b) Bizonyítsuk be, hogy az $A'T_a$, $B'T_b$ és $C'T_c$ egyenesek is egy ponton mennek át, és ez a pont rajta van az ABC háromszög magasságpontja és beírt körének középpontja által alkotott egyenesen.

Javasolta: *Csaplár Viktor* (Bátorkeszi) és *Hegedűs Dániel* (Gyöngyös)

Beküldési határidő: 2022. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A matematikai logika logikusabb, mint gondolnánk I.

Már jó egy évtizedes informatikatanári gyakorlat alatt foglalkoztatott, hogy a *vagy,* az *és,* a *kizáró vagy,* a *következtetés* és az *azonosság* műveletek nem fedik le az összes kimeneti lehetőséget a két állítás logikai kapcsolata terén.

A két részállítás (nevezzük A-nak és B-nek) egy állítássá összevonása négy alapesetet jelent, hisz egymástól függetlenül mindkettő lehet igaz és hamis. Mivel a négy eredménymezőben a két-két kimenet bármelyike előfordulhat, tehát $2^4 = 16$ kimenet lehetséges, ebből az előbb említettek csak öt esetet fednek le. Mi van a másik tizenegy lehetőséggel? Ebben a cikkben ennek járunk a végére.

a művelet		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	i	h

Először – a későbbi félreértések elkerülése miatt – tisztázzuk a jelöléseket. Az állításokat latin nagybetűkkel jelöljük ($A, B, \ldots, Z$). Van két kitüntetett betű: I az azonosan igaz állítást jelöli, ami a körülményektől függetlenül mindig igaz logikai értékű, továbbá H az azonosan hamis állítást, ami az I állítás tagadása, ellentéte. A kétféle logikai érték jelölésére az i (igaz) és a h (hamis) betűket használjuk.

A logikai műveletek jelölésére a matematikában használatos jelöléseket fogjuk használni, a *tagadás* jele $\neg$, az *és* műveleté $\wedge$, a *vagy* műveleté $\vee$, a *kizáró vagy* műveleté $\otimes$, az *azonosságé* $\Leftrightarrow$, végül a *következtetésé* $\rightarrow$.

A teljesség kedvéért vegyük át a fent említett műveletek szabályát.

- A TAGADÁS művelet ellentétére változtatja az eredeti állítás logikai értékét (olvasata: $\neg A =$ nem A).
- Az ÉS művelet pontosan akkor IGAZ, ha mindkét részállításunk IGAZ (olvasata: $A \wedge B = A$ és B).
- A VAGY művelet pontosan akkor HAMIS, ha mindkét részállításunk HAMIS (olvasata: $A \vee B = A$ vagy B).

- A KIZÁRÓ VAGY művelet pontosan akkor IGAZ, ha a két részállításunk ELLENTÉTES LOGIKAI ÉRTÉKŰ (olvasata: $A \otimes B = A$ kizáró vagy B).
- Az AZONOSSÁG művelet pontosan akkor IGAZ, ha a két részállítás AZONOS LOGIKAI ÉRTÉKŰ (olvasata: $A \Leftrightarrow B = A$ azonos B-vel).
- A KÖVETKEZTETÉS művelet pontosan akkor HAMIS, ha az az állítás, amiről következtetünk IGAZ, de az, amire következtetünk HAMIS (olvasata: $A \to B = A$-ból következik B).

Ezek után nézzük is meg a kétállításos műveletek értéktáblázatát. Hagyományosan az alábbi módon adják meg ezeket:

$A \vee B$	
A igaz, B igaz	igaz
A igaz, B hamis	igaz
A hamis, B igaz	igaz
A hamis, B hamis	hamis

Ez a leírás precíz, de a fent mutatottnak több az információtartalma:

$A \vee B$		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	i	h

Nem járunk messze az igazságtól, ha ennek láttán eszünkbe jut a szorzótábla, de arról majd később ejtünk szót.

Ahhoz, hogy ezt az új elrendezést megszokjuk, nézzük meg az alapműveletek átírását ebbe a formába.

$A \wedge B$		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	h	h

$A \vee B$		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	i	h

$A \otimes B$		A	
		i	h
B	i	h	i
	h	i	h

$A \Leftrightarrow B$		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	h	i

$A \to B$		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	h	i

Így egymás mellé rakva őket, sokkal jobban látszik a szabályszerűség, és megfigyelhető, hogy az igazi lényeg a vastagon keretezett részekben, azok különbözőségében rejlik, ezért rejtsük el a kevésbé fontos elemeket.

