9. *a*) A p valós paraméter mely értéke esetén lesz az $f(x)=x^3-3x^2+\frac{9}{4}x+p$ $(x\in\mathbb{R})$ függvénynek három különböző zérushelye a valós számok halmazán?

A $g(x)=x^3+bx^2+cx+2022$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény b és c együtthatóit szabályos dobókockával sorsoljuk ki; az első dobás b-t, a második c-t eredményezi.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott függvénynek nem lesz helyi szélsőértéke? (*16 pont*)

Németh László
Fonyód

Megoldásvázlatok a 2022/2. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Határozzuk meg a következő kifejezés előjelét, ha n tetszőleges természetes szám:*

$$\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}-\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}. \qquad (6\ pont)$$

b) *Hány valós megoldása van a*

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

trigonometrikus egyenletnek a $]0;\pi[$ *intervallumon?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) *Egyik lehetőség.* Osszuk el az első (pozitív) törtkifejezést a második (pozitív) törtkifejezéssel, felhasználva a hatványozás ismert azonosságait:

$$\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}:\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1}=\frac{2^{n-1}+1}{2^n+1}\cdot\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}=\frac{2^{2n}+2^{n+1}+1+2^{n-1}}{2^{2n}+2^{n+1}+1}=$$

$$=1+\frac{2^{n-1}}{2^{2n}+2^{n+1}+1}>1,$$

mert az összegben szereplő tört számlálója és nevezője is, így maga a törtkifejezés is pozitív előjelű (az exponenciális függvény tulajdonsága miatt), amiből az következik, hogy az eredeti különbségben az első (pozitív) tag nagyobb, mint a második (pozitív) tag, így a különbségük előjele pozitív.

Másik lehetőség. Hozzunk közös nevezőre, ismét felhasználva a hatványozás ismert azonosságait:

$$\frac{(2^{n-1}+1)(2^{n+1}+1)-(2^n+1)^2}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{2n}+2^{n-1}+2^{n+1}+1-2^{2n}-2\cdot 2^n-1}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=$$

$$=\frac{2^{n-1}+2^{n+1}-2\cdot 2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\frac{2^{n-1}}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}>0,$$

hiszen a számláló pozitív, a nevező mindkét tényezője, így maga nevező is pozitív, vagyis a tört pozitív előjelű, ami azt jelenti, hogy az eredeti kifejezés előjele is pozitív.

b) A $\cos\alpha = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ összefüggés miatt:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

A $\sin\alpha = \sin\beta$ típusú egyenletek megoldási sémája alapján:

1. lehetőség:

$$x + \frac{\pi}{3} = 2x + \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} - k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezen megoldások közül a $\frac{\pi}{6}$ esik a $]0;\pi[$ intervallumba.

2. lehetőség:

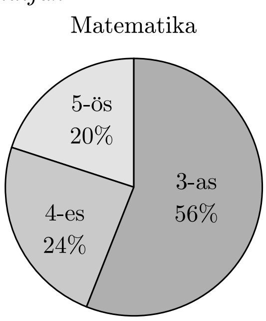
$$x + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}),$$

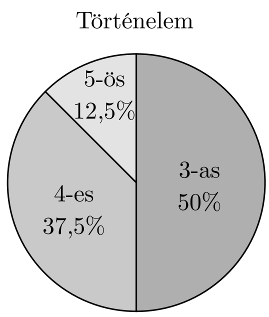
$$x_2 = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \quad (l \in \mathbb{Z}).$$

Ezen megoldások közül csak az $l = 0$ és az $l = 1$ esetén kapunk olyan megoldást, ami a $]0;\pi[$ intervallumba esik. Ezek a megoldások: $\frac{\pi}{6}$ és $\frac{5\pi}{6}$, amelyek ellenőrzéssel igazolhatók.

Az egyenletnek tehát két valós megoldása esik a $]0;\pi[$ inervallumba.

2. *A* 12. *évfolyam tanulói közül* 25-*en matematikából,* 40-*en pedig történelemből tettek emelt szintű érettségi vizsgát. Az érdemjegyek eloszlását a következő kördiagramokon látjuk:*





a) *A kördiagramok alapján töltsük ki az alábbi gyakorisági táblázatot.* (*4 pont*)

Tantárgy \ jegyek	**3**	**4**	**5**
Matematika			
Történelem			

b) Határozzuk meg a történelem eredmények átlagát, mediánját és szórását. *(3 pont)*

c) A matematikából 3*-ast szerzők közül legalább hány tanulónak kellett volna* 4*-est kapnia, hogy a többiek változatlan teljesítménye mellett a matematika átlag legalább* 3,8 *legyen?* *(6 pont)*

Megoldás.

a) Matematika: $0{,}56\cdot 25=14$, $0{,}24\cdot 25=6$, $25-(14+6)=5$.
Történelem: $0{,}5\cdot 40=20$, $0{,}375\cdot 40=15$, $40-(15+20)=5$.

Tantárgy \ jegyek	**3**	**4**	**5**
Matematika	14	6	5
Történelem	20	15	5

b)
$$\overline{x}=\frac{20\cdot 3+15\cdot 4+5\cdot 5}{40}=3{,}625,$$

$$\text{medián:}\quad \frac{3+4}{2}=3{,}5,$$

$$\text{szórás: } \sigma=\sqrt{\frac{20\cdot(3-3{,}625)^2+15\cdot(4-3{,}625)^2+5\cdot(5-3{,}625)^2}{40}}=0{,}695\approx 0{,}7.$$

c) A kérdéses tanulók száma legyen x, ahol $0<x\leqslant 14$, $x\in\mathbb{Z}$.

Velük együtt a közös átlagtól elvárt érték:

$$\frac{(14-x)\cdot 3+(6+x)\cdot 4+5\cdot 5}{25}\geqslant 3{,}8,$$

$$\frac{42-3x+24+4x+25}{25}\geqslant 3{,}8,$$

$$(*)\qquad \frac{91+x}{25}\geqslant 3{,}8,$$

$$91+x\geqslant 95,$$

$$x\geqslant 4.$$

Legalább 4 tanulónak kellett volna még 4-est kapnia matematikából.

