rögzített pozitív egész), tehát azt a halmazt, melynek elemei d koordinátából álló vektorok, $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$, ez geometriánk *ponthalmaza,* és $\mathbb{R}^d$-vel jelöljük. Egy ilyen vektort tudok szorozni valós számmal (minden koordinátát megszorzok vele), és megint egy vektort kapok, továbbá össze is tudok adni két ilyen vektort a szokott módon, koordinátánként. Tudom most definiálni két pont (tehát vektor) által meghatározott *szakaszt.* Az $(x_1, \ldots, x_d)$ és $(y_1, \ldots, y_d)$ pontok által meghatározott zárt szakasz az $(1-\lambda)(x_1, \ldots, x_d) + \lambda(y_1, \ldots, y_d)$ pontok halmaza, ahol λ befutja a $[0, 1]$ valós intervallumot. Gondold meg (tényleg!), hogy $d = 2$, illetve 3 esetén valóban így kapom meg a szakasz pontjait. Most már könnyű definiálni $\mathbb{R}^d$ *konvex halmazait:* azon ponthalmazok, amelyek tetszőleges két pontjukra az azok által meghatározott szakaszt is tartalmazzák.

A $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_d)$ és $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_d)$ pontok *távolságát* a sík- és térbeli esetek természetes általánosításaként a

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + \ldots + (p_d - q_d)^2}$$

képlettel definiáljuk.

Így, hogy távolságfogalmunk is van, definiálhatjuk a zárt halmazt. Egy $\mathbb{R}^d$-beli K halmazt *zártnak* hívunk, ha tartalmazza minden *torlódási pontját,* azaz minden olyan $\mathbf{p}$ pontot, amelyhez tetszőleges $\varepsilon > 0$ távolságra van $\mathbf{p}$-től legfeljebb ε távol lévő K-beli pont. Gondold meg, hogy például a síkon egy körlemez a határoló körvonal nélkül nem zárt, azzal együtt viszont zárt halmaz.

3. Konvex burok, hipersík, szimplex

Mi a tetraéder d-dimenziós megfelelője? Ehhez érdemes megismerkedni a *konvex burok* és a *hipersík* fogalmával.

Feladat. $\mathbb{R}^d$-ben tetszőlegesen sok konvex halmaz metszete is konvex.

Rögzítsünk egy tetszőleges H ponthalmazt $\mathbb{R}^d$-ben. Vegyük az összes H-t tartalmazó konvex halmaz metszetét, jelöljük K-val. A fenti feladat szerint K konvex halmaz, amely tartalmazza H-t. Ráadásul K a legkisebb a H-t tartalmazó konvex halmazok között, tehát minden H-t tartalmazó konvex halmaz tartalmazza K-t is. Ezt a K-t hívjuk *H konvex burkának.* Például a síkon három nem egy egyenesre eső pont konvex burka az a háromszöglemez, amelynek csúcsai az adott három pont.

Hogyan lehet a konvex burok pontjait előállítani? Legyen H véges ponthalmaz, $H = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ (az alsó indexek itt nem koordinátákat jelölnek, hanem a vektorok számozását).

Feladat. Lássuk be, hogy H konvex burka a

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \ldots + \lambda_n\mathbf{p}_n \tag{1}$$

alakú pontok halmaza, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \geqslant 0$ és $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$. Azt kell tehát belátni, hogy az (1) alakú pontok halmaza tartalmazza H-t (ez könnyű), konvex, és tetszőleges K-t tartalmazó konvex halmaz tartalmaz minden (1) alakú pontot.

A síkon három pont lehet egy egyenesen, vagy nem, utóbbi esetben azt mondhatjuk, hogy *általános helyzetűek.* Ekkor a konvex burkuk egy háromszög. A térben négy pont eshet egy síkba, vagy nem, utóbbi esetben, megintcsak általános helyzetűnek mondjuk őket, és észrevehetjük, hogy konvex burkuk egy (nem feltétlen szabályos) tetraéder. Hogy megyünk tovább a dimenzióval?

