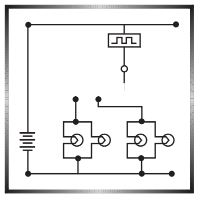
A feladatok teljes szövege, a válaszlapok a helyes megoldással és a pontozási útmutató is megtalálható a verseny fentebb megadott honlapján (angolul).

Vankó Péter

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 741. *Tegyük fel, hogy a hóbortos ötleteiről ismert multimilliárdos,* Elon Musk *úgy akarja közvetlenül meghatározni a Föld körül geostacionárius pályán keringő műholdak számát, hogy ugyanennek a pályának a közvetlen közelébe juttat egy számláló műholdat, amely nem nyugatról keletre, hanem éppen ellenkezőleg, keletről nyugatra halad. Mennyi idő alatt számolja meg ez a műhold az összes, a Földhöz viszonyítva álló műholdat?*

(*3 pont*)

Megoldás. A geostacionárius pályán haladó műholdak a Földhöz képest egyhelyben állnak, egy teljes kört 24 óra alatt tesznek meg. Egy adott magasságban jól meghatározott (kiszámítható) sebességgel kell haladnia egy műholdnak, hogy a körmozgásához szükséges erő éppen egyenlő legyen a gravitációs erővel. Az adott magassághoz tartozó sebesség nagyságát nem befolyásolja az, hogy melyik irányba halad a műhold, így a számláló műholdnak is ugyanakkora sebességgel kell haladnia, mint a többi műholdnak, vagyis a „fordulatszáma" $\frac{1}{24}$ fordulat/óra.

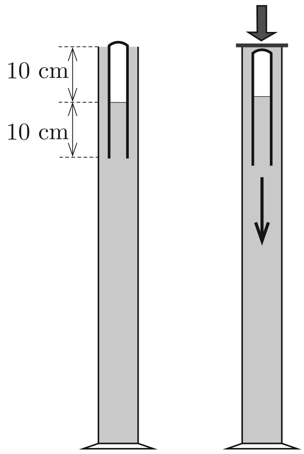
Mivel a műholdak a Földhöz képest álló helyzetben vannak, a számláló műholdnak (a Földről nézve) egy teljes kört kell megtennie ezen a pályán, hogy minden műholddal találkozzon. (Az egyes műholdak ugyanakkora sebességgel haladnak, nem előzik le egymást, így ha a számláló műhold az első műholdhoz visszaér, akkor mindegyik mellett elment már egyszer.) Mivel a Föld az egyik irányba tesz meg $\frac{1}{24}$ fordulatot óránként, míg a számláló műhold ugyanennyit a másik irányba, így a relatív fordulatszámuk

$$\frac{1}{24} - \left(-\frac{1}{24}\right) = \frac{1}{12}$$

fordulat óránként. A számláló műholdnak (a Földhöz képest) 1 teljes fordulatot kell megtennie, és ehhez 12 órára van szüksége, tehát 12 óra alatt számolhatja meg az összes geostacionárius műholdat.

Marozsi Lenke Sára (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

30 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Hiányos (1 pont) 2, hibás 1 dolgozat.



G. 748. *Egy magas, vízzel telt mérőhengerbe szájával lefelé fordított,* 20 cm *hosszú kémcsövet (Cartesius-búvárt) helyezünk úgy, hogy a kémcső felső felében levegő, alsó felében pedig víz legyen. Ekkor a kémcső úszik, zárt, felső vége kissé kiemelkedik a mérőhengerben lévő vízből. A mérőhenger tetejét gumilappal zárjuk le, majd akkora erővel nyomjuk lefelé a gumilapot, hogy ennek hatására a kémcsőben lévő levegő nyomása* 5 kPa*-lal megnő. Ebben a pillanatban a „búvár” elindul lefelé.*

a) A „búvár” elmerülésének a kezdetén mekkora volt a kémcsőbe zárt levegőoszlop magassága?

b) Legalább milyen magas a mérőhenger, ha a „búvár” lent marad akkor is, amikor eltávolítjuk a gumilapot a mérőhenger tetejéről?

