Beszámoló a 2021. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2021. évi Eötvös-versenye október 15-én délután 3 órai kezdettel tíz magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 69 versenyző adott be dolgozatot, 14 egyetemista és 55 középiskolás.

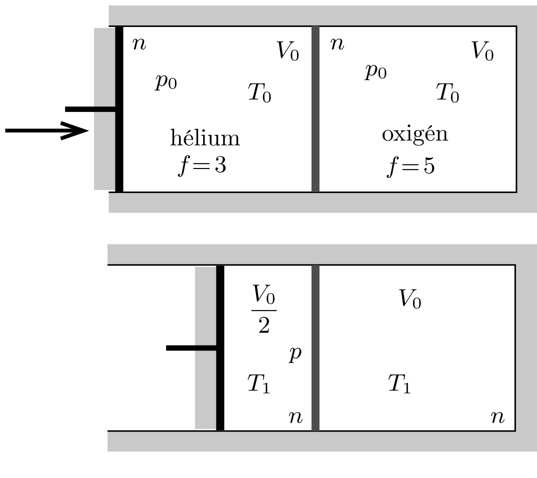
Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

1. feladat. *Egy hőszigetelt, hengeres tartályt egy jó hővezető, rögzített fal oszt két egyforma henger alakú térrészre. Az egyik térfélben héliumgáz, a másikban azzal megegyező anyagmennyiségű oxigéngáz található, mindkét gáz kezdeti hőmérséklete T_0, kezdeti térfogata pedig V_0. A tartály egyik végét könnyen mozgó, hőszigetelő dugattyú zárja le, amellyel a héliummal töltött térrész térfogata változtatható. Határozzuk meg a hengerben lévő gázok végső hőmérsékletét, miután a dugattyú lassú mozgatásával a héliumgáz térfogatát $V_0/2$-re csökkentettük!*

(*Vigh Máté*)

Megoldás. Az *1. ábra* a kezdeti állapotot és a végállapotot mutatja.



1. ábra

[1] Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

Feladatunk a T_1 hőmérséklet meghatározása. Ezt többféle módszerrel is megtehetjük.

I. megoldás. Legyen a héliumgáz lassan változó pillanatnyi hőmérséklete T, térfogata V. Az elválasztó fal jó hővezetése miatt az oxigéngáz hőmérséklete is T. Ha a dugattyú elmozdulása miatt a hőmérséklet ΔT értékkel nő, a héliumgáz térfogata pedig ΔV értékkel változik meg ($\Delta V < 0$), akkor az egész rendszer belső energiájának változása

$$\Delta E = \frac{3}{2} nR\,\Delta T + \frac{5}{2} nR\,\Delta T = 4nR\,\Delta T. \tag{1}$$

A héliumgáz nyomása:

$$p = nR\frac{T}{V}.$$

Az egész rendszerre alkalmazott első főtétel szerint

$$-p\Delta V = \Delta E,$$

vagyis

$$\frac{\Delta V}{V} + 4\frac{\Delta T}{T} = 0. \tag{2}$$

Szorozzuk meg (2)-t $T^4 V$-vel, és használjuk ki, hogy a megváltozások kicsik (ezért a négyzetüket és a magasabb hatványaikat elhanyagolhatjuk):

$$T^4\,\Delta V + 4T^3 V\Delta T = \Delta(T^4 V) = 0,$$

tehát $T^4 V$ a folyamat során állandó marad. A héliumgáz kezdeti és végállapotát összehasonlítva kapjuk, hogy

$$T_0^4\,V_0 = T_1^4\frac{V_0}{2}, \qquad \text{vagyis} \qquad T_1 = \sqrt[4]{2}\,T_0 \approx 1{,}2\,T_0.$$

Ugyanezt az eredményt az (1)-ben szereplő kicsiny változások összegzésével (integrálással) is megkaphatjuk:

$$\int_{V_0}^{V_0/2} \frac{1}{V}\,\mathrm{d}V + 4\int_{T_0}^{T_1} \frac{1}{T}\,\mathrm{d}T = -\ln 2 + 4\ln\frac{T_1}{T_0} = 0,$$

vagyis

$$T_1 = \sqrt[4]{2}\,T_0.$$

II. megoldás. Az (1) egyenlet szerint a folyamat tekinthető egy $f = 8$ szabadsági fokú gáz adiabatikus összenyomásának. Erre a folyamatra a fajhőhányados $\kappa = \frac{f+2}{f} = \frac{5}{4}$, tehát az adiabatikus állapotváltozás egyenlete:

$$T\,V^{\kappa-1} = T\,V^{1/4} = \text{állandó},$$

ahonnan $T_1 = \sqrt[4]{2}\,T_0$.