Ellenőrzés: $x=4$-re számított átlag $\frac{10\cdot 3+10\cdot 4+5\cdot 5}{25}=3{,}8$.

A $(*)$ egyenlőtlenség bal oldalán álló $\frac{91+x}{25}$ függvény, az átlag függvénye, szigorúan monoton növő, így az x növelésekor az átlag is növekszik. Így a válaszunk helyes.

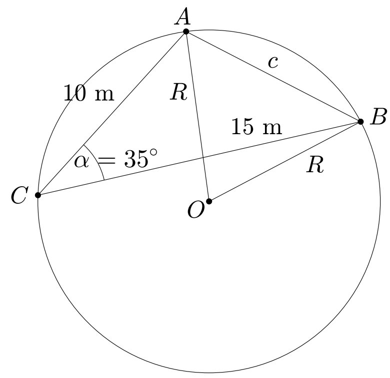
3. *Az Andrássy gimnázium gólyatáborának egy sportversenyéhez a következő pálya készült el az udvar betonján: egy körben az egy pontból kiinduló* 10 m *és* 15 m *hosszú húrok egymással* $35°$*-os szöget zárnak be. A játékosoknak a húrok (nem közös) végpontjából indulva kell megszerezni a kör középpontjában lévő labdát, majd visszafutni a kiindulási helyükre.*

a) Készítsünk a szövegnek megfelelő ábrát a lényeges adatok feltüntetésével. (*2 pont*)

b) Legalább mekkora utat kell megtenni egy-egy játékosnak? (*4 pont*)

c) Kata azt állítja, hogy a játékosok kiindulási helye és a labda alkotta háromszög területe legfeljebb 25 m^2*. Igaza van-e Katának?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) (Lásd az *ábrát.*)



b) Az $AOB\sphericalangle = 2\alpha = 70°$, mert az AB íven nyugvó középponti szög. Az ACB háromszögben alkalmazzuk a koszinusz-tételt:

$$c^2 = 10^2 + 15^2 - 2\cdot 10\cdot 15\cdot\cos 35°,$$

$$c^2 = 79{,}25, \quad c > 0,$$

$$c = 8{,}9 \text{ m}.$$

A húr, a hozzá tartozó kerületi szög és a sugár közötti összefüggést felhasználva:

$$\frac{c}{\sin 35°} = 2R \Longrightarrow \frac{8{,}9}{0{,}5736} = 2R \Longrightarrow R = 7{,}76 \text{ m}.$$

Így egy-egy játékosnak $2\cdot R = 2\cdot 7{,}76 = 15{,}52$ m-t kell megtennie.

c) A háromszög trigonometrikus területképlete alapján:

$$t_{AOB\triangle} = \frac{7{,}76^2\cdot\sin 70°}{2} = 28{,}29 \text{ m}^2.$$

Mivel $28{,}29 \text{ m}^2 > 25 \text{ m}^2$, így a kerekítések mértékére is figyelve, nincs igaza Katának.

4. *Adott az* $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 65 = 0$ *egyenletű kör és a* $P(3;9)$ *pont.*

a) A „rajta”, „kívül”, „belül” szavak közül írjuk a pontozott vonalra azt, amelyikkel az alábbi állítás igaz lesz. Számolással is igazoljuk a választ. (*3 pont*)

A P pont .... van a fent megadott egyenletű körvonalon.

b) Határozzuk meg az origón és a P ponton átmenő g egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szögét. A szög értékét egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (*3 pont*)

c) Írjuk fel a megadott kör azon érintőjének egyenletét, amelynek nincs közös pontja a III. síknegyeddel, nem megy át az origón, és ami az y tengelyt az origótól kétszer olyan távolságban metszi, mint az x tengelyt, továbbá a tengelyekkel alkotott háromszög területe a legkisebb. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) A kör középpontjának koordinátái és a sugara az egyenletének teljes négyzetes alakra hozása után közvetlenül leolvashatók:

$$(x-7)^2+(y-6)^2=20 \implies C(7;6) \text{ és } r=\sqrt{20}\,.$$

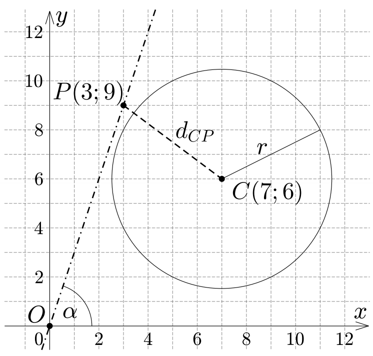
Számítsuk ki a $C(7;6)$ és a $P(3;9)$ pont d_{CP} távolságát:

$$d_{CP}=\sqrt{(3-7)^2+(9-6)^2}=\sqrt{25}=5>\sqrt{20}\,.$$

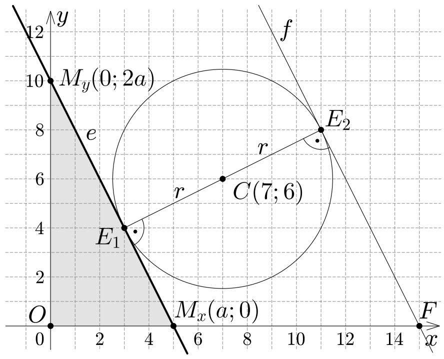
A P pont ..... kívül ..... van a fent megadott egyenletű körvonalon.

b) Mivel az origó koordinátái $O(0;0)$, ezért a keresett szög tangense (g egyenes iránytangense) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{9-0}{3-0}=\frac{9}{3}=3$, amiből a megfelelő kerekítéssel $\alpha\approx 71{,}6^\circ$ adódik.

Ugyanezt a megoldást kapjuk, ha felírjuk a g egyenes egyenletét (egyenes arányosság függvény): $y=3x$, ahonnan $m=\operatorname{tg}\alpha=3$ egyenlőségekből ismét a várt $\alpha\approx 71{,}6^\circ$ adódik.



