Ez alapján, ha kiválasztjuk az $A-B-C-D$ négy főből álló csoportot, tudjuk, hogy közülük legfeljebb 3 fog uralkodni. Ugyanez elmondható az $E-F-G-H$ csoportra is, ezért legfeljebb $(3+3=)$ 6 fő uralkodhat a 8 gyerek közül.

Adjuk össze a kapott lehetséges eseteket:

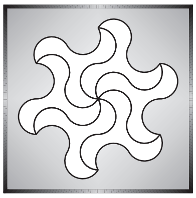
$$1+7+21+34+28+9=100.$$

A királyi család 8 gyermeke 100-féleképpen uralkodhatott.

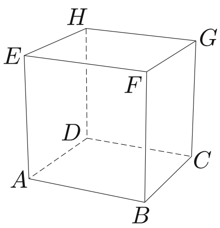
Nagy Korina (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 9. évf.)

Megjegyzés. A honlapon ezektől különböző megoldások olvashatók, azonban a versenyzők zöme a két fenti megoldásmenet egyikét választotta.

159 dolgozat érkezett. 5 pontos 77 versenyző. 4 pontos 22, 3 pontos 15, 2 pontos 8, 1 pontos 8, 0 pontos 9 dolgozat. Nem versenyszerű 1 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.



Matematika feladatok megoldása



B. 5114. *Az $ABCDEFGH$ egységkockát elmetszettük egy síkkal úgy, hogy az AB és AD éleket az A-tól azonos, x távolságra levő P és Q belső pontjaikban, a BF élt pedig az R pontban metszi. Mekkora a BR távolság, ha $QPR\sphericalangle=$ $=120°$?*

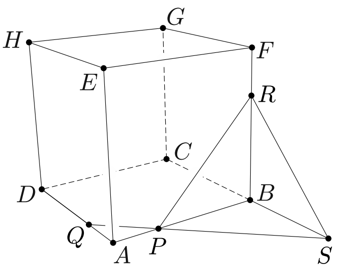
(4 pont)

I. megoldás. A feladatban egységkocka szerepel, ezért a BP szakasz $1-x$ hosszúságú. Hosszabbítsuk meg a kocka CB élét a B csúcson túl az $1-x$ hosszúságú szakasszal, legyen ez a pont S (*1. ábra*).

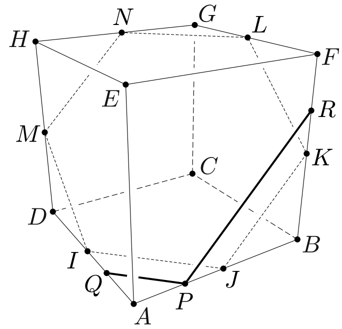
A szakaszok egyenlősége alapján QAP és PBS egyenlő szárú derékszögű háromszögek, $APQ\sphericalangle=BPS\sphericalangle=45°$. Tehát a Q, P és az S pontok egy egyenesbe esnek. Ehhez hozzávéve az R pontot, azt is látjuk, hogy a Q, P, S és R pontok egy síkban vannak. A PS szakasz felezőmerőleges síkjára illeszkedik a BF él, így $PR=SR$. A PSR egyenlő szárú háromszög alapon fekvő RPS szögének külső szöge a feladat feltétele alapján 120°; vagyis az alapon fekvő szögek 60°-osak, a PSR háromszög szabályos.

Végül tekintsük a BPS és BPR derékszögű háromszögeket. A BP befogójuk közös, átfogóik egyenlő hosszúak, tehát a két háromszög egybevágó. Ezzel beláttuk, hogy a BR szakasz $BR=BS=1-x$ hosszúságú.

Varga Boldizsár (Verőce, Géza Fejedelem Ref. Ált. Isk., 8. évf.) dolgozata alapján



1. ábra



2. ábra

II. megoldás. Ismert, hogy az AB, AD, DH, HG, GF és FB oldalak felezőpontjai egy szabályos hatszöget határoznak meg (hiszen egyenlő hosszúak, a hatszög szemköztes oldalai párhuzamosak és 120°-ra forgásszimmetrikus).