(*4 pont*)

Megoldás. Kezdetben a levegő–víz határfelület a „búvárban” a mérőhenger vízszintje alatt 10 cm-rel van, és mivel 10 cm magas vízoszlop hidrosztatikai nyomása 1 kPa, ezért a bezárt levegő kezdeti nyomása 101 kPa. (Feltételezzük, hogy a külső légnyomás $p_0 = 100$ kPa.)

a) Az 5 kPa-nyi nyomásnövekedés közben a „búvárba” bezárt levegő izotermikusan összenyomódik, így a Boyle–Mariotte-törvény szerint a levegő térfogatával arányos hossza:

$$\ell_1 = \ell_0 \frac{p_1}{p_0} = 10\ \text{cm}\,\frac{101\ \text{kPa}}{106\ \text{kPa}} = 9{,}53\ \text{cm} \approx 9{,}5\ \text{cm}.$$

A Cartesius-búvár elmerülésének kezdetén tehát 9,5 cm volt a kémcsőbe bezárt levegőoszlop hossza.

b) A „búvár” akkor marad lenn a mérőhenger fenekén, ha a kémcsőben lévő levegőoszlop hossza legfeljebb 9,5 cm, tehát a bezárt levegő nyomása legalább 106 kPa. Ez akkor teljesül, ha a kémcsőben a vízszint legalább 60 cm-rel mélyebben van a mérőhenger tetejénél. A kémcső vízzel teli részének hossza 20 cm − 9,5 cm = = 10,5 cm, a mérőhenger magassága tehát

$$H \geqslant 60\ \text{cm} + 10{,}5\ \text{cm} = 70{,}5\ \text{cm}.$$

Vágó Botond (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 9. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (2 pont) 3, hibás 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

Áprilisi pótfeladat.* *Egy függőleges falú medence a csap kinyitása után T idő múlva telik meg. Ezt a vízmennyiséget a lefolyónyílás megnyitása után $2T$ idő alatt lehet leereszteni. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha nyitott lefolyónyílás mellett szeretnénk a medencét a csap megnyitásával feltölteni?*

Közli: *Radnai Márton,* Budapest

Megoldás. Jelöljük x-szel azt az arányt, amely megmutatja, hogy a medence a teljes magasságának hányad részéig van vízzel töltve.

Feltöltéskor x időben egyenletesen növekszik, és mivel T idő alatt éri el az $x = 1$ értéket,

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}} = \frac{1}{T}.$$

Kifolyáskor a kiáramlási sebesség – és ezzel arányosan x egységnyi idő alatti csökkenése – a Torricelli-törvény szerint a vízszint magasságának (tehát x-nek is) a négyzetgyökével arányos:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}} = -K\sqrt{x}\,.$$

A K arányossági tényezőt úgy kell megválasztani, hogy x éppen $2T$ idő alatt csökkenjen le 1-ről 0-ra.

Mivel a kiáramlást leíró egyenlet ugyanolyan alakú, mint egy nulla kezdősebességgel induló, állandó a gyorsulású mozgásnál a sebesség és az elmozdulás közötti $v = \sqrt{2ax}$ összefüggés, megállapíthatjuk, hogy a folyadékszint is időben egyenletesen változó sebességgel csökken le nullára.

A kezdeti csökkenési ütem K, a végső nulla, átlagosan tehát $K/2$-vel egyenlő x csökkenésének sebessége. Ez az átlagos csökkenési idő kifejezhető a teljes kiürülési idővel:

$$\frac{K}{2} = \frac{1}{2T}.$$

Ha a töltőcsap is és a lefolyó is nyitva van, akkor a töltésből és a kiürülésből adódó változási sebességek összegződnek:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}} + \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}} = \frac{1-\sqrt{x}}{T}.$$

Látjuk, hogy minél jobban megközelíti x az 1 értéket, annál lassabbá válik a vízszint emelkedése. Kérdés, hogy mikor éri el (ha egyáltalán eléri) x az 1-et.

*Ez a – pontversenyen kívüli – feladat a KöMaL 2021. áprilisi számában jelent meg.