4.*b*)



4.*c*)

c) Készítsünk *vázlatot* egy érintő és a tengelymetszetek (távolságok) berajzolásával. A feltételek miatt az érintő mindkét tengelyt a pozitív felén (nem az origóban) metszi. Legyen $M_x(a;0)$ és $M_y(0;2a)$.

Így az érintő egyenlete ($a>0$ paraméterrel):

$$y=-2x+2a.$$

Keressük a kör és az érintő közös pontját, az érintési pontot (pontokat). Ezt az egyenleteikből alkotott egyenletrendszer megoldása adja:

$$(x-7)^2+(y-6)^2=20,$$
$$y=-2x+2a.$$

A behelyettesítő módszert alkalmazva, a zárójelek felbontása, összevonás és rendezés után a következő másodfokú, paraméteres (a) egyenletet kapjuk:

$$5x^2+(10-8a)x+4a^2-24a+65=0.$$

Mivel egy érintőnek a körrel pontosan egy közös pontja van, ezért ennek a másodfokú, paraméteres egyenletnek a diszkriminánsa 0 kell, hogy legyen:

$$D = (10-8a)^2 - 4\cdot 5(4a^2-24a+65) = 0,$$
$$a^2 - 20a + 75 = 0.$$

Ennek az a-ban másodfokú egyenletnek a megoldásai: $a_1 = 5$ és $a_2 = 15$, melyek helyességét az azonos átalakítások biztosítják, vagy az ellenőrzések igazolják.

A minimális területű derékszögű háromszög az $a_1 = 5$ megoldással adódik ($t_1 = 25 < t_2 = 225$), ennek az érintőnek az egyenletét kell csak felírni. A feltételeknek megfelelő e érintő egyenlete:

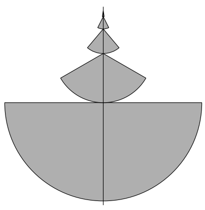
$$y = -2x + 10.$$

II. rész

5. *a) Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája 4, az első n tag összege 1825, és az első tag megegyezik ezen összeadott tagok számával. Tagja-e ennek az $\{a_n\}$ sorozatnak a 8115?* *(6 pont)*

Julcsi 2018. január 1-jén betett a bankba egy bizonyos összeget, évi 5%-os kamatra úgy, hogy a bankszámláján a minden év végén esedékes kamatokat tőkésítette (nem vette ki). Három év elteltekor megemelte a megtakarított pénzét az éppen bent lévőnek a 20%-ával. Ettől kezdve már csak 4%-os évi kamatot kapott a bankintézettől. A következő év első napján pedig kivette az addig megtakarított pénzének a 10%-át. 2025. január 1-jén szeretné felvenni az összes pénzét. Testvére, Anna egyszerre kezdett vele takarékoskodni ugyanakkora összeggel.

b) Hány %-os, állandó évi kamatot kellene kapnia ahhoz Annának betét és kivét nélküli takarékosság esetén, hogy a két testvérnek ugyanannyi megtakarított pénze legyen 2025 első napján? A kamatláb értékét egy tizedes pontossággal adjuk meg. *(4 pont)*



Karácsonyra Franci az ábrán látható, négy cikkből álló, tengelyesen szimmetrikus fenyőfa díszt kezdte el rajzolni egy papírra. Egy 5 cm sugarú félkörből indult ki, eggyel feljebb lépve, a körcikk sugarát a felére, középponti szögét $\frac{2}{3}$ részére változtatta, miközben a körcikk középpontját a felette lévő körív felezési pontjába tette. Elgondolkodott azon, ha ezt az eljárást végtelen sokáig tudná folytatni, lenne-e a mintának véges területe.

c) Ha igen, pontosan mekkora lenne, és az hány %-a annak a minimális területű téglalap területének, amelynek két oldala párhuzamos a fenyőfa tengelyével? *(6 pont)*

Megoldás. *a)* A számtani sorozat jelöléseit felhasználva: $a_1 = n$; $d = 4$; $S_n = 1825$; $a_1 = n = ?$. A számtani sorozatok összegére vonatkozó szabály a feltételeket figyelembe véve:

$$S_n=\frac{n}{2}\big[2a_1+(n-1)d\big]=\frac{n}{2}\big[2n+(n-1)d\big]=3n^2-2n=1825,$$

$$3n^2-2n-1825=0,$$

$$n_1=25,\quad n_2=-24\frac{1}{3}.$$

A negatív szám tartalmi ellentmondás (sorszám) miatt nem megoldás, így a sorozat első tagja: $a_1=25$.

A számtani sorozat m-edik elemére felírható összefüggést alkalmazva:

$$8115=25+(m-1)4,$$

$$m=2023{,}5\notin\mathbb{Z}^+.$$

Ebből az következik, hogy a 8115 nem eleme a sorozatnak.

Ellenőrzés:

$$S_n=\frac{n}{2}\big[2a_1+(n-1)d\big]=\frac{25}{2}\big[2\cdot 25+(25-1)\cdot 4\big]=1825=S_{25}.$$

A megoldásunk így helyes.

b) Julcsi megtakarítása (a_j; a_0; $p_1=5\%$; $p_2=4\%$) a kivételkor a pénzügyi folyamatot is szemléltetve a műveletek sorrendjével:

$$a_j=a_0\cdot 1{,}05^3\cdot 1{,}2\cdot 1{,}04\cdot 0{,}9\cdot 1{,}04^3\approx 1{,}463a_0.$$

Anna megtakarítása (a_a; a_0; p) a kivételkor:

$$a_a=a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^7.$$

Mivel

$$a_j\approx 1{,}463a_0=a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^7=a_a,$$

$p\approx 5{,}6\%$. Tehát Annának megközelítőleg 5,6%-os, állandó éves kamatot kell kapnia ahhoz, hogy a két testvérnek (közel) azonos megtakarított pénze legyen 2025 első napján.

c) A körcikkek területe arányos a sugár négyzetével és a középponti szögével, ezért a részterületek a következők lesznek (csökkenő sorrendben):

$$5^2\pi\frac{180^\circ}{360^\circ};\quad 2{,}5^2\pi\frac{\frac{2}{3}\cdot 180^\circ}{360^\circ};\quad 1{,}25^2\pi\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 180^\circ}{360^\circ};\quad 0{,}625^2\pi\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot 180^\circ}{360^\circ};\ \ldots.$$

A képzési szabály alapján ezek a számok egy $q_t=\frac{1}{6}$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. Mivel $|q_t|<1$, így ezekből az elemekből képzett végtelen mértani sornak van véges összege:

$$t=\frac{t_1}{1-q_t}=\frac{12{,}5\pi}{1-\frac{1}{6}}=15\pi\ \mathrm{cm}^2.$$

A cikkek sugarai, a részmagasságok rendre: 5 cm, 2,5 cm, 1,25 cm, 0,625 cm, ...

