Fizika tanulmányok alapján ismert, hogy a parabolatükör a tengelyével párhuzamos fénysugarakat a fókuszponton keresztül veri vissza.

b) A parabola belsejében fénysugár érkezik az y-tengely mentén. Mi a visszaverődő fénysugár egyenesének egyenlete? (*7 pont*)

Fizikában beesési merőlegesnek hívják a beesési pontban a parabola érintőjére állított merőlegest.

c) Mekkora az y-tengely mentén beeső fénysugár és a beesési merőleges által bezárt szög? (*3 pont*)

Jócsik Csilla
Győr

Megoldásvázlatok a 2022/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $2^{x+1}+3=2^{1-x}$ *egyenletet a valós számok halmazán.*

A $H=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ *alaphalmaz* A, B, C *részhalmazairól az alábbiakat ismerjük:*

$$B\subset A;\quad \overline{A\cup C}=\{0;8\};\quad A\cap C=\{3;4;7\};\quad \overline{C}=\{0;1;2;8;9\};\quad A\setminus B=\{2;7;9\}.$$

b) *Elemeinek felsorolásával adjuk meg az* A, B, C *halmazokat.* (*11 pont*)

Megoldás.

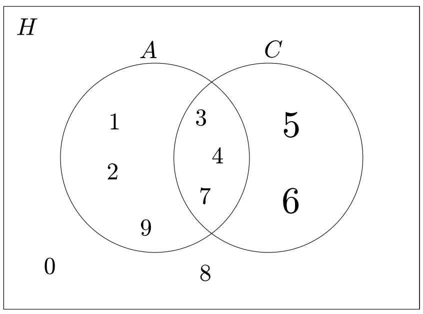
a)
$$2\cdot 2^x+3=\frac{2}{2^x};\quad 2\cdot(2^x)^2+3\cdot 2^x-2=0;$$

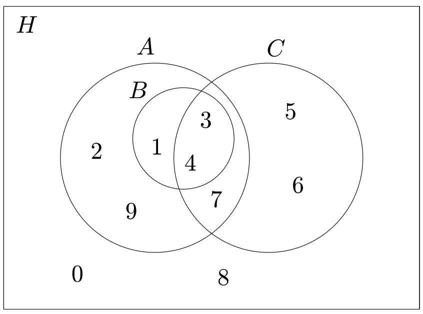
$$(2^x)_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4};\quad 2^x\neq -2;\quad 2^x=\frac{1}{2};\quad 2^x=2^{-1}\Rightarrow x=-1$$

(a 2^x függvény szigorúan monoton növő).

Ellenőrzés: $2^0+3=2^{1-(-1)}$; $1+3=2^2$; $4=4$. (Az ellenőrzés helyettesíthető az ekvivalens átalakításokra való hivatkozással.)

b) Mivel $B\subset A$, vizsgáljuk először az A, C, H halmazok viszonyát. Ez a második, harmadik és negyedik információ alapján az első *ábráról* leolvasható.





Az 5 és a 6 csak a $C \setminus A$ halmazban lehet. A továbbiakban a B halmazt úgy kell elhelyezni az A-n belül, hogy az utolsó feltétel is teljesüljön. A második *ábrán* láthatjuk a megfelelő elhelyezést, így a halmazok:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 7; 9\},$$
$$B = \{1; 3; 4\},$$
$$C = \{3; 4; 5; 6; 7\}.$$

A H halmaz elemeinek elrendezése a feltételek alapján egyértelmű, ezért a feladatnak egyéb megoldása nincs.

2. *Egy* 10 cm *oldalú négyzet minden oldalára kifelé egyenlő szárú háromszögeket rajzoltunk, melyeknek szárai* 13 cm*-esek, így egy csillagszerű alakzatot kaptunk.*

a) Mekkora a csillag területe?

Felhajtogatva az egyenlő szárú háromszögeket, egy négyzet alapú egyenes gúla keletkezett.

b) Mekkora a gúlába írható gömb sugara? (*13 pont*)

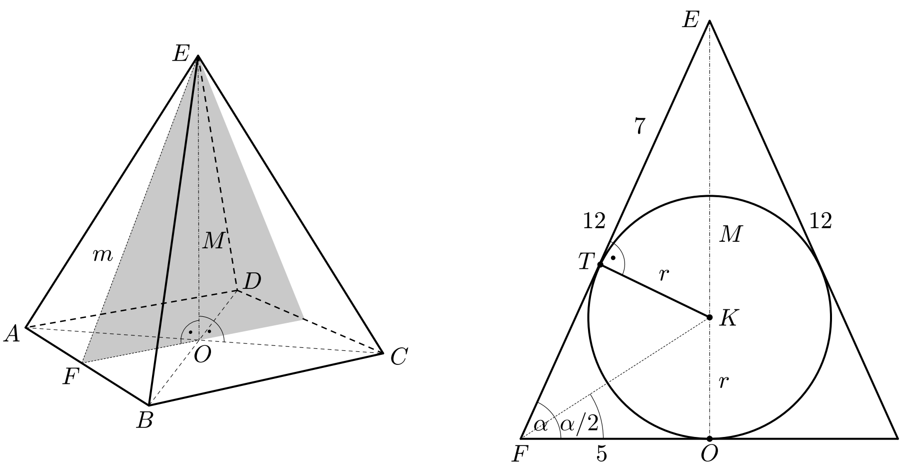
Megoldás. *a*) Az egyenlő szárú háromszög magassága m; $5^2 + m^2 = 13^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow m = 12$ cm;