III. megoldás. Kézikönyvekben[2] és képletgyűjteményekben megtalálható, hogy n mol anyagmennyiségű, f szabadsági fokú molekulákból álló, T hőmérsékletű és V térfogatú ideális gáz entrópiája

$$S(T,V)=\frac{f}{2}\,nR\ln\frac{T}{T_0}+nR\ln\frac{V}{V_0}.$$

Az entrópia nullpontja önkényesen választható, a fenti képletben például

$$S(T_0,V_0)=0$$

(ahol T_0 és V_0 lehet a feladatban szereplő kezdeti hőmérséklet és térfogat).

A vizsgált folyamatban nincs hőcsere a rendszer és a környezete között, továbbá (a dugattyú lassú mozgatása esetén) a folyamat reverzibilis, így a rendszer entrópiája változatlan marad:

$$\left(\frac{f_{\mathrm{He}}}{2}\,nR\ln\frac{T_1}{T_0}+nR\ln\frac{V_0/2}{V_0}\right)+\left(\frac{f_{\mathrm{O}_2}}{2}\,nR\ln\frac{T_1}{T_0}+nR\ln\frac{V_0}{V_0}\right)=0,$$

vagyis (tudva, hogy $f_{\mathrm{He}}=3$ és $f_{\mathrm{O}_2}=5$)

$$4\,\ln\frac{T_1}{T_0}+\ln\frac{1}{2}=0,$$

azaz a $T_1=\sqrt[4]{2}\,T_0$ eredmény adódik.

Megjegyzés. Ha a héliumgáz térfogatát olyan gyorsan csökkentjük a felére, hogy az oxigéngáz nem tud azonnal felmelegedni, akkor a folyamat irreverzibilissé válik, vagyis az entrópia nőni fog. Mivel adott térfogat esetén a magasabb hőmérséklethez tartozik nagyobb entrópia, a dugattyú hirtelen elmozdítása után a két gáz végül (a hőmérséklet kiegyenlítődése után) jobban felmelegszik, mint a feladatban szereplő lassú összenyomásnál.

2. feladat. *Egy henger alakú, ℓ hosszúságú és $R\ll\ell$ sugarú, légmagos szolenoid meneteinek száma N. A tekercs belsejébe egy $r\ll R$ sugarú, a szolenoid szimmetriatengelyére merőleges síkú, L induktivitású szupravezető gyűrűt helyezünk (a gyűrű és a szolenoid középpontja egybeesik).*

a) Növekszik vagy csökken a szolenoid induktivitása a gyűrű behelyezése következtében?

b) Határozzuk meg az induktivitás megváltozásának nagyságát!

(*Széchenyi Gábor*)

Megoldás. *a*) A szupravezető fázisban lévő anyagoknak az az egyik különleges tulajdonságuk, hogy az elektromos ellenállásuk nulla. Ha egy szupravezető gyűrűben feszültség indukálódna, akkor az Ohm-törvény alapján végtelen nagy áramnak kellene benne folynia. Ennek a fizikai képtelenségnek a feloldása az, hogy a szupravezető gyűrűben nem indukálódhat feszültség, azaz a gyűrűn áthaladó mágneses fluxus értéke nem változhat meg.

[2]Lásd pl. a 333+ Furfangos Feladat Fizikából 194. feladatának megoldását.