$A \wedge B$	
i	h
h	h

$A \vee B$	
i	i
i	h

$A \otimes B$	
h	i
i	h

$A \Leftrightarrow B$	
i	h
h	i

$A \to B$	
i	h
h	h

Tehát az ilyen 2×2 értéktáblázatból van tizenhat, amelyekből eddig ötöt nevesítettünk.

Ideje rátérnünk arra, hogy mit is jelent az az információhiány, amelyet említettem. Némi töprengés után észrevehető, hogy az első négy tábla szimmetrikus a főátlóra, ahogy a szorzó- és összeadótábla is. Ez a logikai műveleteknél is azt jelenti, mint a számoknál: az első négy művelet kommutatív ($A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$, $A \otimes B = B \otimes A$, $A \Leftrightarrow B = B \Leftrightarrow A$), a következtetés azonban nem az ($A \to B \neq B \to A$). Ezt persze eddig is tudtuk, de pont a tükrözés adja a kezünkbe a hatodik műveletet, ami – bizonyára sejtjük – a $B \to A$, értéktáblázata a másik irányú következtetés főátlóra tükrözésével adódik:

$B \to A$		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	i	i

Ez így még mindig csak 6 lehetőség, még 10 hátravan. A lehetséges 16 táblabelsőt elhelyezni egy 4×4-es, négyzet alakú táblázatba érdemes, ami 8×8 betűt fog tartalmazni. Ezt már csak ügyesen fel kell töltenünk h, i betűkkel, hogy előállítsuk mind a 16 lehetséges eredményt.

Így néz ki üresen, mivel 8×8-as, a sakktáblára emlékeztet, el is neveztem *logikai sakktáblának.*

Lássuk a feltöltési módszert.

- Az első sorba írjunk csupa h betűt.
- A harmadikba hi párokat.
- Az ötödikbe ih párokat.
- A hetedik sorba pedig kerüljön csupa i betű.
- Az első oszloppárt töltsük fel h betűkkel.
- A másodikat hi párokkal.
- A harmadikat ih párokkal.
- Végül az üres cellákba írjunk i betűket.

Így a táblázat minden 2×2-es cellája eltér a többitől. Érdekes játék a táblázatban megkeresni a már megismert hat művelet helyét (lásd a hátsó belső borító *1. ábráját*).

h	h	h	h	h	h	h	h
h	h	h	i	i	h	i	i
h	i	h	i	h	i	h	i
h	h	h	i	i	h	i	i
i	h	i	h	i	h	i	h
h	h	h	i	i	h	i	i
i	i	i	i	i	i	i	i
h	h	h	i	i	h	i	i

Helyezzünk el egy kis pöttyöt a sakktábla középpontjába. A konstrukcióból következően az erre a pontra szimmetrikusan elhelyezkedő eredménytáblák egymás tagadásai (amit a hátsó belső borító *2. ábráján* ki-ki ellenőrizhet is: ha a tábla egyik mezőjén i vagy h betű van, akkor a tükörképének ugyanazon mezőjén h vagy i található), ezért ezt a pontot a tábla *tagadópontjának* nevezzük.

Az előző rész utolsó ábráján is megfigyelhető, hogy $\neg(A \Leftrightarrow B) = A \otimes B$.

Azért használunk két színt, hogy minden művelet és a tagadása eltérő színnel látszódjon.

Ezek szerint, ha a tábla valamelyik felét fel tudjuk tölteni, akkor kész is leszünk, a tükrözés tagadó voltát kihasználva adódik a többi. Erre a tábla alsó fele az esélyesebb, már csak három eredménytábla nincs nevesítve, vegyük ezeket szemügyre.

		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	i	h

		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	h	h

		A	
		i	h
B	i	i	i
	h	i	i

Az első tábla igaz eredményt ad, ha A igaz, és hamisat, ha A hamis. Ez nem lett más, mint A.

Hasonló megfontolások alapján a másodikban B-t és a harmadikban az azonosan igazat, I-t azonosíthatjuk. Ezeket és tagadásukat ($\neg A$, $\neg B$ és H) is feljegyezve, a logikai sakktáblánk kinézete a hátsó belső borító *3. ábráján* látható.

A maradék négy helyre az *és,* és a *vagy* műveletek, továbbá a két irányú *következtetés* tagadása $\big(\neg(A \wedge B)$, $\neg(A \vee B)$, $\neg(A \to B)$ és $\neg(B \to A)\big)$ kerül.

Szemrevételezve a munkánkat megnyugodhatunk, mind a 16 lehetséges kimenetet nevesítettük. Nem hanyagságból vagy tudatlanságból használjuk csak az *és,* a *vagy,* a *kizáró vagy,* az *azonosság* és a *következtetés* műveleteket, továbbá a *tagadást,* hanem azért, mert egyszerűen nincs több. (Lásd a hátsó belső borító *4. ábráját.*)

Na de itt álljunk csak meg egy pillanatra. Lehet, hogy buzgalmunkban túllőttünk a célon?