Ez a hatszög megkapható úgy is, ha vesszük a kocka felszínének és a középpontján áthaladó, CE főátlójára merőleges síkjának a metszetét (*2. ábra*).

Könnyen látható, hogy a középpont helyett más pontot véve a CE átlón szintén olyan hatszög lesz a metszet (persze csak olyan esetben, ha az így kapott sík metszi az oldalakat), melynek minden belső szöge 120°-os. Ez amiatt van így, mert az oldalai páronként párhuzamosak lesznek azzal az esettel összevetve, amikor a középpontot választjuk ki, és a hatszög szabályos.

Vegyük fel tehát azt a hatszöget ilyen módon, melynek AB és AD oldalon lévő P és Q csúcsai x távolságra vannak az A ponttól. Ekkor a párhuzamos eltolás miatt $RPB\sphericalangle = 45°$, PBR egyenlő szárú derékszögű háromszög, vagyis

$$BR = 1 - x.$$

Másik R pontra tudjuk, hogy nem lesz igaz, hogy $QPR\sphericalangle = 120°$, hiszen ahogy az R pont távolodik B-től, úgy a $QPR\sphericalangle$ szög szigorúan monoton csökken, ezért csak egy olyan helyzet lehet, melyre éppen 120° a szög és a korábbiak miatt ez pontosan az, amikor

$$BR = BP = 1 - x.$$

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Megjegyzés: A feladat rövid számolással is megoldható. BR hosszát, mint változót bevezetve, Pitagorasz-tétellel BR-ből és x-ből kifejezhető a PQ, PR és RQ szakaszok hossza, majd a PQR háromszögre felírt koszinusztételben a QPR szög koszinusza $-0{,}5$. Kapunk egy paraméteres másodfokú egyenletet BR-re, melynek egyetlen 0 és 1 közötti megoldása $1 - x$.

Hervay Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Összesen 106 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 84 versenyző, 3 pontos 10, 2 pontos 3, 1 pontos 3 tanuló dolgozata. 0 pontot kapott 1 tanuló. Nem versenyszerű 5 dolgozat.

B. 5207. *Bizonyítsuk be, hogy minden $n \geqslant 2$ természetes számra léteznek olyan $2 \leqslant x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ pozitív egész számok, amelyekre*

$$x_1! \cdot x_2! \cdot x_3! \cdot \ldots \cdot x_n!$$

négyzetszám.

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

Megoldás.

Lemma. *Minden* 1*-nél nagyobb pozitív egész* a*-ra* $(a^2-1)! \cdot a^2!$ *négyzetszám.*

A lemma bizonyítása. Mivel $a^2! = a^2 \cdot (a^2-1)!$, ezért

$$(a^2-1)! \cdot a^2! = (a^2-1)! \cdot a^2 \cdot (a^2-1)! = a^2 \cdot \big((a^2-1)!\big)^2 = \big(a \cdot (a^2-1)!\big)^2.$$

Most rátérünk a feladat állításának bizonyítására.

1. eset: Ha n páros, akkor az $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ számokat párokba rendezem úgy, hogy minden x_{2k} az x_{2k-1}-gyel áll párban, ahol x_{2k} a $(k+1)$-edik pozitív négyzetszám és x_{2k-1} a $(k+1)$-edik pozitív négyzetszámnál 1-gyel kisebb szám. Mivel végtelen sok négyzetszám van, ezért mindig ki tudunk k darab négyzetszámot választani.

Ekkor a lemma szerint mindegyik $x_{2k-1}! \cdot x_{2k}!$ szorzat négyzetszám, ezért a párok szorzata is négyzetszám.

2. eset: Ha n páratlan, akkor legyen $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$. Ezek faktoriálisainak szorzata:

$$4! \cdot 5! \cdot 6! = 2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^2,$$

amelynek prímtényezős felbontásában az összes kitevő páros, így négyzetszám, ezzel $n = 3$-ra készen vagyunk. Ha $n \geqslant 5$, akkor legyen továbbra is $x_1 = 4$, $x_2 = 5$, $x_3 = 6$, és x_4-től x_n-ig szintén párba rendezzük a számokat az előző esetben mutatott módszerrel, az $x_4 = 8$, $x_5 = 9$ párral kezdve, utána pedig minden x_{2k+1} a $(k+1)$-edik pozitív négyzetszám, minden x_{2k} pedig 1-gyel kisebb x_{2k+1}-nél, így az $x_1! \cdot x_2! \cdot x_3! \cdot \ldots \cdot x_n!$ szorzat ebben az esetben is négyzetszám.