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy kezdetben, amikor a szolenoidban nulla az áramerősség, akkor a szupravezető gyűrűben sem folyik áram, így a rajta áthaladó mágneses fluxus értéke nulla. Ez az érték akkor sem változhat meg, ha a tekercsben áram folyik. Hogyan lehetséges ez, hiszen a szolenoid mágneses tere miatt meg kellene jelennie egy véges fluxusnak a gyűrűben. Úgy, hogy a gyűrűben olyan áram indukálódik, mely azonos nagyságú, de ellentétes előjelű fluxust hoz létre a gyűrűn. Ennek az áramnak a hatására a tekercsen áthaladó mágneses fluxus értéke és így a tekercs induktivitása is kisebb lesz, mint a szupravezető gyűrű nélküli esetben.

b) Vizsgáljuk az előbb leírt jelenséget kvantitatívan. Legyen a szolenoid árama I. A szolenoid közepén elhelyezett szupravezető gyűrűn áthaladó mágneses fluxus értéke

$$\Phi_{\text{gyűrű}} = L \cdot i + M \cdot I,$$

ahol L a gyűrű öninduktivitása, i a gyűrű árama, M a szolenoid és a gyűrű kölcsönös indukciós együtthatója, ami megadja, hogy az egyikben folyó egységnyi erősségű áram hatására mekkora mágneses fluxus jön létre a másikban. (Belátható, hogy M nagysága a szereplők felcserélésekor nem változik, tehát mindegy, hogy a gyűrű árama által a szolenoidban keltett mágneses fluxust számítjuk ki, vagy a szolenoid árama által a gyűrűben keltett fluxust vizsgáljuk. Ez utóbbi nyilván könnyebb feladat.) M értékét a feladatban megadott geometriára könnyen kiszámolhatjuk. Az I erősségű árammal átjárt szolenoidban a homogén mágneses tér indukcióvektorának nagysága $\frac{\mu_0 NI}{\ell}$. Mivel a gyűrű síkja merőleges a mágneses tér irányára, a gyűrűn áthaladó mágneses fluxus $\frac{\mu_0 NI}{\ell} r^2\pi$. Innen kiolvashatjuk a kölcsönös indukciós együttható értékét:

$$M = \frac{\mu_0 N}{\ell} r^2\pi.$$

A gyűrű fluxusa nem változik meg, ha a szolenoid áramát nulláról I-re növeljük, így $\Phi_{\text{gyűrű}} = 0$, ahonnan a gyűrűben folyó áram értéke

$$i = -\frac{MI}{L}.$$

A szolenoidon áthaladó mágneses fluxus értéke:

$$\Phi_{\text{szolenoid}} = L_0 \cdot I + M \cdot i,$$

ahol L_0 a szolenoid öninduktivitása. Behelyettesítve a gyűrű áramát, a következőt kapjuk:

$$\Phi_{\text{szolenoid}} = \left(L_0 - \frac{M^2}{L}\right) I.$$

Láthatjuk, hogy a szolenoidon áthaladó mágneses fluxus arányos a szolenoid áramával. Az arányossági tényező a szupravezető gyűrűt tartalmazó szolenoid induktivitása, mely

$$\Delta L_0 \equiv \frac{M^2}{L} = \frac{\mu_0^2 N^2 r^4 \pi^2}{\ell^2 L}$$

értékkel kisebb, mint a gyűrű nélküli szolenoid öninduktivitása.

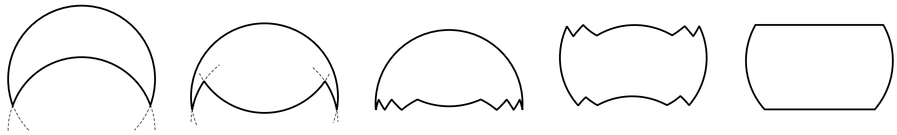
Ugyanezt az eredményt kaptuk volna, ha a számolás során nem tételezzük fel, hogy kezdetben a szupravezető gyűrűben nulla áram folyik. A leírt levezetés kis módosítással használható a szupravezető tetszőleges előélete esetén is. Ekkor i, $\Phi_{\text{gyűrű}}$ és $\Phi_{\text{szolenoid}}$ azt adja meg, hogy mennyivel változott meg a gyűrű árama, valamint a gyűrűn és a szolenoidon áthaladó mágneses fluxus értéke, miközben a tekercs áramát nulláról I-re növeltük.