$$T = 10^2 + 4 \cdot \frac{10 \cdot 12}{2} = 340 \text{ cm}^2.$$

b) A gúla M magassága egyik befogója az FOE derékszögű háromszögnek: $5^2 + M^2 = 12^2 \Rightarrow M = \sqrt{119}$ (cm). Másképpen:

$$OC = 5\sqrt{2}; \quad \left(5\sqrt{2}\right)^2 + M^2 = 13^2; \quad M^2 = 169 - 50 \Rightarrow M = \sqrt{119} \text{ (cm)}.$$

Készítsünk egy síkmetszetet a testről; a metszősík átmegy az E, O, F pontokon. Az érintőgömb középpontja szimmetria okok miatt rajta van az OE egyenesen, ezért a metszősík a gömböt egy főkörében metszi, ez a kör érintőköre lesz a síkmetszet háromszögnek.



Alkalmazhatjuk a jól ismert $r=\frac{T}{s}$ képletet, ahol T a háromszög területe, r a beírt kör sugara, s pedig a félkerület. Itt

$$T=\frac{10\cdot\sqrt{119}}{2},\quad s=\frac{10+12+12}{2}=17,\quad \text{tehát}\quad r=\frac{5\sqrt{119}}{17}\approx 3{,}21\text{ cm}.$$

Egy másik lehetőség: az $ETK\triangle\sim EOF\triangle$ (szögeik páronként megegyeznek) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{r}{7}=\frac{5}{\sqrt{119}}\Rightarrow r=\frac{35}{\sqrt{119}}=\frac{35\sqrt{119}}{119}=\frac{5\sqrt{119}}{17}.$$

3. *András és Balázs „zsíroznak". A „zsírozás" a 32 lapos magyar kártya egyik egyszerű játéka, amelynek az a lényege, hogy a végén az „ütések" során megszerzett lapok „zsír" tartalma alapján dől el, ki nyerte a játékot.*

A magyar kártyában négy „szín": piros, zöld, makk, tök; mindegyik színen belül ász, király, felső, alsó, tízes, kilences, nyolcas, hetes található. „Zsírnak" számít az ász és a tízes, az nyer, akinek több a „zsírja". (Ha mindketten 4–4 „zsírt" szereztek, akkor az nyert, aki utoljára „ütött"; döntetlen nincs.)

Az első leosztásnál egyszerre négy-négy lapot kapnak a játékosok.

a) Mennyi a valószínűsége annak, hogy András első leosztáskor kapott négy lapja között legalább egy „zsír", és legalább egy hetes található?

Azért, hogy eldöntsék, ki kezdi a játékot, sorsolnak úgy, hogy a megkevert csomagból felváltva visszatevés nélkül leemelnek egy-egy lapot. Aki az első hetest húzza, az kapja először a négy lapot, és kezdi meg a játékot. (Ha pl. András húz először hetest, akkor Balázs kever, és oszt előbb Andrásnak négy lapot, majd saját magának négyet; András kezdi a játékot. Később ez a keverés, osztás- kezdés felváltva történik.)

András kezdte a sorsolást, és Balázsnak a második húzására sikerült hetest húznia.

b) Mennyi ennek a valószínűsége? (*13 pont*)

Megoldás. A csomagban 8 „zsír", 4 hetes és 20 egyéb lap van. Az esemény szempontjából kedvező eseteket a könnyebb áttekinthetőség kedvéért a *táblázatban* foglaltuk össze.

Az esemény valószínűsége:

$$P(A)=\frac{9704}{\binom{32}{4}}=\frac{9704}{35960}=\frac{1213}{4495}\approx 0{,}2699.$$

Megkaphatjuk az eredményt úgy is, hogy a komplementer esemény valószínűségét számítjuk ki először. A komplementer esemény az, ha a négy lap között nincs „zsír", vagy nincs hetes. Ha kivesszük a „zsírokat", 24; ha a heteseket, 28; ha mindkettőt, 20 lap marad. A komplementer esemény szempontjából kedvező esetek száma:

$$\binom{24}{4}+\binom{28}{4}-\binom{20}{4}=26\,256,\quad \text{így}\quad P(\overline{A})=\frac{26\,256}{35\,960},$$

„Zsír” (8)	Hetes (4)	Egyéb (20)	Hányféleképpen?
1	1	2	$\binom{8}{1}\binom{4}{1}\binom{20}{2}=6080$
1	2	1	$\binom{8}{1}\binom{4}{2}\binom{20}{1}=960$
1	3	0	$\binom{8}{1}\binom{4}{3}=32$
2	1	1	$\binom{8}{2}\binom{4}{1}\binom{20}{1}=2240$
2	2	0	$\binom{8}{2}\binom{4}{2}=168$
3	1	0	$\binom{8}{3}\binom{4}{1}=224$
		Összesen:	9704

tehát

$$P(A)=1-\frac{26\,256}{35\,960}=\frac{9704}{35960}\approx 0{,}2699.$$

b) András húzott először, nem lett hetes; Balázs húzott, nem hetes; András húzott, nem hetes; Balázs húzott, hetes.