Az $\mathbb{R}^d$ térben *hipersíknak* nevezzük azon $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ pontok halmazát, amelyek kielégítik az

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_d x_d = \alpha_0$$

lineáris egyenletet valamely $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ számokra, ahol az $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ számok nem mindegyike nulla. Gondold meg, hogy a síkon minden egyenes ilyen alakú, a 3-dimenziós térben pedig minden sík ilyen alakú. Ha a fenti egyenletben az egyenlőségjelet $\leqslant$, illetve $\geqslant$ jelre cseréljük, akkor az egyenlőtlenséget kielégítő pontok halmaza a hipersík által határolt egyik, illetve másik *zárt féltér.*

Végre megválaszolhatjuk, mi a tetraéder d-dimenziós megfelelője. Ha $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{d+(x_1,\ldots,x_d)1}$ általános helyzetű pontok $\mathbb{R}^d$-ben, tehát nem tartalmazza őket hipersík, akkor ezen $d+1$ pont konvex burkát *szimplexnek* nevezzük.

3.1. Szimplex mint félterek metszete. Egy konvex ötszöget a síkon tekinthetünk úgy, mint az öt csúcsának a konvex burka. De úgy is nézhetünk rá, mint az öt oldalegyenes által meghatározott zárt félsíkok metszete. Hasonlóan, egy kockát a térben megkapunk mint a 8 csúcsának a konvex burka, de úgy is, hogy vesszük a 6 lapsíkját és az azok által meghatározott (megfelelő irányú) 6 féltér metszetét. Nem látjuk be, de nem meglepő a következő állítás.

1. állítás. *Legyenek $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{d+1}$ általános helyzetű pontok $\mathbb{R}^d$-ben. Tudjuk, hogy minden $i = 1, \ldots, d+1$ indexre a $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{p}_i\}$ ponthalmaz egy* *hipersíkot határoz meg. Jelölje H_i az ezen hipersík által határolt azon zárt félteret, amely tartalmazza $\mathbf{p}_i$-t. Ekkor a $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_{d+1}$ pontok konvex burkaként kapott szimplex megegyezik a $H_1, \dots, H_{d+1}$ félterek metszetével.*

4. Térfogat

Az utolsó fogalom, amellyel még adósak vagyunk, ha a cikk elején feltett kérdést d-dimenzióban is fel akarjuk tenni, d-dimenziós konvex halmaz térfogata.

Középiskolában azt mondják, hogy az a oldalhosszú négyzet területe a^2, és minden konvex síkidomot „közelítünk" véges sok páronként nem átfedő (mondjuk tengely-párhuzamos) négyzet uniójával. Ahogy a közelítés egyre pontosabb, úgy tart a négyzetek összterülete egy számhoz. Ezt a számot hívjuk a konvex síkidom területének.

Ez egy jó felépítése a területnek, de azért tudni kell, hogy itt néhány lukat majd csak az egyetemen (pl. matematika szakon) fognak betömni: mit jelent az, hogy sok kis négyzet uniója közel van a síkidomhoz? Ahogy finomodik a közelítés, miért tart a négyzetek összterülete egy számhoz? Ez a munka szépen elvégezhető, de mi most ezt nem tesszük meg, mi is „hitelbe" dolgozunk: hidd el, kedves Olvasó, hogy egy d-dimenziós konvex testet ugyanígy lehet kis kockák uniójaként közelíteni, és ezen uniók térfogata, ahogyan a közelítés egyre pontosabb, tart egy számhoz, amelyet a konvex test *d-dimenziós térfogatának* hívunk.

4.1. Gúla térfogata. Legyen A az $\mathbb{R}^d$ tér egy hipersíkjának egy konvex részhalmaza, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ pedig ezen hipersíkon kívül eső pont. Ekkor az $A \cup \{\mathbf{p}\}$ halmaz konvex burkát A alapú, $\mathbf{p}$ csúcsú *gúlának* hívjuk. A hipersíkot azonosíthatjuk $\mathbb{R}^{d-1}$-gyel, és így tudunk A-nak a $(d-1)$-dimenziós térfogatáról beszélni. A hipersík és $\mathbf{p}$ távolsága (tehát az őket összekötő legrövidebb szakasz hossza) a gúla *magassága.* Belátható, hogy

(2)
$$\text{gúla } d\text{-dimenziós térfogata} = \frac{1}{d} \times \big(\text{alap } (d-1)\text{-dimenziós térfogata}\big) \times \text{magasság}.$$

A képlet $d = 2$ és 3 esetben ismerős lehet. Most nem látjuk be (2)-t, ehhez egy kicsit kell tudni integrálni.