A képzési szabály alapján ezek a számok egy $q_m = \frac{1}{2}$ kvóciensű mértani sorozatot alkotnak. Mivel $|q_m| < 1$, így ezekből az elemekből képzett végtelen mértani sornak szintén van véges összege, amely a képzeletbeli díszünk magassága, egyben a minimális területű (érintkező) téglalap egyik oldala lenne:

$$m = \frac{r_1}{1 - q_m} = \frac{5}{1 - 0{,}5} = 10\text{ cm}.$$

A kérdéses két terület aránya %-ban kifejezve, ahol $t_t = 2r_1m$:

$$\frac{t}{t_t} = \frac{15\pi}{2r_1m} = \frac{15\pi}{2 \cdot 5 \cdot 10} = \frac{3\pi}{20} \;\Rightarrow\; 15\pi\%.$$

Válasz: Ha Franci el tudná készíteni végtelen sok lépésből ezt a mintát, akkor a dísz területe 15π%-a ($\approx 47\%$) lenne a téglalap területének.

6. *a) A JÁTÉK Kft. új homokozó vödre csonkakúp alakú. Ha a vödörbe beleteszünk egy* 14 cm *átmérőjű labdát, akkor az érinti a vödör alját, és egy körben a vödör oldalát is. A vödör aljának átmérője* 12 cm*, felső nyílásának átmérője* 18 cm*. A vödröt kívül is, belül is vízálló réteggel festik be. Hány liter festékre van szükség* 1000 *darab vödör elkészítésekor, ha* 1 *négyzetméternyi felület festéséhez* 0,5 dl *festéket használnak, és a vödör falvastagsága elhanyagolható?* (*8 pont*)

b) Panni és Peti koktélos poharakból bodzaszörpöt iszik. A pohár felső része forgáskúp alakú, melynek magassága 8 cm*, alkotója* 10 cm*, és* 7 cm *„magasan áll benne" az üdítő. Hány milliméterrel emelkedik meg a bodzaszörp „szintje", ha a pohárba három darab,* 2 cm *élű jégkockát teszünk, és azok már teljesen elolvadtak? A választ egészre kerekítve adjuk meg. (Tekintsünk el a jég olvadásakor közismerten bekövetkező térfogatváltozástól.)* (*8 pont*)

Megoldás. *a)* Készítsük el a vödörnek (szimmetrikus csonka kúp) egy tengelymetszetét, ami egy szimmetrikus trapéz lesz, és azon jelöljük be a lényeges adatokat.

Felhasználva, hogy az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, valamint azt, hogy adott körhöz külső pontból húzott érintő szakaszok hossza egyenlő:

$$OA = OE = r = 7\text{ cm} \quad\text{és}\quad BA = BE = 6\text{ cm}.$$

Mivel az adott kör középpontja rajta van az $ABE\sphericalangle = \beta$ szögfelezőjén, és az alapokat felező szimmetriatengely $DA \perp AB$, az OAB derékszögű háromszögben:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{7}{6} \Rightarrow \beta = 98{,}8^\circ.$$

Toljuk el párhuzamosan AD-t B-be, így $AD \parallel BM$, és

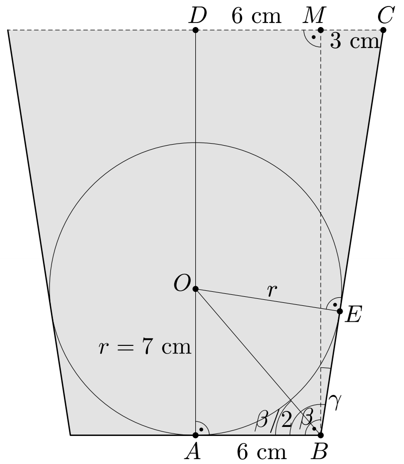
$$MBC\sphericalangle = \gamma = 98{,}8^\circ - 90^\circ = 8{,}8^\circ, \quad \text{illetve} \quad MC = 9 - 6 = 3\text{ cm}.$$

A BMC derékszögű háromszögben: $\sin 8{,}8^\circ = \frac{3}{BC} \Longrightarrow BC = 19{,}61$ cm (ez az alkotó). A felül nyitott csonkakúp felszínét kétszer kell vennünk (kívül-belül):

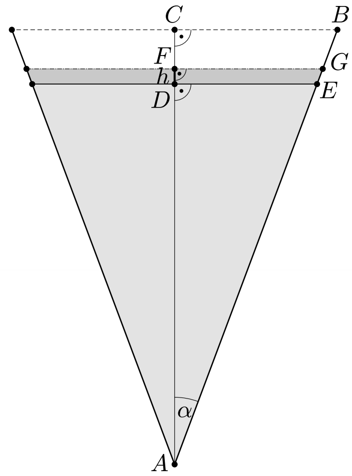
$$2A = 2\big[6^2\pi + (6+9)\pi \cdot 19{,}61\big] = 2074{,}4\ \mathrm{cm}^2.$$

Befestendő felület: $1000 \cdot 2A = 1000 \cdot 2074{,}4 = 2\,074\,400\ \mathrm{cm}^2 = 207{,}44\ \mathrm{m}^2$. A felhasználandó festék térfogata: $207{,}44 \cdot 0{,}5 = 103{,}72$ dl $= 10{,}372$ liter.

Tehát megközelítően 10,4 liter festékre van szükség.



