

B. 5228. Egy parabola az ABC háromszög AB oldalát a C_1 és C_2 , BC oldalát az A_1 és A_2 , míg CA oldalát a B_1 és B_2 belső pontokban metszi. Igazoljuk, hogy ha $AC_1 = C_2B$ és $BA_1 = A_2C$, akkor $CB_1 = B_2A$.

(5 pont)

Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5229. Az $a \neq 0$ valós számra és az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényre

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y) + ay$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy f additív, vagyis $f(x + y) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

(6 pont)

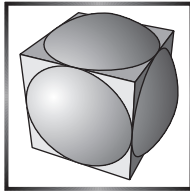
Javasolta: *George Stoica* (Saint John, New Brunswick, Kanada)

*

Beküldési határidő: 2022. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>

*



**Az A pontversenyben kitűzött
nehezebb feladatok
(818–820.)**

A. 818. Határozzuk meg mindazokat az m, n pozitív egész számokból álló párokat, amelyekre $9^{|m-n|} + 3^{|m-n|} + 1$ osztható m -mel és n -nel is.

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

A. 819. Legyen G egy tetszőlegesen választott véges egyszerű gráf. A gráf csúcsaira olyan módon írunk nemnegatív egész számokat, hogy minden csúcson az a szám szerepeljen, ahány olyan szomszédja van az adott csúcsnak, melyre páros számot írtunk. Bizonyítsuk be, hogy az ilyen kitöltések száma kettőhatvány.

A. 820. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög. A háromszög a oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_a, A_a és B_a pontokban érinti. Hasonlóan, a háromszög b oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_b, A_b és B_b pontokban érinti. Végül a háromszög c oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_c, A_c és B_c pontokban érinti. Legyen A' az A_bC_b és A_cB_c egyenesek metszéspontja. Hasonlóan, legyen B' a B_aC_a és A_cB_c egyenesek, C' pedig az A_bC_b és B_aC_a egyenesek metszéspontja. Végül legyen T_a, T_b és T_c a beírt kör érintési pontja rendre az a, b és c oldalon.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $A'A_a, B'B_b$ és $C'C_c$ egyenesek egy ponton mennek át.

b) Bizonyítsuk be, hogy az $A'T_a$, $B'T_b$ és $C'T_c$ egyenesek is egy ponton mennek át, és ez a pont rajta van az ABC háromszög magasságpontja és beírt körének középpontja által alkotott egyenesen.

Javasolta: *Csaplár Viktor* (Bátorkeszi) és *Hegedűs Dániel* (Gyöngyös)

Beküldési határidő: 2022. március 10.

Elektronikus munkafüzet: <https://www.komal.hu/munkafuzet>



A matematikai logika logikusabb, mint gondolnánk I.



Már jó egy évtizedes informatikatanári gyakorlat alatt foglalkoztatott, hogy a *vagy*, az *és*, a *kizáró vagy*, a *következtetés* és az *azonosság* műveletek nem fedik le az összes kimeneti lehetőséget a két állítás logikai kapcsolata terén.

A két részállítás (nevezzük A -nak és B -nek) egy állítással összevonása négy alapesetet jelent, hisz egymástól függetlenül mindkettő lehet igaz és hamis. Mivel a négy eredménymezőben a két-két kimenet bármelyike előfordulhat, tehát $2^4 = 16$ kimenet lehetséges, ebből az előbb említettek csak öt esetet fednek le. Mi van a másik tizenegy lehetőséggel? Ebben a cikkben ennek járunk a végére.

a művelet		A	
		i	h
B	i	i	h
	h	i	h

Először – a későbbi félreértések elkerülése miatt – tisztázzuk a jelöléseket. Az állításokat latin nagybetűkkel jelöljük (A, B, \dots, Z). Van két kitüntetett betű: I az azonosan igaz állítást jelöli, ami a körülményektől függetlenül mindig igaz logikai értékű, továbbá H az azonosan hamis állítást, ami az I állítás tagadása, ellentéte. A kétféle logikai érték jelölésére az i (igaz) és a h (hamis) betűket használjuk.

A logikai műveletek jelölésére a matematikában használatos jelöléseket fogjuk használni, a *tagadás* jele \neg , az *és* műveleté \wedge , a *vagy* műveleté \vee , a *kizáró vagy* műveleté \otimes , az *azonosság*é \Leftrightarrow , végül a *következtetés*é \rightarrow .

A teljesség kedvéért vegyük át a fent említett műveletek szabályát.

- A TAGADÁS művelet ellentétére változtatja az eredeti állítás logikai értékét (olvasata: $\neg A = \text{nem } A$).
- Az ÉS művelet pontosan akkor IGAZ, ha mindkét részállításunk IGAZ (olvasata: $A \wedge B = A \text{ és } B$).
- A VAGY művelet pontosan akkor HAMIS, ha mindkét részállításunk HAMIS (olvasata: $A \vee B = A \text{ vagy } B$).