Tegyük fel, hogy bizonyos t_0 idő alatt a medence már majdnem megtelt, vagyis az $x(t) \equiv 1 - \varepsilon(t)$ jelölést használva $\varepsilon(t_0) \ll 1$. A tartályból még hiányzó ε hányad csökkenési sebessége:

$$\frac{\Delta\varepsilon(t)}{\Delta t} = -\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{1}{T}\left(1 - \sqrt{x}\right) = -\frac{1}{T}\left(1 - \sqrt{1 - \varepsilon(t)}\right) \approx -\frac{1}{2T}\varepsilon(t).$$

Ez az egyenlet éppen olyan, mint az $1/(2T)$ bomlási állandójú radioaktív bomlás egyenlete, amelynek a megoldása

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)/(2T)}.$$

Innen leolvasható, hogy bármilyen hosszú ideig is várunk, a medence *sosem telik meg* teljesen. Másképpen megfogalmazva: a medence hosszú idő után *gyakorlatilag* teljesen tele lesz, miközben ugyanannyi víz folyik bele, mint amennyi távozik, hiszen $x = 1$ esetében lesz a kifolyási és a beömlési sebességek nagysága egyenlő.

P. 5313. *Egy protonnyalábot álló céltárgyra ejtünk. Ha a nyalábban lévő protonok mozgási energiája nagyobb egy kritikus* E_{krit} *értéknél, akkor a beeső protonok a céltárgyban lévő, nyugvónak tekinthető protonokkal ütközve pozitív pionokat* (π^+) *kelthetnek az alábbi módon:*

$$\mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ \Rightarrow \mathrm{p}^+ + \mathrm{n}^0 + \pi^+.$$

Határozzuk meg E_{krit} *értékét* MeV *egységekben!*

Felhasználható adatok: a proton nyugalmi energiája 938,27 MeV, *a neutron nyugalmi energiája* 939,57 MeV, *a pion nyugalmi energiája* 139,57 MeV.

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. A folyamatot leírásánál nyilván a relativisztikus kinematika és dinamika összefüggéseit kell alkalmaznunk. Felhasználjuk, hogy egy m_0 nyugalmi tömegű, v sebességgel mozgó részecske összes energiája

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

a mozgási energiája pedig

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2,$$

ahol c a vákuumbeli fénysebesség. Szükségünk lesz még a relativisztikus sebességösszeadás képletére is:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},$$

ahol u a részecske sebessége az egyik, u' pedig egy másik, az előzőhöz képest v relatív sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben.

Vizsgáljuk a folyamatot a két proton tömegközéppontjának vonatkoztatási rendszeréből. Ebben a rendszerben a két proton ugyanakkora sebességgel közeledik egymáshoz, a kezdeti lendületük tehát 0. A lendületmegmaradás törvénye szerint reakció után is nulla lesz a három részecske összes lendülete.

A reakció után a három részecske összenergiája akkor lesz a legkisebb, ha mindhárom részecske (jó közelítéssel) áll, ilyenkor az energiájuk összege a nyugalmi energiák összege lesz. Legyen az ütköző protonok sebessége a tömegközépponti rendszerben v, a részecskék megadott *nyugalmi* energiáját pedig jelöljük rendre E_p-vel, E_n-nel éa E_π-vel. A folyamat energiamérlege:

$$\frac{2E_\mathrm{p}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=E_\mathrm{p}+E_\mathrm{n}+E_\pi.$$

Négyzetre emelés és rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{2E_\mathrm{p}}{E_\mathrm{p}+E_\mathrm{n}+E_\pi}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot 938{,}27}{938{,}27+939{,}57+139{,}57}\right)^2}=0{,}367.$$

A proton kritikus (a pionkeltéshez szükséges legkisebb) sebessége tehát a tömegközépponti rendszerben $v=0{,}367\,c$. Számoljuk ki, hogy mekkora v_krit sebességnek felel meg ez (a tömegközépponthoz képest v sebességgel mozgó) laboratórium vonatkoztatási rendszerében. A kritikus esetben

$$v_\mathrm{krit}=\frac{v+v}{1+\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2\cdot 0{,}367}{1+0{,}367^2}c=0{,}647\,c.$$

A nyalábban mozgó protonok kritikus mozgási energiája tehát

$$v_\mathrm{krit}=\frac{E_\mathrm{p}}{\sqrt{1-(v_\mathrm{krit}/c)^2}}-E_\mathrm{p}=\frac{938{,}27\ \mathrm{MeV}}{\sqrt{1-0{,}647^2}}-938{,}27\ \mathrm{MeV}\approx 292{,}3\ \mathrm{MeV}.$$

(Ilyen sebességre a kezdetben állónak tekinthető protonokat 292,3 millió volt feszültséggel lehet felgyorsítani.)

