Mivel n értéke csak egész lehet, így meg kell vizsgálni $f(12)$-t és $f(13)$-at.

$$f(13) \approx 7347{,}3 > f(12) \approx 7346{,}7,$$

tehát 13 egyenlő részre osztva lesz a legmagasabb az eladásból származó bevétel.

Koncz Levente
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5150. *Igazoljuk, hogy csak véges sok olyan pozitív egész szám van, amelyet nem lehet megkapni úgy, hogy egy kisebb számhoz hozzáadjuk annak valamelyik számjegyét. Melyik a legnagyobb ezek közül?*

(*4 pont*)

Megoldás. Minden három-, vagy annál többjegyű számot meg lehet kapni egyik számjegyének és egy kisebb számnak az összegeként a következő módon: a számból kivonjuk a legelső számjegyét (ez biztosan nagyobb, mint 0), az így kapott különbség lesz a megfelelő szám, hiszen ha ehhez hozzáadjuk az első számjegyét, akkor szinte minden esetben visszakapjuk az eredeti számot.

A fenti módszer akkor nem működik, ha a kivonás során változik az első számjegy. Mivel legalább háromjegyű számokat vizsgálunk, ez csak akkor fordulhat elő, ha a tízes helyiértéken lévő számjegy 0, és az első számjegy nagyobb, mint az utolsó. Ebben az esetben más módszerrel állítjuk elő a számot. Ha kivonunk a számból 9-et, akkor a tízes helyiértéken lévő 0-ból 9-es lesz, mert az utolsó számjegynél nagyobbat vontunk ki. Az így kapott számhoz hozzáadva az utolsó előtti számjegyét, amely 9, megkapjuk az eredetit számot.

Általánosságban, ha egy pozitív egész szám $\overline{x_n \dots x_2 x_1}$ alakú, ahol $x_2 \neq 0$, akkor a megfelelő szám: $\overline{x_n \dots x_2 x_1} - x_n$, amelyhez x_n-t hozzáadva megkapjuk az eredeti számot.

Ha egy pozitív egész szám $\overline{x_n \dots 0 x_1}$ alakú, ahol $9 \geqslant x_n > x_1$,akkor a megfelelő szám: $\overline{x_n \dots 0 x_1} - 9$, amelynek utolsó előtti számjegye biztosan 9, így hozzáadva 9-et, megkapjuk az eredeti pozitív egész számot. Ezzel beláttuk, hogy minden legalább háromjegyű szám előállítható a feladatban megadott módon.

Most megvizsgáljuk a 100-nál kisebb számokat. Közülük azokat a páros számokat, amelyek nem 0-ra végződnek, megkaphatjuk úgy, hogy az utolsó számjegyének a felét kivonjuk belőle, mert akkor a kapott számhoz az utolsó számjegyét hozzáadva megkapjuk az eredeti számot. Ha pedig 0-ra végződik a szám, akkor 5-öt vonunk ki, így a különbség utolsó számjegye 5 lesz.

Most a kétjegyű páratlan számok következnek:

$$\begin{aligned} 99 &= 90 + 9, \\ 97 &= 89 + 8, \\ 95 &= 87 + 8, \\ 93 &= 85 + 8, \\ 91 &= 83 + 8, \\ 89 &= 81 + 8. \end{aligned}$$

Azt állítom, hogy 87-et nem lehet így előállítani, hiszen $\overline{8x}$ alakú nem lehet jó, mert ha 8-at adunk hozzá, akkor az összeg legalább 88 lesz. Ha x-et adunk hozzá, akkor pedig páros számot kapunk.

Próbáljuk meg a 79-ből előállítani a 87-et:

$$79 + 7 \neq 87,$$

$$79 + 9 \neq 87.$$

Szóba jöhet még a 78 is:

$$\begin{aligned} 78 + 8 &\neq 87, \\ 78 + 7 &\neq 87. \end{aligned}$$

78-nál kisebb számból pedig biztosan nem lehet a 87-et egy számjegy hozzáadásával előállítani, hiszen különbségük nagyobb 9-nél.

Beláttuk, hogy a 87-et nem lehet ezzel a módszerrel megkapni, de az összes nála nagyobbat igen, így 87 a legnagyobb ilyen szám. Ebből az is következik, hogy véges sok ilyen pozitív egész szám van.