3. feladat. *Egy felfújható strandlabda könnyű, vékony, igen hajlékony, de nem nyújtható műanyagból készült. Felfújt állapotában a labda majdnem pontosan gömb alakú, sugara* 20 cm. *Egy kísérletben a labdát űrtartalmának feléig felfújjuk levegővel, majd egy vízszintesen tartott, nagy kiterjedésű síklap segítségével fokozatosan víz alá nyomjuk, míg az teljesen el nem merül a vízben. Vázoljuk fel, milyen alakot vesz fel a víz alá nyomott labda! Ha tudjuk, határozzuk meg az alak releváns méreteinek számszerű értékeit is!*

(*Vigh Máté*)

Megoldás. A feladat szövege szerint a labda anyaga „igen hajlékony, de nem nyújtható”. Ezért az egyetlen lehetséges módszer a labda térfogatának csökkentésére, ha a labdát „behorpasztjuk” (*első* rajz a *2. ábrán*), ekkor a felület két (ugyanolyan r sugarú) gömbfelületdarabból áll. A behorpadt gömbfelületen azonban újabb horpadás is lehetséges – ezúttal kifele –, ahogy az ábra *második rajzán* látszik. Ezt tetszőleges számban megismételhetjük, így akár közel síklapot is kialakíthatunk, amely azonban a valóságban egy kicsit „ráncos”, vékony, ki-behajló gömbfelszíndarabokból áll (*középső rajz*).

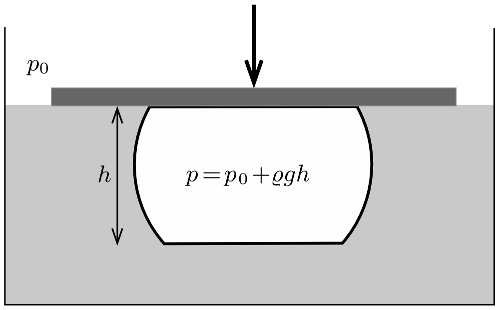
Látni fogjuk, hogy fizikai feltételek miatt a labda alsó és felső része is így fog deformálódni (*negyedik rajz*). A „ráncokat” (amelyek elvileg tetszőlegesen finomak lehetnek, de egy valódi kísérletben azért látszanak) már nem ábrázolva egy gömbövet kapunk (*utolsó rajz* a 2. ábrán).



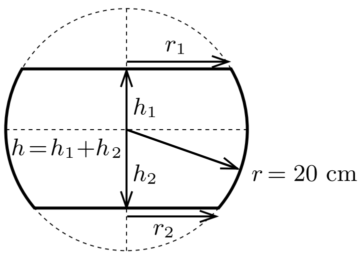
2. ábra

Eddig csak a geometria által lehetséges deformációkról beszéltünk. Ezután meg kell vizsgálnunk, hogy az adott kísérletben a fizikai feltételek következtében milyen alak jön létre. A labda tetejét a síklap nyomja le a víz alá, így ott a labda rásimul a felületre. Érdekesebb kérdés a labda aljának alakja: mivel a labda „igen hajlékony”, a gyűrt felületen olyan alakot vesz fel, hogy a belső és a külső nyomás mindenhol azonos legyen. A labdán belül mindenhol azonos a légnyomás (a levegő csekély aerosztatikus nyomását elhanyagoljuk), a víz nyomása viszont a mélységgel változik ($p=p_0+\varrho gh$), így a labda aljának is vízszintes síklapnak kell lennie (*3. ábra*).

A labda alakja tehát egy vízszintes síklapokkal határolt *gömböv.*



3. ábra



4. ábra

A feladat második részében meg kell határoznunk a gömböv méreteit. A jelölések a *4. ábrán* láthatók.

Vizsgáljuk először a geometriai feltételt: a gömböv térfogata a gömb térfogatának fele. (A gömböv térfogata képletgyűjteményekből kikereshető, vagy integrálással könnyen kiszámítható.)

$$\pi r^2(h_1 + h_2) - \frac{\pi}{3}(h_1^3 + h_2^3) = \frac{2\pi}{3} r^3.$$

A numerikus megoldáshoz érdemes bevezetni az $x_1 = \frac{h_1}{r}$ és $x_2 = \frac{h_2}{r}$ dimenziótlan változókat, így áttekinthetőbbé válik az egyenlet.

$$x_1^3 + x_2^3 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0. \tag{3}$$

Ez egy kétismeretlenes (harmadfokú) egyenlet. A másik egyenletet a fizikai feltétel matematikai megfogalmazásával kapjuk meg. Erre két lehetséges utat mutatunk meg.