Mihalik Bálint (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes Koleszár Benedek, Ludányi Levente, Mihalik Bálint, Mócza Tamás István, Somlán Gellért, Téglás Panna és Tóth Ábel megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 4 dolgozat.

P. 5322. *Egy digitális fényképezőgép téglalap alakú szenzorának mérete:* $23{,}5\ \mathrm{mm}\times 15{,}6\ \mathrm{mm}$, *és ez a szenzor* 6045×4003 *képpontot képes rögzíteni. Oldalról,* 20 méter *távolságból lefényképezünk a géppel egy* 40 km/h *sebességgel haladó motorcsónakot.*

Mekkorának válasszuk a 35 mm gyújtótávolságú objektívvel felszerelt fényképezőgép expozíciós idejét, ha nem szeretnénk, hogy a motorcsónak képe „bemozduljon” (életlenné váljon)?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A kép akkor válik életlenné, ha a motorcsónaknak a szenzoron keletkező képe az expozíciós idő alatt nagyobb távolságot tesz meg, mint két szomszédos képpont távolsága.

A szenzor nagyobbik mérete 23,5 mm, és ez 6054 képpontnak felel meg, tehát a szomszédos képpontok távolsága

$$K_0 = \frac{23{,}5\ \text{mm}}{6054} = 3{,}89 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}.$$

(Ugyanezt az értéket kapjuk, ha a szenzor kisebbik méretét osztjuk 4003-mal.)

Az expozíció t ideje alatt a motorcsónak $T = vt$ távolsággal mozdul el, ahol

$$v = 40\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{40\,000}{3{,}6}\ \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

A leképezés olyan, mintha egy $\ell = 20\ \text{m} = 2 \cdot 10^4$ mm távol lévő, T nagyságú tárgyat fényképeznénk le, és azt szeretnénk elérni, hogy az objektívtől $k = 35$ mm távolságban (gyakorlatilag a fókuszsíkban) keletkező kép K mérete ne legyen nagyobb K_0-nál. Az ℓ tárgytávolság, a $k \approx f$ képtávolság, a T tárgyméret és a K képméret között fennálló összefüggés:

$$\frac{T}{K} = \frac{\ell}{k}, \qquad \text{vagyis} \qquad K = T\frac{k}{\ell} = \frac{vtk}{\ell} \leqslant K_0.$$

Ennek megfelelően az expozíciós idő:

$$t \leqslant \frac{\ell K_0}{vk} = \frac{20\,000\ \text{mm} \cdot 3{,}6 \cdot 3{,}89 \cdot 10^{-3}\ \text{mm}}{40\,000\ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \cdot 35\ \text{mm}} = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{s},$$

azaz legfeljebb 0,2 ms lehet.

Haubner Henrik (Győr, Révai M. Gimn., 10. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes Hauber Henrik, Ludányi Levente, Mócza Tamás István és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 5 dolgozat.

P. 5325. *Egy kamrában hosszú ideje működik egy fagyasztóláda. A hőmérséklet a ládán belül* $-20\ ^\circ\text{C}$*, a kamrában* $25\ ^\circ\text{C}$*, a kamrán kívül, a lakás többi részén pedig* $20\ ^\circ\text{C}$ *van. Mekkora lesz hosszú idő után a kamrában a hőmérséklet, ha még egy ugyanilyen fagyasztóládát bekapcsolunk?*

Feltehetjük, hogy a lakás hőmérséklete a kamrán kívül nem változik. A hűtőládákat tekintsük ideális Carnot-gépeknek, amelyek termosztátja úgy van beállítva, hogy belül fenntartja a $-20\ ^\circ\text{C}$*-os hőmérsékletet.*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. Ismert adatok:
– a hűtőláda (fagyasztóláda) belső hőmérséklete: $T_{\text{hűtő}} = -20\ ^\circ\text{C} = 253\ \text{K}$,
– a kamra hőmérséklete: $T_{\text{kamra}} = 25\ ^\circ\text{C} = 298\ \text{K}$,
– a lakás hőmérséklete: $T_{\text{lakás}} = 20\ ^\circ\text{C} = 293\ \text{K}$.