$$P(B)=\frac{28}{32}\cdot\frac{27}{31}\cdot\frac{26}{30}\cdot\frac{4}{29}=\frac{78\,624}{863\,040}=\frac{819}{8990}\approx 0{,}0911.$$

4. *Vegyük az alábbi kijelentéseket:*

A) *Ha egy mértani sorozatnak van véges határértéke, akkor hányadosa egynél kisebb.*

B) *Ha $f(x)=x+1$, és $g\circ f=x^2+2x+1$, akkor $g(x)=x^2$.* *($g\circ f=g\big(f(x)\big)$, a g függvény az f függvénynek közvetett függvénye.)*

C) *Ha két sorozat összege és szorzata konvergens, akkor a sorozatok külön-külön is konvergensek.*

a) *Állapítsuk meg a kijelentések logikai értékét (igaz, hamis). Állításainkat igazoljuk.*

D) *Ha egy n csúcsú egyszerű gráf minden csúcsa legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ fokú, akkor a gráf összefüggő. ($\left[\frac{n}{2}\right]$ az $\frac{n}{2}$ egész részét jelenti.)*

b) *Fogalmazzuk meg a D) állítás megfordítását, majd döntsük el, hogy ez igaz, vagy hamis. Megállapításunkat indokoljuk.* *(14 pont)*

Megoldás. *a*) *A*) Hamis. A konstans sorozat tekinthető egy $q=1$ hányadosú mértani sorozatnak, amely konvergens, azaz van olyan véges határértékkel rendelkező mértani sorozat, amelynek hányadosa nem kisebb 1-nél.

B) Igaz. $g\circ f=g\big(f(x)\big)=(x+1)^2=x^2+2x+1$.

C) Hamis. Ellenpéldák:

$$a_n=\left|\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|,\quad b_n=\left|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right|\quad (n\in\mathbb{Z}^+);$$

vagy

$$a_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad b_n = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) \quad (n \in \mathbb{Z}^+);$$

vagy $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$; vagy

$$a_n = \begin{cases} 2022, & \text{ha } n \text{ pozitív páratlan} \\ 0, & \text{ha } n \text{ pozitív páros} \end{cases} \text{szám,}$$

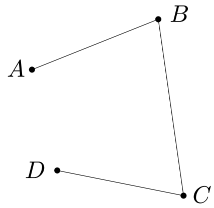
$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ pozitív páratlan} \\ 2022, & \text{ha } n \text{ pozitív páros} \end{cases} \text{szám;} \qquad \text{stb.}$$

b) A D) állítás megfordítása:

Ha egy n csúcsú egyszerű gráf összefüggő, akkor minden csúcsa legalább $\left[\frac{n}{2}\right]$ fokú.

Az állítás *hamis.*

Pl.: az *ábrán* összefüggő négy csúcsú gráf van, amelyben az A és D csúcsok foka 1, azaz fokuk nincs legalább 2.



Megjegyzés. A D) állítás igaz, ennek bizonyítása azonban most nem feladatunk.

II. rész

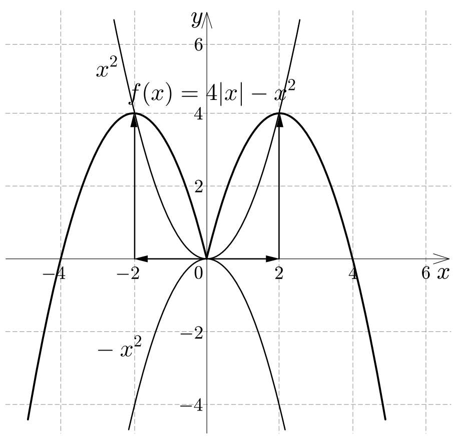
5. *a*) *Függvény-transzformációk felhasználásával ábrázoljuk az* $f(x) = 4|x| - x^2$ *függvényt a* $[-5; 5]$ *intervallumon.*

A H *halmaz elemeit az* $f(x)$ *függvény zérushelyei és lokális maximumhelyei alkotják. Ismétlés nélkül, véletlenszerűen kiválasztunk három elemet* H*-ból.*

b) *Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három elem összege osztható* 9*-cel?*

Egy korlátos síkidomot a $g(x) = 4x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$ *függvény grafikonja és az* x *tengely zár közre.*

c) *Számítsuk ki a síkidom területét.* (*16 pont*)



Megoldás.

a)

$$f(x) = \begin{cases} -4x - x^2 = -(x+2)^2 + 4, \\ \qquad \text{ha } x \in [-5; 0), \\ 4x - x^2 = -(x-2)^2 + 4, \\ \qquad \text{ha } x \in [0; 5]. \end{cases}$$

Innen leolvashatók a transzformációs lépések: először tükrözzük az x^2 függvény grafikonját (a normálparabolát) az x tengelyre, majd eltoljuk $x < 0$ esetén a $(-2; 4)$, $x \geqslant 0$ esetén pedig a $(2; 4)$ vektorral.

b) A zérushelyek: -4, 0, 4; ellenőrzés behelyettesítéssel, vagy a hiányos másodfokú egyenletek megoldásával. A lokális maximumhelyek: -2, 2.