Csizmadia Miklós (Budapest XIV. Ker. Szent István Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

Összesen 110 dolgozat érkezett. 4 pontos 89, 3 pontos 5, 2 pontos 7 dolgozat. 1 pontot 1, 0 pontot 7 versenyző kapott. Nem versenyszerű: 1 dolgozat.

B. 5201. *Legyenek az n pozitív egész szám pozitív osztói $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Határozzuk meg azokat az összetett n számokat, amelyekre d_1, $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3$, $\ldots$, $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$ számok mind osztói n-nek.*

(*4 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

Megoldás. Az n összetett szám, amelynek d_2 a legkisebb prímosztója.

Tegyük fel indirekt módon, hogy $d_2 \neq 2$. Ekkor $d_1 + d_2 = d_2 + 1$, ami d_2 páratlan volta miatt páros. Ezzel ellentmondásra jutottunk, mivel ekkor 2 osztója n-nek, amiből $d_2 = 2$ következik, hiszen a legkisebb prímosztó ebben az esetben a 2 lenne.

Ha tehát van összetett n megoldás, akkor $d_2 = 2$, amiből $d_1 + d_2 = 1 + 2 = 3$ következik. Mivel a 3 közvetlenül a 2 után következő egész, így $d_3 = 3$ adódik.

A 3 prím és nem osztható 2-vel, tehát nem azonos $d_k = n$-nel. A fentiek alapján világos, hogy amennyiben n összetett szám, akkor osztható 2-vel és 3-mal is, tehát osztható 6-tal.

Azt állítjuk, hogy az $n = 6$ megoldása a feladatnak, hiszen ekkor $n = d_4 = 6$. $d_1 = 1$, ami osztója a 6-nak, $d_2 = 2$, $d_1 + d_2 = d_3 = 3$, ami ugyancsak osztója a 6-nak; végül $d_1 + d_2 + d_3 = d_1 + d_2 + d_{k-1} = 6$, ami osztója a 6-nak. A 6-nak önmagán kívül kizárólag az 1, a 2 és a 3 a pozitív osztója, tehát más összeg, illetve osztó nem áll elő, azaz a 6-ra a feladat minden feltétele teljesül.

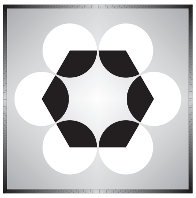
Ezek után megvizsgáljuk, hogy van-e más megoldása a feladatnak. Mivel a 6 osztója n-nek, ezért $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ és $\frac{n}{6}$ is osztója n-nek. Figyelembe véve, hogy ennek a három osztónak az összege

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} = n,$$

további valódi osztója már nem is lehet n-nek, hiszen a feladat feltétele szerint $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$ is osztója n-nek, ahol $d_k = n$; ezért az egyetlen megoldás az $n = 6$.

Baski Bence (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

Összesen 132 dolgozat érkezett. 4 pontos 73, 3 pontos 40, 2 pontos 12 dolgozat. 1 pontot 6, 0 pontot 1 versenyző kapott.



Ifjú olvasóinkhoz régen és most

1894 (de akár ma is írhattuk volna)

Az ezideig hozzánk beküldött és megoldott feladatok szerkezete és külalakja körül szerzett tapasztalataink alapján fordulunk jelen sorainkkal ifjú olvasóinkhoz és a következő kérelmet intézzük hozzájuk:

Szíveskedjenek beküldött dolgozataikat lehetőleg gondosan szerkeszteni, nem használván semmiféle rövidítést; tárgyaljanak minden feladatot külön lapon és annak csak egyik oldalára írva, lássák el minden megoldásukat névaláírásukkal.

Sokkal érdekesebbnek és tanulságosabbnak tartjuk, ha olvasóink dolgozatait változatlanul és kijavítatlanul közölhetjük, mintha tökéletesen átidomított másolatot kell nyújtanunk, melyekben szerző nem talál meg semmit tulajdonából, hacsak nem a megoldás alá biggyesztett nevét.

De hogy ezt elérhessük, okvetetlenül szükségesnek tartjuk, hogy olvasóink jóindulata segítségünkre legyen és óhajtva reméljük, hogy ezentúl nem magyarázó szöveg nélküli képletsorozatokat, hanem gondosan elkészített és szerkesztett megoldásokat fogunk kapni.

Minden oldalról halljuk a tanárok panaszát az iskolai és házi dolgozatok külalakjának és szerkezetének pongyola és elhanyagolt volta felett. Midőn tehát ifjú