



Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. a) Határozzuk meg a következő kifejezés előjelét, ha n tetszőleges természetes szám:

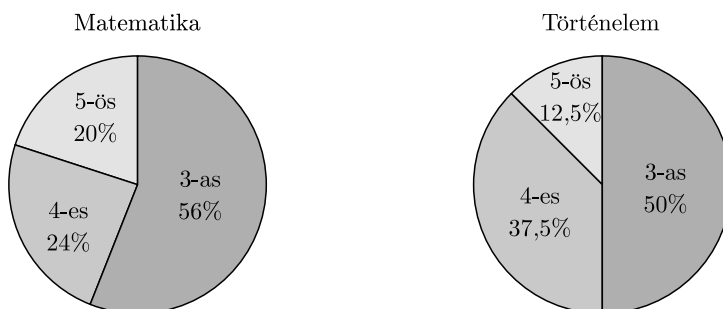
$$\frac{2^{n-1} + 1}{2^n + 1} - \frac{2^n + 1}{2^{n+1} + 1}. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Hány valós megoldása van a

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

trigonometrikus egyenletnek a $]0; \pi[$ intervallumon? (7 pont)

2. A 12. évfolyam tanulói közül 25-en matematikából, 40-en pedig történelemből tettek emelt szintű érettségi vizsgát. Az érdemjegyek eloszlását a következő kördiagramokon látjuk:



a) A kördiagramok alapján töltsük ki az alábbi gyakorisági táblázatot. (4 pont)

Tantárgy \ jegyek	3	4	5
Matematika			
Történelem			

b) Határozzuk meg a történelem eredmények átlagát, mediánját és szórását. (3 pont)

c) A matematikából 3-ast szerzők közül legalább hány tanulónak kellett volna 4-est kapnia, hogy a többiek változatlan teljesítménye mellett a matematika átlag legalább 3,8 legyen? (6 pont)

3. Az Andrássy gimnázium gólyatáborának egy sportversenyéhez a következő pálya készült el az udvar betonján: egy körben az egy pontból kiinduló 10 m és 15 m hosszú húrok egymással 35° -os szöget zárnak be. A játékosoknak a húrok (nem

közös) végpontjából indulva kell megszerezni a kör középpontjában lévő labdát, majd visszafutni a kiindulási helyükre.

- a) Készítsünk a szövegnek megfelelő ábrát a lényeges adatok feltüntetésével. (2 pont)
- b) Legalább mekkora utat kell megtenni egy-egy játékosnak? (4 pont)
- c) Kata azt állítja, hogy a játékosok kiindulási helye és a labda alkotta háromszög területe legfeljebb 25 m^2 . Igaza van-e Katának? (6 pont)

4. Adott az $x^2 + y^2 - 14x - 12y + 65 = 0$ egyenletű kör és a $P(3; 9)$ pont.

a) A „rajta”, „kívül”, „belül” szavak közül írjuk a pontozott vonalra azt, amelyekkel az alábbi állítás igaz lesz. Számolással is igazoljuk a választ. (3 pont)

A P pont van a fent megadott egyenletű körvonalon.

b) Határozzuk meg az origón és a P ponton átmenő g egyenesnek az x tengely pozitív felével bezárt szögét. A szög értékét egy tizedesjegy pontossággal adjuk meg. (3 pont)

c) Írjuk fel a megadott kör azon érintőjének egyenletét, amelynek nincs közös pontja a III. síknegyeddel, nem megy át az origón, és ami az y tengelyt az origótól kétszer olyan távolságban metszi, mint az x tengelyt, továbbá a tengelyekkel alkotott háromszög területe a legkisebb. (7 pont)

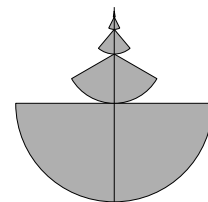
II. rész

5. a) Egy $\{a_n\}$ számtani sorozat differenciája 4, az első n tag összege 1825, és az első tag megegyezik ezen összeadott tagok számával. Tagja-e ennek az $\{a_n\}$ sorozatnak a 8115? (6 pont)

Julcsi 2018. január 1-jén betett a bankba egy bizonyos összeget, évi 5%-os kamatra úgy, hogy a bankszámláján a minden év végén esedékes kamatokat tőkésítette (nem vette ki). Három év elteltkor megemelte a megtakarított pénzét az éppen bent lévőnek a 20%-ával. Ettől kezdve már csak 4%-os évi kamatot kapott a bankintézettől. A következő év első napján pedig kivette az addig megtakarított pénzének a 10%-át. 2025. január 1-jén szeretné felvenni az összes pénzét. Testvére, Anna egyszerre kezdett vele takarékoskodni ugyanakkora összeggel.

b) Hány %-os, állandó évi kamatot kellene kapnia ahhoz Annának betét és kivét nélküli takarékoság esetén, hogy a két testvérnek ugyanannyi megtakarított pénze legyen 2025 első napján? A kamatláb értékét egy tizedes pontossággal adjuk meg. (4 pont)

Karácsonyra Franci az ábrán látható, négy cikkből álló, tengelyesen szimmetrikus fenyőfa díszet kezdte el rajzolni egy papírra. Egy 5 cm sugarú félkörből indult ki, eggyel feljebb lépve, a körcikk sugarát a felére, középponti szögét $\frac{2}{3}$ részére változtatta, miközben a körcikk középpontját a felette lévő körív felezési pontjába tette. Elgondolkodott azon, ha ezt az eljárást végtelen sokáig tudná folytatni, lenne-e a mintának véges területe.



c) Ha igen, pontosan mekkora lenne, és az hány %-a annak a minimális területű téglalap területének, amelynek két oldala párhuzamos a fenyőfa tengelyével? (6 pont)