Indoklás vagy elemi úton: akkor kapjuk a legnagyobb értéket, ha 4-ből a lehető legkevesebbet veszünk el, ez pedig akkor következik be, ha a zárójelben a nulla áll;
vagy: a zérushelyek számtani közepe;
vagy: differenciálszámítással.

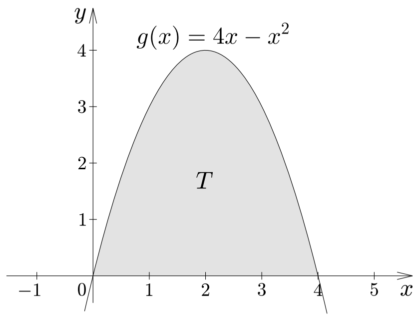
Tehát $H=\{-4;-2;0;2;4\}$. A kiválasztott három szám összege legalább -6 és legfeljebb 6, vagyis akkor lesz 9-cel osztható, ha az összeg 0. Ez két esetben fordulhat elő, ha a -2, 0, 2, vagy a -4, 0, 4 számokat választottuk ki. Az összes lehetőség $\binom{5}{3}=10$, így a keresett valószínűség:

$$P(A)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

c) Látható, hogy a $g(x)$ függvény megegyezik az $f(x)$ függvénnyel, ha $x\geqslant 0$, ezért a síkidom területe:

$$T=\int_0^4(4x-x^2)\,\mathrm{d}x=\left[4\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^4=$$

$$=2\cdot 4^2-\frac{4^3}{3}=\frac{32}{3}.$$



Egy másik lehetőség, ha használjuk a függvénytáblázatot (Nemzeti Tankönyvkiadó, raktári szám: 16129/1, 60. oldal), ahol közlik a parabolaszelet területét, amely alkalmazható ebben az esetben:

$$T=\frac{2}{3}\cdot 4\cdot 4=\frac{32}{3}.$$

6. *Egy vitorlázórepülő pilóta teljesítményrepülést tervez a következőképpen: Szombathelyről indul, délkelet felé repül, majd Kaposvár környékén irányt vált É-ÉK felé. Mikor Székesfehérvár légterét elérte, nyugatra tart, így érkezik vissza a kiinduló repülőtérre. (É-ÉK az északi és északkeleti irány szögfelezőjébe mutató irány.)*

Az $1:450\,000$*-es méretarányú térképen a Kaposvár-Székesfehérvár távolság* 22 cm. *(Az* $1:450\,000$*-es méretarány azt jelenti, hogy a térképen mért távolság* $450\,000$*-szerese van a valóságban a két objektum között.)*

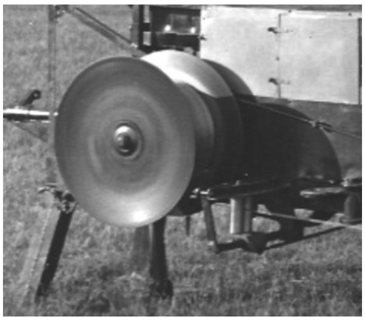
a) *Mekkora a tervezett távrepülés hossza légvonalban? A végeredményt* 10 km*-es pontosságúra kerekítve* km*-ben adjuk meg.*

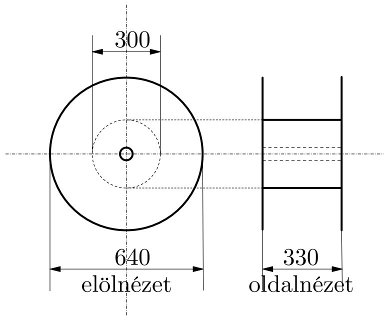
A repülőgép hagyományos magasságmérője a p légköri nyomásból határozza meg a tengerszint feletti magasságot a $p=p_0\cdot 2^{-\frac{h}{5500}}$ *képlet alapján, ahol* p_0 *a tengerszinten mért nyomást, h pedig a tengerszint feletti magasságot jelenti méter mértékegységben megadva.*

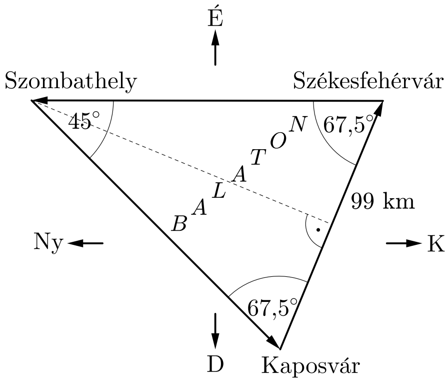
b) Milyen magasan van a repülőgép, ha $p_0 = 103$ kPa*,* $p = 88$ kPa*?*

A vitorlázó repülőgépek levegőbe emelésének leggyakrabban alkalmazott módja a csörlővel vontatás. Ez úgy történik, hogy a csörlőaggregátor egy kötéldobra rétegenként szorosan feltekercseli a drótkötelet, amelynek végén a vitorlázó repülőgép van. A mellékelt ábrán *a kötéldob legfontosabb méreteit milliméter mértékegységben tüntettük fel. A drótkötél átmérője* 6 mm.

c) Legfeljebb milyen hosszú drótkötelet lehet feltekerni erre a dobra? (*16 pont*)







Megoldás. *a*) A térkép méretarányából és a térképen mért távolságból az első és második fordulópont távolsága (1 cm = 4,5 km) $22 \cdot 4{,}5$ km = 99 km; a közölt irányokból egy egyenlő szárú háromszög adódik.