A hűtőgép a hűtőláda $T_{\text{hűtő}}$ hőmérsékletű belsejéből időegységenként Q_{fel} hőt vesz fel és a T_{kamra} hőmérsékletű kamrának Q_{le} hőt ad le. $Q_{\text{le}} > Q_{\text{fel}}$, a különbözetet a hűtőgép

$$W = Q_{\text{le}} - Q_{\text{fel}}$$

munkája (áramfogyasztása) fedezi. A kamrába időegységenként bevitt energia éppen ezzel a munkával egyenlő:

$$Q_{\text{be}} = W.$$

Ha a hűtőládát ideális Carnot-gépnek tekintjük, akkor

$$\frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{T_{\text{kamra}}}{T_{\text{hűtő}}}, \tag{1}$$

vagyis a gép

$$Q_{\text{le}} = Q_{\text{fel}} \frac{T_{\text{kamra}}}{T_{\text{hűtő}}}$$

hőt ad le időegységenként.

A hűtőláda hideg belsejébe a melegebb kamrából folyamatosan hő szivárog be. A Newton-féle hővezetési törvény szerint az időegységenként átadott hő a hőmérséklet-különbséggel és a hővezető felület nagyságával arányos. Állandósult (stacionárius) állapotban a hővezetéssel átadott hő éppen megegyezik a hűtőgép által a ládából felvett hővel:

$$Q_{\text{fel}} = k_{\text{hűtő}}(T_{\text{kamra}} - T_{\text{hűtő}}), \tag{2}$$

ahol $k_{\text{hűtő}}$ a hűtőláda falának anyagára jellemző állandó, amely arányos a láda felületének nagyságával (több egyforma fagyasztóláda esetén a berendezések számával).

A kamrából – ugyancsak hővezetéssel – hő adódik át a kamránál hidegebb lakásnak. Az időegységenként kiáramló hő arányos a kamra és a lakás hőmérséklet-különbségével:

$$Q_{\text{ki}} = k_{\text{fal}}(T_{\text{kamra}} - T_{\text{lakás}}), \tag{3}$$

ahol k_{fal} a kamra és a lakás közötti fal anyagától és felületének nagyságától függő állandó.

$Q_{\text{be}} > Q_{\text{ki}}$ esetén a kamra hőmérséklete folyamatosan emelkedne, $Q_{\text{be}} < Q_{\text{ki}}$ esetén pedig a kamra egyre hidegebb lenne. Egyensúlyi (stacionárius) állapot akkor alakul ki a kamrában, ha

$$Q_{\text{be}} = Q_{\text{ki}}. \tag{4}$$

Tudjuk, hogy

$$Q_{\mathrm{be}} = Q_{\mathrm{le}} - Q_{\mathrm{fel}} = Q_{\mathrm{fel}} \left(\frac{Q_{\mathrm{le}}}{Q_{\mathrm{fel}}} - 1 \right),$$

ami (1) és (2) felhasználásával így is felírható:

$$Q_{\mathrm{be}} = k_{\mathrm{hűtő}} \frac{\left(T_{\mathrm{kamra}} - T_{\mathrm{hűtő}}\right)^2}{T_{\mathrm{hűtő}}}. \tag{5}$$

A (3) és (5) kifejezéseket (4)-be helyettesítve megkapjuk a kamra állandó hőmérsékletének feltételét:

$$\frac{k_{\mathrm{fal}}}{k_{\mathrm{hűtő}}} = \frac{\left(T_{\mathrm{kamra}} - T_{\mathrm{hűtő}}\right)^2}{T_{\mathrm{hűtő}}\left(T_{\mathrm{kamra}} - T_{\mathrm{lakás}}\right)}. \tag{6}$$

Az ismert adatokat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{k_{\mathrm{fal}}}{k_{\mathrm{hűtő}}} = \frac{(298 - 253)^2}{253\,(298 - 293)} = 1{,}60.$$

Mi történik, ha egy második fagyasztóládát is bekapcsolunk? A hővezetési tényezők közül k_{fal} nyilván változatlan marad, de $k_{\mathrm{hűtő}}$ az eredeti érték kétszeresére nő. A kialakuló stacionárius állapot egyenlete tehát (6)-nak megfelelően

$$\frac{(x - 253)^2}{253\,(x - 293)} = 0{,}80, \tag{7}$$

ahol x a kamra új (kelvinben kifejezett) hőmérséklete.