5. Szimplexek között

Ha egy háromszöget a súlypontja körül (-2)-szeresére nagyítunk, akkor egy őt tartalmazó háromszöget kapunk. Ha egy tetraédert a súlypontja körül (-3)-szorosára nagyítunk, akkor egy őt tartalmazó tetraédert kapunk. Most végiggondoljuk mindezt d dimenzióban.

Legyen S a $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{d+1}$ általános helyzetű $\mathbb{R}^d$-beli pontok konvex burkaként kapott szimplex. A súlypontja az

$$\mathbf{s} = \frac{1}{d+1}(\mathbf{p}_1 + \ldots + \mathbf{p}_{d+1})$$

pont.

Feladat. Lássuk be, hogy S-nek az $\mathbf{s}$ középpontú $(-d)$-arányú középpontos nagyítottja, S', tartalmazza S-et. *Ne olvass tovább, segítség következik!*

Segítség. Állítsuk elő a $\mathbf{p}_i$ pontot $\mathbf{p}_i = \lambda_1\mathbf{p}_1' + \ldots + \lambda_{i-1}\mathbf{p}_{i-1}' + \lambda_{i+1}\mathbf{p}_{i+1}' + \ldots + \lambda_{d+1}\mathbf{p}_{d+1}'$ alakban, ahol a λ_j együtthatók nemnegatívak, és az összegük 1.

Végül kimondhatjuk a cikk bevezetőjében szereplő síkbeli feladat d-dimenziós változatát.

2. tétel. *Adott $\mathbb{R}^d$-ben egy zárt, korlátos, konvex halmaz, K. Vegyük az összes K által tartalmazott szimplexet. Belátható (ezt hidd el), hogy ezek között van (esetleg több) maximális d-dimenziós térfogatú, legyen S ilyen szimplex. Ekkor, ha S-et az* $\mathbf{s}$ *súlypontjából $(-d)$-szeresére nagyítjuk, akkor az így kapott S' szimplex tartalmazza K-t.*

Bizonyítás. A tétel bizonyítása az eddigi előkészületekkel ugyanaz, mint a síkbeli esetté. Jelölje S csúcsait $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}$, az S' csúcsait $\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_{d+1}'$. Ekkor 1. állítás szerint minden S'-n kívül eső $\mathbf{p}$ ponthoz van egy $i \in \{1, \ldots, d+1\}$ index, hogy S' az $\{\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_{d+1}'\} \setminus \{\mathbf{a}_i'\}$ pontok által meghatározott hipersík egyik oldalán található, míg $\mathbf{p}$ a másikon. A (2) képlet alapján könnyű látni, hogy az

$$\big(\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{d+1}\} \setminus \{\mathbf{a}_i\}\big) \cup \{\mathbf{p}\}$$

halmaz konvex burkaként kapott szimplex térfogata nagyobb S térfogatánál, ezért $\mathbf{p}$ nem lehet K pontja. $\square$

Feladat. Lássuk be, hogy S-nek az $\mathbf{s}$ középpontú $(d+1)$-arányú középpontos nagyítottja tartalmazza K-t.

Hivatkozás

[1] Naszódi M.: *Politópok és a gömb d-dimenzióban,* KöMaL **68.** évf. 9. sz. (2018).

Naszódi Márton

EGMO 2022

Az idei Európai Lányok Matematikai Olimpiáját (EGMO-t) Magyarország szervezte 2022. április 6–12. között Egerben. A verseny weboldala:

`https://egmo2022.hu/`.

Erre a megmérettetésre szervező országként két csapatot is delegálhattunk.

A versenyen a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiához (IMO) hasonlóan két versenynap van, mindkét nap 3–3 feladatot kell megoldani 4,5 óra alatt. Minden feladat 7 pontot ér. A feladattípusok a következők voltak: geometria, számelmélet,