A szár legyen x, ekkor

$$\cos 67{,}5^\circ = \frac{49{,}5}{x},$$

ahonnan $x = 129{,}3$ km.

(Vagy másképpen: $\frac{x}{99} = \frac{\sin 67{,}5^\circ}{\sin 45^\circ} \Rightarrow x = 129{,}3$.)
A teljes táv $2x + 99 = 357{,}6$ km, kerekítve 360 km.

b) Behelyettesítve az adatokat, a $88 = 103 \cdot 2^{-\frac{h}{5500}}$ egyenletet kell megoldani.

$$\frac{88}{103} = 2^{-\frac{h}{5500}}; \quad \lg\frac{88}{103} = \lg 2^{-\frac{h}{5500}}; \quad \lg\frac{88}{103} = -\frac{h}{5500}\lg 2; \quad h = -5500\frac{\lg\frac{88}{103}}{\lg 2},$$

$h = 1249{,}9 \approx 1250$ m.

c) Az első hurok hossza egy 300 mm átmérőjű kör kerülete (300π), ilyen hurokból (ha a lehető legszorosabban tekercselik) $\frac{330}{6} = 55$ fér el az első rétegben. A rétegenkénti hurkok száma a továbbiakban is 55 lesz, de a rétegek átmérője 12 mm-enként növekszik egészen addig, amíg el nem éri a 640 mm-t.

A rétegek átmérői tehát egy olyan számtani sorozat elemeit alkotják, amelynek első eleme 300 (mm), az utolsó pedig nem nagyobb 640-nél.

$$300+(n-1)\cdot 12 \leqslant 640 \Rightarrow n \leqslant \frac{88}{3} \Rightarrow n \leqslant 29,$$

a kötéldobra legfeljebb 29 réteg drótkötél fér fel.

A legnagyobb hurok átmérője: $d_{29}=300+28\cdot 12=636$ (mm), így összesen legfeljebb

$$S_{29}=\frac{29(300+636)}{2}\cdot \pi \cdot 55 = 234\,5073{,}252 \text{ (mm)} \approx 2{,}3 \text{ km}$$

hosszú kötél fér fel a dobra.

Megjegyzés. A gyakorlatban a legnagyobb réteg átmérője – azért, hogy véletlenül se tekeredjen le a kötél a dobról – 8-10 cm-rel kevesebb lehetséges legnagyobb átmérőnél (640 mm), valamint a tekercselés szorossága, a repülőtér mérete, a drótkötél súlya miatt egy ekkora dobra kb. 1,1–1,4 km kötelet szoktak feltekerni.

7. *Egy trapéz rövidebbik alapja* 1*, egy másik oldala* 7 *egység hosszú. A trapéz oldalainak hosszát megfelelő sorrendbe rakva egy számtani sorozat szomszédos elemeit kapjuk.*

a) Mekkora a trapéz nagyobbik alapja, mekkorák a szárak?

Az alábbi adatsokaságban néhány trapéz oldalhosszának mérőszámát soroltuk fel véletlenszerűen: 1, 3, 5, 7, 1, 4, 7, 10, 1, 7, 13, 19, 1, 6, 12, 15.

b) Számítsuk ki az adatok átlagát, szórását, határozzuk meg a móduszt és a mediánt.

Az egy síkban levő 1, 3, 7, 5 *egység hosszú szakaszokat ebben a sorrendben csuklósan rögzítettük egymáshoz, majd addig mozgattuk, míg egy húrnégyszöget sikerült kialakítani.*

c) Mekkora szöget zár be egymással ekkor az 5 *és* 7 *egység hosszú szakasz?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Rakjuk növekvő sorrendbe a számokat; a legkisebb az 1 lesz, egyébként negatív szám is szerepelne a sorozat elemei között, ami oldal mérőszáma nem lehet.

Ha a 7 a sorozat második eleme, akkor a továbbiak 13, illetve 19; ha a harmadik eleme, akkor a sorozat elemei: 1, 4, 7, 10; ha a negyedik, akkor pedig: 1, 3, 5, 7.

A háromszög-egyenlőtlenséget figyelembe véve mindhárom esetben akkor kapunk ezekből az adatokból trapézt, ha a nagyobbik alap a sorozat legnagyobb elemével egyenlő, a két szár pedig a két középső értékkel egyezik meg. A megoldások tehát:
alapok: 1, 19; szárak: 7, 13, vagy
alapok: 1, 10; szárak: 4, 7, vagy
alapok: 1, 7; szárak: 3, 5.

