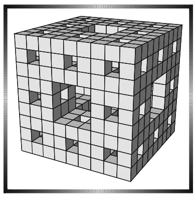
A B pontversenyben kitűzött feladatok (5222–5229.)



B. 5222. Legyenek az A halmaz elemei azok a páros pozitív egészek, amelyeket 2-vel osztva a számjegyek összege 2-vel csökken, a B halmaz elemei pedig azok a pozitív egészek, melyeket 5-tel szorozva a számjegyek összege 5-tel nő. Adjuk meg az $A \cap B$ és a $B \setminus A$ halmazok elemszámát.

(*3 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

B. 5223. Definiáljuk az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen:

$$a_1 = -3, \qquad a_{n+1} = 4 + a_n + 4\sqrt{a_n + 4}\,.$$

Határozzuk meg a_{2022} értékét.

(*3 pont*) Javasolta: *Káspári Tamás* (Paks)

B. 5224. Az $ABCD$ egységnégyzet BC oldalán úgy vesszük fel a P pontot, továbbá a CD oldalán a Q pontot, hogy $PAQ\sphericalangle = 45^\circ$. A P és Q pontok melyik helyzetében lesz $BP + PQ + QD$ minimális?

(*4 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5225. Az ABC háromszög A-val szemközti oldala a, beírt körének középpontja I, sugara ϱ, a körülírt kör sugara R. Bizonyítsuk be, hogy ha $\overline{AI} = R$, akkor az ABC háromszög területe $\frac{a \cdot R}{4} + \varrho \cdot a$.

(*4 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5226. Egy háromszög mindhárom oldalának hossza legfeljebb 2 egység. Minden csúcspárt összekötünk egy-egy olyan körívvel, amely egy-egy egységsugarú körnek a félkörnél nem hosszabb íve. Igazoljuk, hogy

$$a' + b' > 2c'/3,$$

ahol a', b', c' a körívek hosszát jelöli.

(*5 pont*)

B. 5227. Adjunk példát olyan k pozitív egészre és legalább k csúcsú F véges fagráfra, amelyben minden csúcs legfeljebb harmadfokú, és F-nek tetszőleges k csúcsú összefüggő részgráfját elhagyva a megmaradó gráf legalább 2022 komponensre esik szét.

(*6 pont*) (*Monthly feladat* nyomán)

B. 5228. Egy parabola az ABC háromszög AB oldalát a C_1 és C_2, BC oldalát az A_1 és A_2, míg CA oldalát a B_1 és B_2 belső pontokban metszi. Igazoljuk, hogy ha $AC_1 = C_2B$ és $BA_1 = A_2C$, akkor $CB_1 = B_2A$.

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5229. Az $a \neq 0$ valós számra és az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényre

$$f\big(x + f(y)\big) = f(x) + f(y) + ay$$

teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Bizonyítsuk be, hogy f additív, vagyis $f(x + y) = f(x) + f(y)$ minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén.

(*6 pont*) Javasolta: *George Stoica* (Saint John, New Brunswick, Kanada)

❄

Beküldési határidő: 2022. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (818–820.)

A. 818. Határozzuk meg mindazokat az m, n pozitív egész számokból álló párokat, amelyekre $9^{|m-n|} + 3^{|m-n|} + 1$ osztható m-mel és n-nel is.

Javasolta: *Kós Géza* (Budapest)

A. 819. Legyen G egy tetszőlegesen választott véges egyszerű gráf. A gráf csúcsaira olyan módon írunk nemnegatív egész számokat, hogy minden csúcson az a szám szerepeljen, ahány olyan szomszédja van az adott csúcsnak, melyre páros számot írtunk. Bizonyítsuk be, hogy az ilyen kitöltések száma kettőhatvány.

A. 820. Legyen ABC egy tetszőleges háromszög. A háromszög a oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_a, A_a és B_a pontokban érinti. Hasonlóan, a háromszög b oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_b, A_b és B_b pontokban érinti. Végül a háromszög c oldalához hozzáírt kör az AB, BC és CA egyeneseket rendre a C_c, A_c és B_c pontokban érinti. Legyen A' az A_bC_b és A_cB_c egyenesek metszéspontja. Hasonlóan, legyen B' a B_aC_a és A_cB_c egyenesek, C' pedig az A_bC_b és B_aC_a egyenesek metszéspontja. Végül legyen T_a, T_b és T_c a beírt kör érintési pontja rendre az a, b és c oldalon.

a) Bizonyítsuk be, hogy az $A'A_a$, $B'B_b$ és $C'C_c$ egyenesek egy ponton mennek át.