I. megoldás. Az erőegyensúly alapján: a lapra kifejtett nyomóerő megegyezik a labdára ható felhajtóerővel.

$$(p - p_0) r_1^2 \pi = \frac{2r^3\pi}{3} \varrho g,$$

ahol p a labdában lévő nyomás, p_0 a külső légnyomás, r_1 a gömböv felső lapjának sugara, ϱ pedig a víz sűrűsége.

Ahogy a *3. ábrán* is látható, a labda belsejében a levegő nyomása a külső légnyomás és a h magasságú vízoszlop hidrosztatikai nyomásának összegével egyenlő:

$$p = p_0 + \varrho g h = p_0 + \varrho g(h_1 + h_2).$$

Ezt beírva az előző egyenletbe, és kihasználva, hogy $r_1^2 = r^2 - h_1^2$, megkapjuk a fizikai feltételt:

$$\varrho g(h_1 + h_2)\big(r^2 - h_1^2\big)\pi = \frac{2r^3\pi}{3} \varrho g,$$

amelyet a korábban bevezetett dimenziótlan változókkal ismét áttekinthetőbb alakra hozhatunk:

$$(x_1+x_2)\bigl(1-x_1^2\bigr)=\frac{2}{3}. \tag{4}$$

Ezután a kétismeretlenes (3)–(4) egyenletrendszert kell megoldanunk.

Az egyenletrendszert legegyszerűbb numerikusan, „próbálgatással" megoldani. x_1 és x_2 értéke 0 és 1 között lehet, értéküket durván megbecsülve behelyettesíthetjük az egyenletekbe, majd az értékeket úgy finomítjuk, hogy az egyenletek minél inkább teljesüljenek. Az egyenletrendszer megoldása (itt 3 értékes jegyre, de természetesen a versenyen kevésbé pontos megoldás is elég lett volna) és az összenyomott labda 4. ábrán látható geometriai paraméterei:

$$x_1=0{,}235,\quad x_2=0{,}470,$$

$$h_1=4{,}7\text{ cm},\quad h_2=9{,}4\text{ cm},$$

$$h=h_1+h_2=14{,}1\text{ cm},$$

$$r_1=19{,}4\text{ cm},\quad r_2=17{,}6\text{ cm}.$$

II. megoldás. Energetikai megfontolás alapján: a kiszorított víz tömegközéppontja a lehető legmagasabban legyen.

A gömböv tömegközéppontjának távolsága a laptól (a gömböv tömegközéppontjának helye képletgyűjteményekből kikereshető, vagy integrálással könnyen meghatározható):

$$d=\frac{3\bigl(h_2^2-h_1^2\bigr)}{4r}-\frac{3\bigl(h_2^4-h_1^4\bigr)}{8r^3},$$

a korábbi módon dimenziótlanítva

$$\delta=\frac{d}{r}=\frac{3\bigl(x_2^2-x_1^2\bigr)}{4}-\frac{3\bigl(x_2^4-x_1^4\bigr)}{8}.$$

Ezután δ minimumát keressük, figyelembe véve a korábban felírt

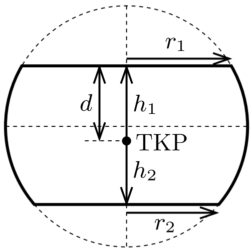
$$x_1^3+x_2^3-3(x_1+x_2)+2=0$$

geometriai feltételt is.

Legegyszerűbben ismét „próbálgatással" oldhatjuk meg a feladatot. Eszerint

$$\delta_{\min}=0{,}343,\quad\text{ha}\quad x_1=0{,}235\quad\text{és}\quad x_2=0{,}470,$$

az előző megoldással összhangban.



5. ábra

A tömegközéppont minimális távolsága a laptól $d_{\min} = r\delta_{\min} = 6{,}9$ cm.

Megjegyzés. Több versenyző is észrevette, hogy a feladat ekvivalens azzal, hogy a labdát félig megtöltjük *vízzel,* és egy sima, vízszintes felületre helyezzük. Ilyenkor értelemszerűen a víz tömegközéppontjának a lehető legalacsonyabban kell lennie.