Ezzel a feladat állítását mindkét esetben beláttuk.

Andai Márk (Tata, Eötvös J. Gimn., 10. évf.)

Összesen 131 dolgozat érkezett. 4 pontos 99, 3 pontos 17, 2 pontos 8 dolgozat. 1 pontot 3 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 4 dolgozat.

B. 5212. *Igazoljuk, hogy létezik olyan pozitív egész szám, amely legalább* 2021*-féleképpen állítható elő úgy, hogy egy (tízes számrendszerben felírt) pozitív egész számhoz hozzáadjuk a számjegyeinek összegét.*

(*6 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

Megoldás. Teljes indukcióval fogunk bizonyítani. A legnagyobb szám, ami n-féleképpen előáll, mindig $10^k + 1$ alakú lesz, a legnagyobb számból való előállítása pedig az, ha 10^k-hoz adjuk hozzá számjegyeinek összegét, ami 1 (ennél nagyobb számhoz a számjegyei összegét adva biztos nagyobbat kapunk, ezért mondhatjuk, hogy ez a legnagyobb számból való előállítás).

$n=2$-re $10^2+1=100+1=91+9+1$ a két előállítás.

Tegyük fel, hogy van egy 10^k+1 szám, ami n különböző számból előállítható, amelyek közül a legnagyobb 10^k. Azt akarjuk tehát most belátni, hogy van egy olyan 10^K+1 szám, ami $(n+1)$-féleképpen is előáll.

Minden eddigi számhoz, ami a 10^k+1 különböző előállításaiban szerepelt, adjuk hozzá a

$$9\cdot 10^{k+1}+9\cdot 10^{k+2}+9\cdot 10^{k+3}+\ldots+9\cdot 10^{k+10^k}=10^{10^k+k+1}-10^{k+1}$$

számot. Mivel a 10^k+1 előállításaiban szereplő legnagyobb szám a 10^k volt, így ezekkel a számokkal annyi történt, hogy a számok elé a 10^{k+1}-es helyiértéktől kezdve a 10^{k+10^k}-es helyiértékig 9-eseket írtunk (és utánuk esetleg valahány 0-t), ez 10^k darab 9-es. Így az összes eddigi n szám és számjegyeinek összege a hozzáadott számmal és annak számjegyeinek összegével, $9\cdot 10^k$-nal nőtt, így minden kapott új szám és számjegyeinek összege

$$(10^k+1)+\left(10^{10^k+k+1}-10^{k+1}\right)+9\cdot 10^k=10^{10^k+k+1}-10^{k+1}+10\cdot 10^k+1=$$
$$=10^{10^k+k+1}+1.$$

Ez a szám pedig úgy is előáll, ha a 10^{10^k+k+1} számhoz hozzáadjuk számjegyeinek összegét, 1-et. Vagyis a keresett 10^K+1 szám, ami $(n+1)$-féleképpen előáll: $10^{10^k+k+1}+1$.

Így minden pozitív egész n-re létezik olyan szám, ami n-féleképpen előáll egy szám és a számjegyösszegének összeadásával, vagyis $n=2021$-re is.

Jánosik Máté (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. évf.)

42 dolgozat érkezett. 6 pontos 34, 5 pontos 1, 4 pontos 3, 3 pontos 1, 0 pontos 1 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 2 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (724–728.)

K. 724. Juli felvágott egy pizzát egyforma szeletekre. Ezután néhány szeletet megevett, 3 szelet viszont megmaradt. Kicsit számolgatva azt vette észre, hogy az egész pizza 3/4 részét plusz egy szelet 3/4 részét ette meg. Hány szeletre vágta a pizzát?