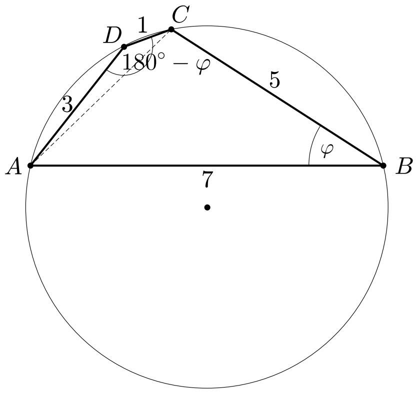
Megjegyzés. Mindegyik trapéz egyúttal érintőnégyszög is, mert a szemközti oldalak összege egyenlő.

b) Az adatokat nemcsökkenő sorrendbe rakva: 1, 1, 1, 1, 3, 4, 5, **6**, **7**, 7, 7, 10, 12, 13, 15, 19 leolvasható, hogy a módusz 1, a medián 6,5.

Az átlag: $\frac{112}{16} = 7$, a szórás:

$$\sqrt{\frac{\begin{array}{c}4(7-1)^2+(7-3)^2+(7-4)^2+(7-5)^2+(7-6)^2+3(7-7)^2+\\+(7-10)^2+(7-12)^2+(7-13)^2+(7-15)^2+(7-19)^2\end{array}}{16}} = 5{,}32.$$

Megjegyzés. Az átlag és szórás kiszámítására használhatjuk a zsebszámológép statisztikus funkcióját.



c) Írjuk fel a koszinusztételt az AC átlóra mindkét háromszögben:

$$AC^2 = 5^2 + 7^2 - 2\cdot 5\cdot 7\cdot \cos\varphi,$$

$$AC^2 = 1^2 + 3^2 - 2\cdot 1\cdot 3\cdot \cos(180° - \varphi),$$

$$\cos(180° - \varphi) = -\cos\varphi,$$

ezekből

$$25 + 49 - 70\cos\varphi = 1 + 9 + 6\cos\varphi,$$

$$\cos\varphi = \frac{64}{76} \Rightarrow \varphi = 32{,}64°.$$

Az 5 és 7 egység hosszú szakasz 32,64°-os szöget zár be egymással.

8. *Egy vegyi anyagokat gyártó vállalat egy bizonyos terméket, melynek összetétele csak hatóanyagának koncentrációjában különbözik, kétféle kiszerelésben forgalmaz az alábbiak szerint.*

A változat: 60%*-os töménységű,* 2 *kg-os,* 3 dm^3*-es dobozban;*

B változat: 20%*-os töménységű,* 5 *kg-os,* 8 dm^3*-es dobozban.*

A vállalat mintaboltjában a fenti árukból árkedvezményt adnak azoknak a vevőknek, akik összesen legalább 40 *kg-ot vásárolnak ezekből. Egy vevő, akinek* 50%*-os keverékre van szüksége, vásárolni szeretne belőlük úgy, hogy minden megvásárolt doboz tartalmát teljes mértékben felhasználja.*

a) *Hány dobozzal vegyen az egyes változatokból, ha részesülni kíván az árkedvezményben, szállítóeszközére legfeljebb összesen* 120 *kilogrammnyi terhet rakhat, a megvásárolt áru teljes térfogata nem haladhatja meg a* 130 dm^3*-t, és a kedvezmény mértéke egyenesen arányos a megvásárolt áru össztömegével?*

Ez a vállalat egyike annak az öt vállalatból álló csoportnak, melyben mindegyik vállalat bármelyik másikkal üzleti kapcsolatban áll, és az egymással szembeni követeléseiket forintban, vagy euróban egyenlítik ki. Két szereplő egymás között ugyanabban a pénznemben fizeti ki a számlát. A szerződések megkötése után észrevették, *hogy nincs három olyan vállalat, melyek egymás között azonos valutában rendezik tartozásaikat.*

b) Igazoljuk, hogy mindegyik vállalat kettőnek forinttal, a másik kettőnek pedig euróval fizet. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a zacskók száma x, y az A és B változatú termékből ($x, y \in \mathbb{N}$), ekkor tömegük: $2x + 5y$, hatóanyag-tartalmuk $0{,}6 \cdot 2x + 0{,}2 \cdot 5y$, illetve $0{,}5 \cdot (2x + 5y)$ (a mértékegység kg).

A kétféleképpen számított hatóanyag-tartalom egyenlő, felírhatjuk, hogy $1{,}2x + y = x + 2{,}5y$, innen $x = 7{,}5y$; másrészt:

$$40 \leqslant 2x + 5y \leqslant 120;$$
$$40 \leqslant 2 \cdot 7{,}5y + 5y \leqslant 120 \quad / : 20$$
$$2 \leqslant y \leqslant 6.$$

Ahhoz, hogy x egész szám legyen, y-nak párosnak kell lennie, ezért $y = 2; 4; 6$; $x = 15; 30; 45$.