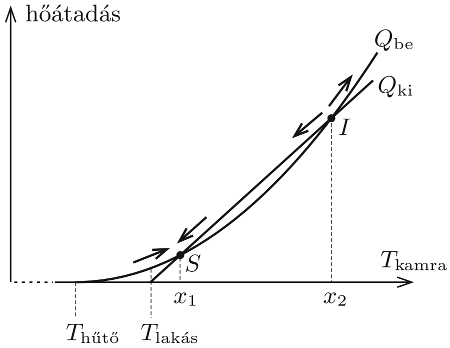
A másodfokú egyenletté alakítható (7) gyökei:

$$x_1 = 308\ \mathrm{K} \approx 35\ {}^\circ\mathrm{C}, \qquad \text{illetve} \qquad x_2 = 401\ \mathrm{K} \approx 127\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

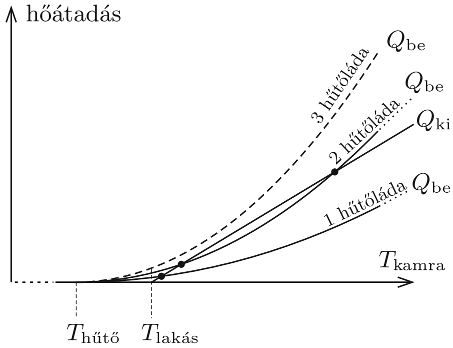
Az, hogy két megoldás is lehet, már (3)-ból és (5)-ből is látszik, hiszen a kamrába beáramló hő $T_{\mathrm{kamra}} = x$ függvényében egy felfelé nyitott parabola egyenlete, a kiáramló hő pedig x lineáris függvénye. Az *1. ábra* ezt a két függvényt ábrázolja (nem méretarányosan). A parabola és az egyenes S és I metszéspontja jelöli ki azokat a hőmérsékleteket, amelyeknél a kamrába beáramló és az onnan kiáramló hő éppen megegyezik.

A kisebb hőmérséklethez tartozó (S) metszéspont *stabil* állapotnak felel meg, hiszen x_1-nél kicsit magasabb hőmérsékleten $Q_{\mathrm{ki}} > Q_{\mathrm{be}}$, tehát a kamra hűlni kezd, x_1-nél kicsit alacsonyabb hőmérsékleten pedig éppen fordított a helyzet: $Q_{\mathrm{be}} > Q_{\mathrm{ki}}$, tehát a kamra melegedni fog.

A magasabb hőmérséklethez tartozó (I) metszéspont viszont *instabil* állapotot ad meg. $T_{\mathrm{kamra}} = x_2$ esetén a kamrába be- és kiáramló hő éppen megegyezik, de ha bármilyen ok miatt egy kicsit eltér a hőmérséklet az egyensúlyi értéktől, az eltérés tovább növekszik, és a kamra hőmérséklete vagy x_1-ig csökken, vagy „korlátlanul”



1. ábra



2. ábra

növekszik. (A korlátlan felmelegedésnek a valóságban a hűtőgép korlátozott teljesítménye szab határt; ezt a teljesítményhatárt elérve a gép már nem tudja biztosítani a fagyasztóláda állandó, -20 °C-os hőmérsékletét.)

A második hűtőgép bekapcsolása után (elegendően hosszú idő elteltével) a kamra hőmérséklete 25 °C-ról 35 °C-ra emelkedik, és – normál körülmények között – ennyi is marad (*2. ábra*). Az ábráról azt is leolvashatjuk, hogy egy esetlegesen bekapcsolt harmadik hűtőláda esetén (szaggatott vonal) a kamrába bevitt hő mindig nagyobb, mint az onnan elvezetett hő, tehát nem alakulhat ki állandósult hőmérséklet.

Kertész Balázs (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 11. évf.) és
Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata felhasználásával

8 dolgozat érkezett. Helyes Hauber Henrik, Kertész Balázs, Ludányi Levente, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–3 pont) 3 dolgozat.