6.a)



6.b)

b) Rajzoljuk meg a pohár felső részének (forgáskúp) a tengelymetszetét, amely egy tengelyesen szimmetrikus, egyenlő szárú háromszög lesz. Mivel $AC = 8$ és $AB = 10$, így alkalmazva az ABC derékszögű háromszögre a Pitagorasz-tételt: $CB = 6$ (cm). Mivel $AD = 7$ és $ADE\triangle \sim ACB\triangle$ (szögek páronként egyenlőek), így:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{CB} \Longrightarrow \frac{7}{8} = \frac{DE}{6} \Longrightarrow DE = \frac{42}{8} = 5{,}25\ (\mathrm{cm}).$$

A bodzaszörp térfogata:

$$V_b = \frac{5{,}25^2 \cdot \pi \cdot 7}{3} = \frac{1029}{16}\pi \approx 202{,}04\ (\mathrm{cm}^3).$$

A jégkockák térfogatának összege: $3V_\mathrm{k} = 3a^3 = 3{\cdot}2^3 = 3 \cdot 8 = 24$ (cm^3). A koktél (bodza és az elolvadt jég keveréke) térfogata:

$$V = V_\mathrm{b} + 3V_\mathrm{k} = 202{,}04 + 24 = 226{,}04\ (\mathrm{cm}^3).$$

Mivel $ADE\triangle \sim AFG\triangle$ (szögek páronként egyenlőek), ezért:

$$\frac{AF}{AD} = \frac{AD+DF}{AD} = \frac{AD+h}{AD} = \frac{7+h}{7} = k$$

(hasonlósági arány). Felírva a térfogatok arányát, és kihasználva a közismert tételt:

$$\frac{V}{V_b} = \frac{226{,}04}{202{,}04} \approx 1{,}12 = k^3 \Rightarrow k \approx 1{,}038.$$

Ezt behelyettesítve az oldalak arányába:

$$\frac{7+h}{7} = 1{,}038 \implies h = 0{,}266 \approx 0{,}3\ (\mathrm{cm}) = 3\ \mathrm{mm}.$$

Tehát a pohárban megközelítően 3 mm-t fog emelkedni a bodzaszörp szintje a jégkockák elolvadása után.

Megjegyzések: 1. Ez az érték csekély mértékben változhat, ha a szokásos és megengedett kerekítéseket már korábban elvégezzük, de az biztos, hogy a pohárba még belefér a koktél.

2. Az olvadást azért kell megemlíteni, ez fontos feltétel, mert a jég sűrűsége kisebb a víz sűrűségénél, és ezért a feladat megoldása más lesz, ha a jég nem olvad el (jéghegy), ebben az esetben a térfogatok nem adódnak össze.

7. *Adott két teljes gráf. Az első gráfnak 4-gyel több csúcsa és 62-vel több éle van, mint a másodiknak.*

a) Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek annyi éle van, mint az adott két teljes gráf élei és csúcsai számának összege? (*6 pont*)

Legyen az A halmaz az $f(x) = \sqrt{-2x^2+5x+3}$ függvény értelmezési tartománya, a B halmaz pedig a $\log_{\frac{3}{\pi}}(4x-3) > \log_{\frac{3}{\pi}}(2x+7)$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

b) Határozzuk meg az $A \cap B$, az $A \cup B$ és az $A \setminus B$ halmazokat. (*6 pont*)

Tíz barát, Anna, Bea, Cili, Dóri, Emese, Fruzsi, Gábor, Huba, István és János moziba megy. A jegyek az első sorba egymás mellé szólnak.

c) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a négy fiú azt kérte, hogy mindegyikük közvetlenül két lány között ülhessen? (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen rendre x, y és z a három teljes gráf csúcsainak száma, ahol $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$.

A megoldás során felhasználjuk azt a tényt, hogy ha egy teljes gráfnak n darab csúcsa van, akkor az éleinek száma $\frac{n(n-1)}{2}$. A feladat feltételei alapján a következő összefüggések írhatók fel:

$$x = y + 4,$$

$$\frac{x(x-1)}{2} = \frac{y(y-1)}{2} + 62,$$

$$\frac{z(z-1)}{2} = x + y + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{y(y-1)}{2}.$$

Felhasználva, hogy $x=y+4$, a második összefüggés átírható az alábbi alakra:

$$\frac{(y+4)(y+3)}{2}=\frac{y(y-1)}{2}+62,$$

$$y^2+7y+12=y^2-y+124,$$

$$8y=112,$$

$$y=14 \;\Rightarrow\; x=18.$$

Ezeket az értékeket beírva a harmadik egyenletbe:

$$\frac{z(z-1)}{2}=18+14+\frac{18\cdot 17}{2}+\frac{14\cdot 13}{2} \;\Rightarrow\; \frac{z(z-1)}{2}=276 \;\Rightarrow\; z(z-1)=552.$$

Ez megoldható másodfokú egyenletként ($z^2-z-552=0 \implies z_1=24$ és $z_2=-23$), de kereshetjük egymást követő két pozitív egész szám szorzataként is a megoldást. Így csak a $24\cdot 23=552$ megoldás lehetséges, amiből $z=24$.

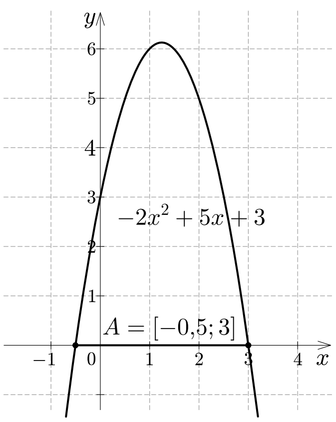
Így a gráfnak 24 csúcsa és $\frac{24\cdot 23}{2}=276$ éle van.