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2021. november 26-án délután került sor az ELTE TTK Eötvös-termében. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. A 25 évvel ezelőtti díjazottak közül *Tóth Gábor Zsolt* jött el – ő pár mondatban beszélt a pályafutásáról.

Ezután következett a 2021. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását *Gnädig Péter,* a 2. feladatét *Széchenyi Gábor,* a 3. feladatét *Vankó Péter* ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Ormos Pál,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Az első feladat helyes megoldásáért, valamint a második és harmadik feladatban elért lényeges eredményekért *második díjat* nyert **Tóth Ábel,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnáziumban érettségizett *Schramek Anikó* tanítványaként.

Az első feladat helyes, vagy lényegében helyes megoldásáért, valamint a második vagy a harmadik feladatban elért lényeges eredményekért *harmadik díjat* nyert **Kertész Balázs Zoltán,** a Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziumának 12. osztályos tanulója, *Tófalusi Péter* tanítványa; **Szépvölgyi Gergely,** a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Székely György* és *Rakovszky Andorás* tanítványa, valamint **Takács Bendegúz,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Piroska Mária* és *Csefkó Zoltán* tanítványa.

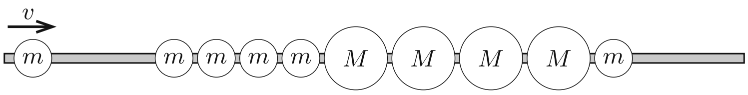
Az első feladat helyes, vagy lényegében helyes megoldásáért, valamint a második feladatban elért részeredményekért *dicséretet* kapott **Bonifert Balázs,** az ELTE fizika BSc szakos hallgatója, aki a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthonban érettségizett *Horváth Norbert* tanítványaként; **Csordás Kevin,** a Bajai III. Béla Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Lakner Attila* és *Pálfalvi László* tanítványa; **Dékány Csaba,** a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója, *Juhász Zoltán* tanítványa; **Fonyi Máté Sándor,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a szolnoki Verseghy Ferenc Gimnáziumban érettségizett *Veres Dénes* tanítványaként; **Gurzó József,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Nagy Piroska Mária* tanítványa, valamint **Toronyi András,** a Baár-Madas Református Gimnázium, Általános Iskola és Diákotthon 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából 60 ezer, a harmadik díjjal 40 ezer, a dicsérettel 25 ezer forint pénzjutalom járt. A díjazottak tanárai a *Hazalátogatott Wigner Jenő,* illetve az *Az Eötvös kísérlet történelmi keretben* című könyveket kapták az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ajándékaként. Köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Gnädig Péter, Széchenyi Gábor, Vankó Péter, Vigh Máté

Fizika gyakorlat megoldása

G. 759. *Egy vízszintes, súrlódásmentes, rögzített pálcára felfűzve négy darab m tömegű, négy darab M tömegű ($m<M$), majd ismét egy m tömegű, tökéletesen rugalmas golyó áll közel egymáshoz az ábrán látható elrendezésben. Balról egy m tömegű, szintén tökéletesen rugalmas golyó érkezik v sebességgel, és ütközik a golyósor első tagjával.*



A további ütközések lezajlása után mely golyók maradnak nyugalomban, és a többiek milyen irányban fognak mozogni?

(4 pont)

Megoldás. A megoldásban a pálca menti sebességeket előjelesen értjük, és a jobbra haladó testek sebességét tekintjük pozitívnak. Minden rugalmas ütközésnél teljesül a lendületmegmaradás és az energiamegmaradás törvénye. Ezek szerint ha egy m_1 tömegű test v sebességgel ütközik egy m_2 tömegű álló testtel, akkor az ütközés utáni v_1 és v_2 sebességekre fennáll, hogy

$$m_1v=m_1v_1+m_2v_2, \qquad \text{valamint} \qquad m_1v^2=m_1v_1^2+m_2v_2^2.$$

Ennek az egyenletrendszernek 2 megoldása van:

$$v_1=v, \qquad v_2=0,$$

valamint

$$v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v, \qquad v_2=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v.$$

Az első megoldás fizikailag elfogadhatatlan (ekkor az első golyó ütközés nélkül menne át a másodikon), ezért a második adja meg helyesen az ütközés utáni sebességeket.

Esetünkben háromféle ütközés képzelhető el, és mindegyik meg is történik.