6. a) A JÁTÉK Kft. új homokozó vödre csonkakúp alakú. Ha a vödörbe beleteszünk egy 14 cm átmérőjű labdát, akkor az érinti a vödör alját, és egy körben a vödör oldalát is. A vödör aljának átmérője 12 cm, felső nyílásának átmérője 18 cm. A vödört kívül is, belül is vízálló réteggel festik be. Hány liter festékre van szükség 1000 darab vödör elkészítésekor, ha 1 négyzetméternyi felület festéséhez 0,5 dl festéket használnak, és a vödör falvastagsága elhanyagolható? (8 pont)



b) Panni és Peti koktélos poharakból bodzaszörpöt iszik. A pohár felső része forgáskúp alakú, melynek magassága 8 cm, alkotója 10 cm, és 7 cm „magasan áll benne” az üdítő. Hány milliméterrel emelkedik meg a bodzaszörp „szintje”, ha a pohárba három darab, 2 cm élű jégkockát teszünk, és azok már teljesen elolvadtak? A választ egészre kerekítve adjuk meg. (Tekintsünk el a jég olvadásakor közismerten bekövetkező térfogatváltozástól.) (8 pont)

7. Adott két teljes gráf. Az első gráfnak 4-gyel több csúcsa és 62-vel több éle van, mint a másodiknak.

a) Hány csúcsa van annak a teljes gráfnak, amelynek annyi éle van, mint az adott két teljes gráf élei és csúcsai számának összege? (6 pont)

Legyen az A halmaz az $f(x) = \sqrt{-2x^2 + 5x + 3}$ függvény értelmezési tartománya, a B halmaz pedig a $\log_{\frac{3}{\pi}}(4x - 3) > \log_{\frac{3}{\pi}}(2x + 7)$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza.

b) Határozzuk meg az $A \cap B$, az $A \cup B$ és az $A \setminus B$ halmazokat. (6 pont)

Tíz barát, Anna, Bea, Cili, Dóri, Emese, Fruzsi, Gábor, Huba, István és János moziba megy. A jegyek az első sorba egymás mellé szólnak.

c) Hányféleképpen ülhetnek le, ha a négy fiú azt kérte, hogy mindegyikük közvetlenül két lány között ülhessen? (4 pont)

8. Adott a NoSelejt cég által gyártott valamely termék $K(x) = x^3 - 12x^2 + 48x$ költségfüggvénye és a $B(x) = 300x$ bevétel-függvénye, ahol x az előállított mennyiséget jelenti (száz darabban), míg a $K(x)$ és a $B(x)$ értékei millió forintban értendők. A nyereséget a bevételek és a költségek különbsége adja.

a) Határozzuk meg azt a termékmennyiséget, amely esetén a cég nyeresége maximális. (5 pont)

b) Határozzuk meg a $K(x)$ függvény grafikonja és a grafikon $x = 3$ abszcisszájú pontjához tartozó érintő által határolt korlátos, zárt síkidom területének mérőszámát. (9 pont)

c) Adjunk példát olyan egyváltozós valós f függvényre (ha létezik), amely differenciálható a valós számok halmazán, és $f'(3) = 0$, de az $x = 3$ nem szélsőérték helye f -nek. (2 pont)

9. Peches Pál nagyon szereti a kaparós sorsjegyeket. Kedvence a Lutri sorsjegy, melynek ára 500 Ft, és a sorsjegyek 25%-a nyerő. Pálnak (most csak) négy darab 500 forintos van. Bemegy egy lottózóba, és elhatározza, hogy addig vásárolja kedvenc sorsjegyét, amíg nem nyer, vagy ameddig a pénze el nem fogy.

a) Határozzuk meg a Pál által a sorsjegy(ek)re elköltött 500 forintosok számának várható értékét és szórását. (7 pont)

Pál háromféle tömegközlekedési eszközzel tudja munkahelyét megközelíteni, és pedig busszal, metróval, illetve villamossal, ezért (is) kombinált bérlettel rendelkezik. Az esetek 25%-ában busszal megy, a metrót pedig négyszer olyan gyakran használja, mint a villamost. A buszon átlagosan minden negyedik, a villamoson átlagosan minden tizedik alkalommal ellenőrzik a bérletét, míg annak a valószínűsége, hogy a metróon kap ellenőrzést, 0,85.

b) Egyik alkalommal ellenőrizték a bérletét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy villamossal utazott? (6 pont)

Egyik nap (a munkanap végén) Pál egy ötfős baráti társaság tagjaként busszal utazott haza. Az egyik megállóban ellenőrök szálltak fel, és a buszon (aktuálisan) tartózkodó 48 utasból taláalomra kiválasztott tíz embernek a bérletét (vagy jegyét) ellenőrizték.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ötfős baráti társaságból legalább két főt ellenőriztek? (3 pont)

Marczis György (Gyula)

Molnár István (Gyula)

Molnár Judit (Gyula)

Róké Rózsa Anikó (Békéscsaba)

Megoldásvázlatok a 2022/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. Három pénzváltó vállalkozás aktuális forint-euró árfolyamait ismerjük:

	Vétel	Eladás	Illeték
Első	348,50	352,90	nincs
Második	351,00	352,00	a tranzakció összegének 0,3%-a, de maximum 1500 Ft
Harmadik	350,00	352,50	400 Ft

A vételi árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért vesz meg az ügyféltől 1 eurót. Az eladási árfolyam adja meg, hogy a valutaváltó hány Ft-ért ad el az ügyfélnek 1 eurót. Végül az illeték adja meg, hogy minden egyes pénzváltási tranzakció után mekkora díjat kell pluszban kifizetni.