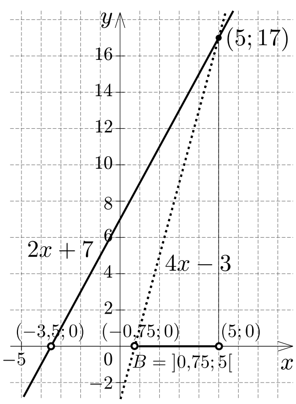
b) Az A halmaz meghatározásához a négyzetgyökfüggvény értelmezési tartományát figyelembe véve, meg kell oldanunk a következő egyenlőtlenséget:

$$-2x^2+5x+3\geqslant 0.$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $\frac{-1}{2}\leqslant x\leqslant 3$, másképpen $x\in\left[\frac{-1}{2};3\right]$, azaz:

$$A=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3\right\}.$$





A B halmaz meghatározásához figyelembe kell venni a logaritmusfüggvény értelmezési tartományát és a $0<\frac{3}{\pi}<1$ miatti szigorú monoton csökkenő tulajdonságát, így a következő lineáris egyenlőtlenségrendszert kell megoldani:

$$\begin{aligned} &4x-3>0, && \Rightarrow\ x>\frac{3}{4},\\ &2x+7>0, && \Rightarrow\ x>-3{,}5,\\ &4x-3<2x+7; && \Rightarrow\ x<5. \end{aligned}$$

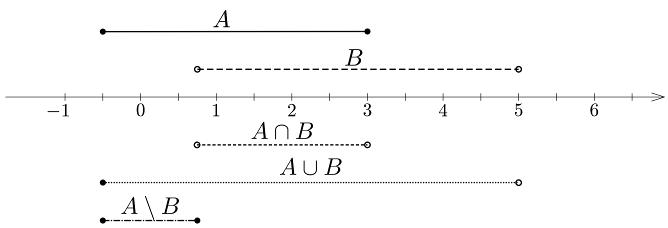
Az egyenlőtlenségrendszer megoldása: $\frac{3}{4}<x<5$, másképpen $x\in\left]\frac{3}{4};5\right[$, azaz: $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid \frac{3}{4}<x<5\right\}$.

A keresett halmazműveletek eredményei:

$$A\cap B=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\frac{3}{4}<x\leqslant 3\right\}=\left]\frac{3}{4};3\right],$$

$$A\cup B=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;-\frac{1}{2}\leqslant x<5\right\}=\left[-\frac{1}{2};5\right[,$$

$$A\setminus B=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{4}\right\}=\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right].$$



c) A 6 lány között 5 hely van L_L_L_L_L_L, ahová a fiúk ülhetnek. A négy fiúnak a „helye” ezáltal $\binom{5}{4}$-féleképpen „választható ki”. A lányok egymáshoz viszonyítva $6!=720$, míg a fiúk $4!=24$ különböző sorrendben ülhetnek le a székekre. Így az összes lehetőség száma:

$$\binom{5}{4}\cdot 6!\cdot 4!=5\cdot 720\cdot 25=86\,400.$$

8. *Adott a NoSelejt cég által gyártott valamely termék $K(x)=x^3-12x^2+$ $+48x$ költségfüggvénye és a $B(x)=300x$ bevételfüggvénye, ahol x az előállított mennyiséget jelenti (száz darabban), míg a $K(x)$ és a $B(x)$ értékei millió forintban értendők. A nyereséget a bevételek és a költségek különbsége adja.*

a) Határozzuk meg azt a termékmennyiséget, amely esetén a cég nyeresége maximális. *(5 pont)* *b) Határozzuk meg a $K(x)$ függvény grafikonja és a grafikon $x=3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő által határolt korlátos, zárt síkidom területének mérőszámát.* *(9 pont)*

c) Adjunk példát olyan egyváltozós valós f függvényre (ha létezik), amely differenciálható a valós számok halmazán, és $f'(3)=0$, de az $x=3$ nem szélsőértékhelye f-nek. *(2 pont)*

Megoldás. *a)* Jelölje $N(x)$ a nyereségfüggvényt, ekkor:

$$N(x)=B(x)-K(x)=300x-(x^3-12x^2+48x)=-x^3+12x^2+252x \quad (x>0).$$

A kapott $N(x)$ függvény maximumhelyét kell megkeresnünk. A szélsőértéket (az elsőrendű) derivált segítségével határozzuk meg:

$$N'(x)=-3x^2+24x+252.$$

Megoldjuk az $N'(x)=0$ egyenletet: $-3x^2+24x+252=0$, ahonnan az egyenlet megoldásai $x_1=-6$ (nem jó az $x>0$ feltétel miatt), az $x_2=14$ teljesíti a feltételt.

Az „eredményeket” táblázatba foglalva:

x	$]0;14[$	14	$]14;\infty[$
$N'(x)$	$+$	0	$-$
$N(x)$	$\nearrow$	max.	$\searrow$

Az $x=14$ (globális) maximumhelye az $N(x)$ függvénynek.

Tehát 1400 darab termék értékesítése után lesz a cég nyeresége maximális. (Ekkor a maximális nyereség: $N_{\max}=N(14)=-14^3+12\cdot 14^2+252\cdot 14=3136$ millió Ft.)

b) $K(3)=3^3-12\cdot 3^2+48\cdot 3=63$, tehát a pont, ahová az érintőt húzzuk, a $P(3;63)$.

Az érintő meredekségét a deriváltfüggvény adott pontbeli helyettesítési értéke adja meg. Mivel $K'(x)=3x^2-24x+48$, ezért az érintő meredeksége:

$$m=K'(3)=3\cdot 3^2-24\cdot 3+48=3.$$

Így az érintő egyenlete: $y-63=3(x-3)$, ahonnan $y=3x+54$.

A továbbiakban először határozzuk meg, hogy hol metszi (még) egymást az érintő és a függvény grafikonja. Ehhez meg kell oldanunk az $x^3-12x^2+48x=$ $=3x+54$ (harmadfokú) egyenletet. A megoldásban „segítségünkre lesz”, hogy tudjuk, az $x=3$ megoldása az egyenletnek (hiszen az $x=3$ abszcisszájú pontjában érinti az érintő a függvény grafikonját).

$$x^3-12x^2+48x=3x+54 \;\Rightarrow\; x^3-12x^2+45x-54=0.$$

Megfelelő csoportosítással szorzattá alakíthatunk:

$$x^3-13x^2+45x-54=\underbrace{x^3-3x^2}\underbrace{-9x^2+27x}\underbrace{+18x-54}=$$

$$=x^2\cdot(x-3)-9x\cdot(x-3)+18\cdot(x-3)=(x-3)(x-3)(x-6)=$$

$$=(x-3)^2(x-6).$$

Tehát: $(x-3)^2(x-6)=0 \;\Rightarrow\; x=6$ (lesz a másik metszéspont abszcisszája).