Az $x = 15$, $y = 2$ esetben a térfogat	$15 \cdot 3 + 2 \cdot 8 = 61\ \text{dm}^3$;
az $x = 30$, $y = 4$ esetben	$30 \cdot 3 + 4 \cdot 8 = 122\ \text{dm}^3$;
az $x = 45$, $y = 6$ esetben	$45 \cdot 3 + 6 \cdot 8 = 183\ \text{dm}^3$;

ez utóbbi már több a megengedettnél, így ezt nem választhatja a vevő.

A maradék kettő közül az első esetben 40 kg, a másodikban 80 kg az áru össztömege, a kedvezmény a második esetben nagyobb, ezért a vevőnek az A változatból 30, a B-ből 4 dobozzal célszerű vásárolnia.

b) A feladatot modellezhetjük egy ötpontú teljes gráffal, melynek éleit két színnel (piros, kék) színeztük ki, pl. a piros jelentse azt, hogy a felek forint alapon, míg a kék, hogy euró alapon rendezik tartozásaikat. Tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy van legalább egy olyan vállalat, amelyik legalább három másikkal ugyanabban a pénznemben fizeti a számlát. Legyen ez az A vállalat, az A pontból induljon ki három egyszínű (pl. piros) él a B, C, D pontokba. (Ha négy egyszínű él indul A-ból, akkor a negyediket hagyjuk figyelmen kívül.) Ha a B, C, D pontokat összekötő élek valamelyike (pl. BC) piros lenne, akkor az A, B, C pontokat piros élek kötnék össze, ami ellentmond a feltételeknek. Ekkor azonban a B, C, D pontokat kék élek kötik össze, ami szintén lehetetlen, így a feltevésünk helytelen volt. A gráf élei kiszínezhetők pl. úgy, hogy az ötszög oldalait pirosra, az átlóit pedig kékre festjük, minden pontból pontosan két piros és két kék él indul. Ezzel a feladatot megoldottuk.

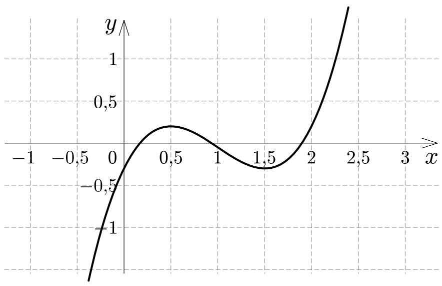
II. megoldás: tegyük fel a bizonyítandó állítással ellentétben, hogy van olyan vállalat, amelyik három (vagy négy) cégnek is ugyanabban a valutában, mondjuk forintban fizet. Legyen ez az A nevű cég, a többit nevezzük B, C, D, E-nek. Mivel fizetnek egymásnak a B, C, D cégek? (E-t figyelmen kívül hagyhatjuk!) Ha közülük bármelyik kettő forinttal egyenlíti ki a számlát, legyen pl. B és C, akkor az A, B, C cégek közötti számla kiegyenlítés forintban történik, ami ellentmond a feltételeknek. Ha azonban mindhárman egymás között euróban fizetik ki a számlát, akkor is ellentmondáshoz jutottunk. Mivel mindkét esetben ellentmondásra jutottunk, több eset pedig nem létezik, a kiinduló feltevésünk hamis, azaz igaz az állítás. A kifizetések megoldhatók pl. úgy, hogy A a B-nek, B a C-nek, C a D-nek, D az E-nek, E az A-nak forinttal fizet; A a C-nek és D-nek, B a D-nek és E-nek, C az E-nek és A-nak, D az A-nak és B-nek, E a B-nek és C-nek euróval fizet.

9. *a) A p valós paraméter mely értéke esetén lesz az $f(x)=x^3-3x^2+\frac{9}{4}x+p$ ($x\in\mathbb{R}$) függvénynek három különböző zérushelye a valós számok halmazán?*

A $g(x)=x^3+bx^2+cx+2022$ ($x\in\mathbb{R}$) függvény b és c együtthatóit szabályos dobókockával sorsoljuk ki; az első dobás b-t, a második c-t eredményezi.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott függvénynek nem lesz helyi szélsőértéke? *(16 pont)*

Megoldás.



A polinomok mindenütt folytonosak és differenciálhatók, ennek a harmadfokú függvénynek akkor lesz három különböző valós zérushelye (a grafikonja akkor metszi három helyen az x tengelyt), ha lokális maximumának értéke pozitív, lokális minimumának értéke pedig negatív szám.

Megkeressük a lokális szélsőértékhelyeket.

$$f'(x)=3x^2-6x+\frac{9}{4};$$

$$3x^2-6x+\frac{9}{4}=0;$$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4\cdot3\cdot\frac{9}{4}}}{6}=\frac{6\pm3}{6}\ \Rightarrow\ x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{3}{2};$$

$$f''(x)=6x-6;$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot\frac{1}{2}-6=-3<0;$$

itt lokális maximuma van a függvénynek;

$$f''\left(\frac{3}{2}\right)=6\cdot\frac{3}{2}-6=3>0;$$

itt pedig lokális minimuma.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}+p=\frac{1}{2}+p;$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}+p=p;$$

$$\frac{1}{2}+p>0 \quad \text{és} \quad p<0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}<p<0.$$

A függvénynek akkor van három különböző valós zérushelye, ha $p\in\left]-\frac{1}{2};0\right[$.