Mire is gondolok?

A tagadásra. Egy adott művelet, mondjuk az *és* esetén többféle módon alkalmazhatjuk a tagadást. Tagadhatjuk az első, vagy akár a második részállítást, netán mindkettőt külön-külön, vagy az egész művelet eredményét.

Ezek persze mind mást jelentenek, hogy jobban érthetővé váljon, legyen az A állítás az, hogy *Kedd van,* a B állítás pedig az, hogy *Esik az eső.* Ekkor:

$A \wedge B$	Kedd van és esik az eső.
$\neg A \wedge B$	Nem kedd van és esik az eső.
$A \wedge \neg B$	Kedd van és nem esik az eső.
$\neg A \wedge \neg B$	Nem kedd van és nem esik az eső.
$\neg(A \wedge B)$	Nem igaz az, hogy kedd van és esik az eső.

Az értéktáblázatok elkészítését az olvasóra bízom, azt azonban szögezzük le, hogy a kapott értékek mind a már táblán lévők valamelyikével azonosak.

$A \wedge B$	$\neg A \wedge B$	$A \wedge \neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$\neg(A \wedge B)$
$\begin{array}{cc\|cc} \multicolumn{2}{c\|}{A \wedge B} & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & i & h \\ & h & h & h \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline i & h \\ \hline h & h \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{cc\|cc} \multicolumn{2}{c\|}{\neg A \wedge B} & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & i \\ & h & h & h \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline h & i \\ \hline h & h \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{cc\|cc} \multicolumn{2}{c\|}{A \wedge \neg B} & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & h \\ & h & i & h \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline h & h \\ \hline i & h \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{cc\|cc} \multicolumn{2}{c\|}{\neg A \wedge \neg B} & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & h \\ & h & h & i \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline h & h \\ \hline h & i \\ \hline\end{array}$	$\begin{array}{cc\|cc} \multicolumn{2}{c\|}{\neg(A \wedge B)} & \multicolumn{2}{c}{A} \\ & & i & h \\ \hline B & i & h & i \\ & h & i & i \end{array}$ $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline h & i \\ \hline i & i \\ \hline\end{array}$
$A \wedge B$	$\neg(B \to A)$	$\neg(A \to B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \wedge B)$
az eredetihez képest	oszlopcsere (OCS)	sorcsere (SCS)	átlós csere (ÁCS)	betűcsere (BCS)

Könnyen beláthatjuk, hogy bármely műveletből indulunk is ki, az eredménytáblában az első részállítás tagadása oszlopcserét (OCS), a második tagadása sorcserét (SCS), mindkettő tagadása átlós cserét (ÁCS), az egész művelet tagadása pedig az i és h értékek cseréjét, vagyis betűcserét (BCS) jelent.

A logikai kifejezések egyszerűsítése, formalizálása és annak a megfejtése, hogy ennek az egésznek milyen szoros a kapcsolata a számítógépekkel, a cikk következő részéből derül majd ki.

Tóth Tamás
Budapest

Informatikából kitűzött feladatok

I. 556. Egy városnegyedbe N lakóházat terveztek, melyek mindegyikében egy-egy szinten azonos számú lakás van. A házakban a lakások értéke a szintek számával csökken. A lakásokat jellemezhetjük egy olyan P pontszámmal, ami azt mutatja meg, hogy hányadik szinten van a házban (például egy harmadik szinten lévő lakás pontszáma 3). A tervben szereplő házak magasságát városrendezési okokból csökkenteni kell összesen K darab szinttel. A csökkentés során előfordulhat, hogy a tervezettnél kevesebb számú lakóházat építenek a városnegyedbe.

Készítsünk programot `i556` néven, amely a tervben szereplő házak K darab szinttel való csökkentését elvégzi úgy, hogy közben a tervben szereplő házak összértéke a legkisebb mértékben csökken.

A program *standard bemenetének* első sorában a lakóházak N ($2 \leqslant N \leqslant 10\,000$) száma és K ($2 \leqslant K \leqslant 10\,000$) értéke található, a következő N sorban pedig az, hogy egy-egy ház hány szintes ($2 \leqslant M_i \leqslant 25$). A program *standard kimenetére* az elérhető maximális pontszámot írjuk ki.

Bemenet (a / jel sortörést helyettesít)	**Kimenet**
`4 5 / 7 / 5 / 6 / 8`	`85`