A szorzattá alakítás megtörténhet a polinomok osztásának, a másodfokú egyenletek megoldásának, majd a polinomok gyöktényezős alakjának a felhasználásával is.

Figyelembe véve, hogy a $[3;6]$ intervallumon $(x-3)^2(x-6)\leqslant 0$, könnyen belátható, hogy ezen az intervallumon a $K(x)$ függvény grafikonja mindvégig az érintő alatt halad, hiszen:

$$x^3-12x^2+45x-54=(x-3)^2(x-6)\leqslant 0 \;\Rightarrow\; x^3-12x^2+48x\leqslant 3x+54.$$

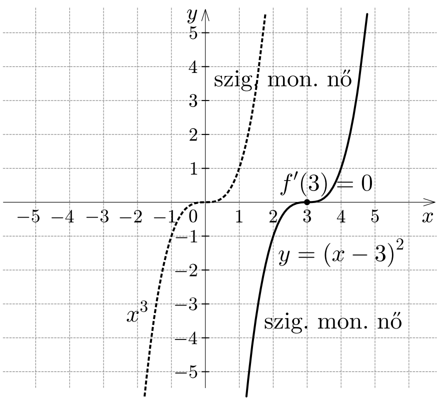
Így a kérdéses korlátos, zárt síkidom területének mérőszáma:

$$\int_3^6 \big[-(x^3-12x^2+45x-54)\big]\,\mathrm{d}x=\int_3^6(-x^3+12x^2-45x+54)\,\mathrm{d}x=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+12\cdot\frac{x^3}{3}-45\cdot\frac{x^2}{2}+54x\right]_3^6=$$

$$=\left(-\frac{6^4}{4}+4\cdot 6^3-45\cdot\frac{6^2}{2}+54\cdot 6\right)-\left(-\frac{3^4}{4}+4\cdot 3^3-45\cdot\frac{3^2}{2}+54\cdot 3\right)=$$

$$=(-324+864-810+324)-\left(-\frac{81}{4}+108-\frac{405}{2}+162\right)=54-\frac{189}{4}=\frac{27}{4}.$$



c) Olyan f^* függvényt „kell keresnünk”, amely (például) szigorúan növekvő, és $(f^*)'$ nullával egyenlő egyes pontokban.

Van ilyen függvény, pl. az

$$f^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f^*(x)=x^3.$$

Ebből egyszerű függvénytranszformációval megkapható a feladat feltételeinek megfelelő függvény:

$$f(x)=(x-3)^3.$$

Megjegyzés. Bár a feladat nem kér részletes indoklást, de ellenőrizhetjük, megfelel-e a feltételeknek az $f(x)$:

$$f(x)=(x-3)^3 \;\Rightarrow\; f'(x)=3(x-3)^2 \;\Rightarrow\; f'(3)=0.$$

Továbbá $f'(x)>0$ minden $x\neq 3$ esetén, így $f(x)$ szigorúan monoton növekvő minden $x\in\mathbb{R}$-re, tehát nem lesz szélsőértéke az $x=3$ helyen, annak ellenére, hogy $f'(3)=0$.

9. *Peches Pál nagyon szereti a kaparós sorsjegyeket. Kedvence a Lutri sorsjegy, melynek ára* 500 *Ft, és a sorsjegyek* 25%*-a nyerő. Pálnak (most csak) négy darab* 500 *forintosa van. Bemegy egy lottózóba, és elhatározza, hogy addig vásárolja kedvenc sorsjegyét, amíg nem nyer, vagy ameddig a pénze el nem fogy.*

a) Határozzuk meg a Pál által a sorsjegy(ek)re elköltött 500 *forintosok számának várható értékét és szórását.* (*7 pont*)

Pál háromféle tömegközlekedési eszközzel tudja munkahelyét megközelíteni, éspedig busszal, metróval, illetve villamossal, ezért (is) kombinált bérlettel rendelkezik. Az esetek 25%*-ában busszal megy, a metrót pedig négyszer olyan gyakran használja, mint a villamost. A buszon átlagosan minden negyedik, a villamoson átlagosan minden tizedik alkalommal ellenőrzik a bérletét, míg annak a valószínűsége, hogy a metrón kap ellenőrzést,* 0,85.

b) Egyik alkalommal ellenőrizték a bérletét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy villamossal utazott? (*6 pont*)

Egyik nap (a munkanap végén) Pál egy ötfős baráti társaság tagjaként busszal utazott haza. Az egyik megállóban ellenőrök szálltak fel, és a buszon (aktuálisan) tartózkodó 48 *utasból találomra kiválasztott tíz embernek a bérletét (vagy jegyét) ellenőrizték.*

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötfős baráti társaságból legalább két főt ellenőriztek? (*3 pont*)

Megoldás. *a*) A ξ valószínűségi változó jelentse a sorsjegyért elköltött 500 forintosok számát. Annak a valószínűsége, hogy egy sorsjegy nyerő, $\frac{1}{4}$, míg annak, hogy nem nyerő, $\frac{3}{4}$. A ξ valószínűségi változó lehetséges értékei: 1; 2; 3; 4 (a $\xi=4$ eset „magában foglalja” azt az esetet is, amikor az utolsó vásárolt sorsjegy nyerő, illetve azt is, amikor nem nyerő).

$P(\xi=1)=\frac{1}{4}\left(=\frac{16}{64}\right)$ (már az első megvásárolt sorsjegy nyerő).

$P(\xi=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{16}\left(=\frac{12}{64}\right)$ (az első megvásárolt sorsjegy nem nyerő, de a második igen).

$P(\xi=3)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$ (az első két sorsjegy nem nyerő, de a harmadik nyerő).