Megjegyzés. Ha ismerjük a harmadfokú egyenlet Cardano-képletes megoldását, akkor a *casus irreducibilis* (Függvénytáblázat: 23. oldal) eset végigszámolásával a fenti eredményre jutunk.

b) A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy a függvény első deriváltja 0 legyen.

$$g'(x)=3x^2+2bx+c;\;\; 0=3x^2+2bx+c;\;\; D=(2b)^2-4\cdot 3c=4b^2-12c=4(b^2-3c).$$

Ha $D>0$, akkor az egyenletnek két különböző valós gyöke van, ebben az esetben a függvénynek van lokális maximuma is és lokális minimuma is. (Ez egy harmadfokú függvénynél elégséges feltétel is.)

Ha $D<0$, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke, a függvénynek nem lehet helyi szélsőértéke.

Ha $D=0$, akkor az egyenletnek egy valós gyöke van. Ebben az esetben sem lehet ez az (esetleges) szélsőérték egyszerre maximum is és minimum is (ekkor az egyenlet gyöke az inflexiós pont első koordinátájával egyezik meg). Az esemény szempontjából tehát ez is kedvező esetnek számít.

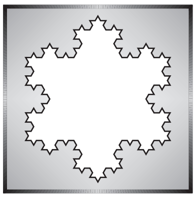
Ismét táblázatba foglaltuk az összes esetet.

b^2-3c		c					
		1	2	3	4	5	6
b	1	-2	-5	-8	-11	-14	-17
	2	1	-2	-5	-8	-11	-14
	3	6	3	0	-3	-6	-9
	4	13	10	7	4	1	-2
	5	22	19	16	13	10	7
	6	33	30	27	24	21	18

A keresett valószínűség: $P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}=0{,}4444$.

Megjegyzés. Természetesen nem szükséges végigszámolni az összes esetet, ha az első dobás 5-öt, vagy 6-ot eredményezett, akkor a második dobás értékétől függetlenül D pozitív lesz, ezek tehát az esemény szempontjából rossz esetnek számítanak. (Ha $b=1$, akkor az összes c jó eset.)

Németh László
Fonyód



C gyakorlat megoldása

C. 1703. *Az a és b 10-es számrendszerbeli természetes számok, mindegyik számjegyük 1-es. Mutassuk meg, hogy ha a és b nem relatív prímek, akkor számjegyeik $S(a)$ és $S(b)$ összege sem az.*

Megoldás. Az a és a b szám egyike sem lehet 1, mert az 1 bármelyik egész számmal relatív prím, ezért $a>1$ és $b>1$.

1. eset Ha $a=b$, akkor $S(a)=S(b)>1$, így a feladat állítása igaz.

2. eset Ha $a\neq b$, akkor az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a>b$, ekkor $S(a)>S(b)$. Mindkét szám utolsó számjegye 1, ezért sem 2-vel, sem 5-tel nem oszthatóak és mivel nem relatív prímek, így van közös prímosztójuk. Legyen ez a közös prímtényező p, ekkor $p\neq 2$ és $p\neq 5$. Innentől „elfogyasztjuk" a számjegyeket a következő módszerrel. Kivonjuk a-ból b-t, így $p\mid a$ és $p\mid b$ miatt nyilván $p\mid (a-b)$ is teljesül. Ekkor $(a-b)$ egy olyan pozitív szám, amely $(S(a)-S(b))$ darab 1-essel kezdődik, közvetlenül utánuk pedig $S(b)$ darab nulla van. A nulláktól természetesen könnyedén „megszabadulhatunk", ha elosztjuk $10^{S(b)}$-nel, és mivel a tízhatványok csak 2-vel és 5-tel oszthatóak, ezért hányadosként (nevezzük c-nek) egy olyan csupa 1-es számjegyet tartalmazó számot kapunk, amelyre $p\mid c$, ezért $c>1$, valamint $S(c)=S(a)-S(b)$ és $c<a$ is igaz.

Ekkor előfordulhat, hogy $b=c$, ekkor nyilván $S(c)\mid S(b)$, ezért

$$S(c)\mid S(c)+S(b)=S(a).$$

Találtunk egy közös osztót, $S(c)$-t, ami ($c>1$ miatt) 1-nél nagyobb, így beláttuk, hogy $S(a)$ és $S(b)$ nem relatív prímek.

Ha $b\neq c$, akkor a nagyobbikból kivonjuk a kisebbiket és megismételjük az előbb ismertetett eljárást. Véges sok lépésben biztosan eljutunk odáig, hogy két egyenlő számot kapunk, amelyek nagyobbak 1-nél, mindegyik számjegyük 1, így számjegyeik összege is nagyobb 1-nél és osztója $S(a)$-nak és $S(b)$-nek, azaz utóbbiak nem relatív prímek. Ezzel a gondolatmenet végére értünk, a feladat állítását beláttuk.

Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn. és Koll., 12. évf.) dolgozata alapján

Összesen 25 dolgozat érkezett. 5 pontos 10, 4 pontos 3, 3 pontos 5 dolgozat. 1 pontot 3, 0 pontot 1 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 3 dolgozat.