Jelentés a 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 8-án 14 órai kezdettel rendezte meg. A következő nyolc helyszínen írták meg a versenydolgozatot a résztvevők: Budapest, Debrecen, Győr, Kecskemét, Miskolc (két helyszínen), Pécs és Szeged.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Harangi Viktor, Kós Géza, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság szeptember 1-jei ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *A síkbeli derékszögű koordinátarendszer $P_i=(a_i,b_i)$ $(i=0,1,2)$ pontjai által alkotott háromszögnek az $O=(0,0)$ origó belső pontja. Mutassuk meg, hogy a P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 háromszögek területei (ebben a sorrendben) akkor és csak akkor alkotnak mértani sorozatot, ha az*

$$a_0x^2+a_1x+a_2=b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

egyenletrendszernek van valós x megoldása.

2. *Csodaország n városa között n légitársaság üzemeltet járatokat. Minden egyes légitársasághoz páratlan sok város tartozik, mondjuk $v_1,v_2,\ldots,v_i$, amelyek között körjáratot üzemeltet mindkét irányban: a v_jv_{j+1}, illetve a $v_{j+1}v_j$ járatokra lehet jegyet váltani $1\leqslant j\leqslant i$ esetén, ahol $v_{i+1}=v_1$. Igazoljuk, hogy található páratlan sok város, mondjuk $u_1,u_2,\ldots,u_k$ úgy, hogy az $u_1u_2,u_2u_3,\ldots,u_{k-1}u_k,u_ku_1$ járatokra lehet jegyet váltani csupa különböző légitársaságnál.*

3. *Adott az $A_1B_3A_2B_1A_3B_2$ húrhatszög, amelynek A_1B_1, A_2B_2 és A_3B_3 átlói egy ponton mennek át. Minden $i=1,2,3$ esetén az A_iB_i és az $A_{i+1}A_{i+2}$ átlók metszéspontja C_i, továbbá D_i olyan, a B_i-től különböző pont a hatszög köré írt körön, amelyre a $B_iC_iD_i$ kör érinti az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenest.* (*A pontokat modulo* 3 *számozzuk, tehát $A_4=A_1$ és $A_5=A_2$.*) *Igazoljuk, hogy az A_1D_1, A_2D_2 és A_3D_3 szakaszok egy ponton mennek át.*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, november 16-ai ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a 78 regisztrált versenyző közül 73-an vettek részt a versenyen, és tőlük összesen 64 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen az első feladatot 21-en, a második feladatot 5-en, a harmadik feladatot pedig 3-an oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen. Bár mindegyik feladatra születtek helyes megoldások, két feladatnál többet egyetlen versenyző sem oldott meg, így a versenybizottság idén nem ad ki I. díjat.

Egy versenyző helyesen oldotta meg az első és a harmadik feladatot. Ezért

II. díjban és 50 000 Ft pénzjutalomban részesül

Seres-Szabó Márton, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Ádám Réka* és *Fazakas Tünde*).

III. díjban és 40 000 Ft pénzjutalomban részesül

Fleiner Zsigmond, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Hujter Bálint, Gyenes Zoltán, Dobos Sándor* és *Juhász Péter*), aki javítható hibától eltekintve helyesen oldotta meg az első feladatot és kis hiányossággal oldotta meg a második feladatot,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*), aki lényegében helyesen oldotta meg az első feladatot és helyes megoldást adott a második feladatra.

Dicséretben és 20 000 Ft pénzjutalomban részesül

Csaplár Viktor, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója (tanárai *Fazakas Tünde* és *Kocsis Szilveszter*), aki apró hiányosságtól eltekintve helyesen oldotta meg az első feladatot és részeredményeket ért el a harmadik feladatban.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.”

A 2021. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *A síkbeli derékszögű koordinátarendszer $P_i=(a_i,b_i)$ $(i=0,1,2)$ pontjai által alkotott háromszögnek az $O=(0,0)$ origó belső pontja. Mutassuk meg, hogy a P_0OP_1, P_0OP_2, P_1OP_2 háromszögek területei (ebben a sorrendben) akkor és csak akkor alkotnak mértani sorozatot, ha az*

$$a_0x^2+a_1x+a_2=b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

egyenletrendszernek van valós x megoldása.

1. megoldás. Legyenek t_2, t_1, t_0 a feladatbeli területek (ezeket pozitív számoknak tekintjük a háromszögek körüljárási irányától függetlenül). Legyen $\mathbf{v}_i=(a_i,b_i)$. A $t_0\mathbf{v}_0+t_1\mathbf{v}_1+t_2\mathbf{v}_2$ vektor mindegyik $\mathbf{v}_i$-vel párhuzamos (pl. $\mathbf{v}_0$-lal azért, mert a $\mathbf{v}_1$ és $\mathbf{v}_2$ vektorok $\mathbf{v}_0$-ra merőleges komponensének aránya a $-t_2:t_1$ aránnyal egyezik meg), ezért nullvektor.

Vegyük észre, hogy a feladatbeli egyenletrendszer ekvivalens az $x^2\mathbf{v}_0+x\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2=\mathbf{0}$ vektoregyenlettel. Ha t_2, t_1, t_0 mértani sorozat, akkor a kvóciens meg-