$P(\xi=4)=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{108}{256}=\frac{27}{64}$ (az első három sorsjegy nem nyerő, de a negyedik nyerő, illetve egyik vásárolt sorsjegy sem nyerő).

A ξ valószínűségi változó eloszlása:

x_i	1	2	3	4	$\sum$
$P(\xi=x_i)$	$\frac{16}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	1

A ξ valószínűségi változó várható értéke:

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{4} x_i\cdot P(\xi=x_i)=1\cdot\frac{16}{64}+2\cdot\frac{12}{64}+3\cdot\frac{9}{64}+4\cdot\frac{27}{64}=\frac{175}{64}\approx 2{,}73.$$

A szóráshoz szükséges (a ξ valószínűségi változó második momentuma):

$$M(\xi^2)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2\cdot P(\xi=x_i)=1^2\cdot\frac{16}{64}+2^2\cdot\frac{12}{64}+3^2\cdot\frac{9}{64}+4^2\cdot\frac{27}{64}=\frac{577}{64}\approx 9{,}02.$$

A ξ valószínűségi változó szórása:

$$D(\xi)=\sqrt{D^2(\xi)}=\sqrt{M(\xi^2)-M^2(\xi)}=\sqrt{\frac{577}{64}-\left(\frac{175}{64}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{6303}{4096}}=\frac{\sqrt{6303}}{64}\approx 1{,}24.$$

b) Jelölje B azt az eseményt, hogy busszal, M azt, hogy metróval, illetve V azt, hogy villamossal közelíti meg Pál a munkahelyét. A feladat feltételei alapján: $P(\mathrm{B})=0{,}25$, $P(\mathrm{V})=x$, $P(\mathrm{M})=4x$ $(x\in\mathbb{R}^+)$.

Mivel a B, M és V események teljes eseményrendszert alkotnak, így:

$$P(\mathrm{B})+P(\mathrm{M})+P(\mathrm{V})=1\ \Rightarrow\ 0{,}25+4x+x+1=1\Rightarrow 5x=0{,}75\ \Rightarrow\ x=0{,}15.$$

Ebből következik, hogy: $P(\mathrm{B})=0{,}25$, $P(\mathrm{M})=0{,}60$, $P(\mathrm{V})=0{,}15$.

Jelölje E azt az eseményt, hogy Pál ellenőrzést kap valamelyik (általa használt) közlekedési eszközön. Így (feltételes valószínűségekkel van dolgunk):

$$P(\mathrm{E}\mid\mathrm{B})=\frac{1}{4}=0{,}25,\quad P(\mathrm{E}\mid\mathrm{M})=0{,}85,\quad P(\mathrm{E}\mid\mathrm{V})=\frac{1}{10}=0{,}10.$$

A feladat „kérdése”: $P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})=?$. Figyelembe véve, hogy $P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{V}\cdot\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}$, a megadott és kiszámított adatok alapján (alkalmazva a teljes valószínűség tételét):

$$P(\mathrm{E})=P(\mathrm{E}\mid\mathrm{B})\cdot P(\mathrm{B})+P(\mathrm{E}\mid\mathrm{M})\cdot P(\mathrm{M})+P(\mathrm{E}\mid\mathrm{V})\cdot P(\mathrm{V})=$$

$$=0{,}25\cdot 0{,}25+0{,}85\cdot 0{,}60+0{,}10\cdot 0{,}15=0{,}5875.$$

Mindezek alapján:

$$P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})=\frac{P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})}{P(\mathrm{E})}=\frac{P(\mathrm{E}\mid\mathrm{V})\cdot P(\mathrm{V})}{P(\mathrm{E})}=\frac{0{,}10\cdot 0{,}15}{0{,}5875}=\frac{0{,}0150}{0{,}5875}=\frac{6}{235}\approx 0{,}0255.$$

Tehát annak a valószínűsége, hogy Peches Pál villamossal utazott:

$$P(\mathrm{V}\mid\mathrm{E})\approx 0{,}0255.$$

c) Jelölje C azt az eseményt, hogy legalább két főt ellenőriztek. Ekkor a $\overline{C}$: az ötfős baráti társaságból kettőnél kevesebb főt (azaz 0-t vagy 1-et) ellenőriztek.

A nem ellenőriztek senkit a baráti társaságból (esemény) valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{43}{10}}{\binom{48}{10}} \approx 0{,}2931.$$

Az egy főt ellenőriztek esemény valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{43}{9}}{\binom{48}{10}} \approx 0{,}4311.$$

Az ötfős baráti társaságból kettőnél kevesebb főt (azaz 0-t vagy 1-et) ellenőriztek valószínűsége:

$$\frac{\binom{5}{0}\cdot\binom{43}{10}}{\binom{48}{10}} + \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{43}{9}}{\binom{48}{10}} \approx 0{,}7242.$$

Mindezek alapján: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}2758$. Tehát annak a valószínűsége, hogy az ötfős baráti társaságból legalább két főt ellenőriztek:

$$P(C) \approx 0{,}2758.$$

Marczis György (Gyula)
Molnár István (Gyula)
Molnár Judit (Gyula)
Rókáné Rózsa Anikó (Békéscsaba)

C gyakorlat megoldása

C. 1685. *Egy királyi család nyolc gyermeke közül a legidősebb uralkodik. A testvérek mindegyike pontosan akkor uralkodik, amikor ő a legidősebb még élő személy közülük. Viszont ezen a királyi családon átok ül: ha három testvér, kik korban egymást követik, mind trónra kerülnek, akkor a rákövetkező testvérük meghal reménytelenségében. Hányféleképpen uralkodhatnak, ha csak arra vagyunk tekintettel, hogy kik kerülnek trónra a testvérek közül?*

I. megoldás. Ha nem ülne átok a királyi családon, azaz uralkodhatnának a korban egymást követő testvérek közül 3-nál többen is egymás után, akkor az első kivételével minden gyermek vagy trónra kerül, vagy nem (az első uralkodik éppen, ezért ő biztosan trónra kerül). Így ekkor $2^7 = 128$-féleképp kerülhetnének trónra. Viszont