P. 5326. *Egy ismeretlen magasságú toronyból elejtünk egy testet, amely szabadon esik. A közegellenállástól eltekintünk.*

a) A torony magasságát gondolatban osszuk két egyenlő részre. Határozzuk meg a két egyenlő szakaszon számított átlagsebességek arányát!

b) Hogyan osszuk fel két részre a $h=45$ méteres torony magasságát, hogy a második szakaszon számított átlagsebesség négyszerese legyen az első szakaszon számított átlagsebességnek?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) Legyen a torony magassága h. A test az első szakaszon $\frac{h}{2}$ utat tesz meg t_1 idő alatt:

$$\frac{h}{2}=\frac{g}{2}t_1^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad t_1=\sqrt{\frac{h}{g}}\,.$$

Számoljuk ki az esés teljes idejét:

$$h=\frac{g}{2}\,t_{\text{összes}}^2,\qquad \text{tehát}\qquad t_{\text{összes}}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

A második szakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_2=t_{\text{összes}}-t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{h}{g}}\,.$$

Az átlagsebességek aránya:

$$\frac{\overline{v}_1}{\overline{v}_2}=\frac{\frac{(h/2)}{t_1}}{\frac{(h/2)}{t_2}}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{h}{g}}}{\sqrt{\frac{h}{g}}}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41.$$

(Látható, hogy az eredmény sem h-tól, sem g-től *nem* függ.)

b) Legyen az első szakasz hossza x, ekkor a második szakasz hossza $h-x$. Az első szakasz megtételéhez szükséges idő

$$t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

a teljes esési idő

$$t_{\text{összes}}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

a második szakasz megtételéhez tehát

$$t_2=t_{\text{összes}}-t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

időre van szükség.

Az átlagsebességek aránya ebben az esetben

$$\frac{\overline{v}_1}{\overline{v}_2}=\frac{\frac{x}{t_1}}{\frac{h-x}{t_2}}=\frac{x\cdot t_2}{(h-x)\cdot t_1}=\frac{x\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{2x}{g}}\right)}{(h-x)\sqrt{\frac{2x}{g}}}=\frac{x\left(\sqrt{h}-\sqrt{x}\right)}{(h-x)\sqrt{x}},$$

vagyis a megadott aránynak megfelelően

$$\frac{x\left(\sqrt{h}-\sqrt{x}\right)}{(h-x)\sqrt{x}}=\frac{1}{4}.$$

Mivel x sem nulla, sem h nem lehet, a fenti törtet egyszerűsíthetjük $\sqrt{x}$-szel és $\left(\sqrt{h}-\sqrt{x}\right)$-szel:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{4},$$

ahonnan $3\sqrt{x}=\sqrt{h}$, azaz

$$x=\frac{h}{9}=5\ \mathrm{m}.$$

(Ez az eredmény is független g-től.)

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 2, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5328. *Satuba fogunk vízszintesen egy könnyű, hosszú acélpálcát. A végére egy nehezéket erősítünk, ami a pálca végét* 1 cm*-rel nyomja le annak eredeti helyzetéhez képest. Ha kis kitérésű rezgésbe hozzuk, mennyi lesz a rezgésideje?*

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. Amikor az acélpálca $s=1$ cm-t lehajlik és megáll, akkor a nehezékre ható nehézségi erő és a rugalmas erő eredője nulla:

$$mg=Ds,$$

ahol D a (rugónak tekinthető) pálca „rugóállandója”. Eszerint

$$D=\frac{mg}{s},$$

és a „rugó” végén rezgő test mozgásának periódusideje

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{s}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{10^{-2}\ \mathrm{m}}{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}}}\approx 0{,}20\ \mathrm{s}.$$

Kovács Kinga (Kecskemét, Katona J. Gimn., 10. évf.)

14 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás, kicsit hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

P. 5329. *Vízszintes táblán egy krétadarab nyugszik. A táblát meglökve, a tábla hirtelen vízszintes, v_0 nagyságú sebességet kap, majd T idő múlva egy falnak ütközve ugyanilyen hirtelen megáll. Milyen hosszú nyomot hagy a kréta a táblán, ha a kréta és a tábla közötti súrlódási együttható μ?*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

Megoldás. Legyen $\mathcal{K}$ a laborrendszer, $\mathcal{K}'$ pedig a laborrendszerhez képest a tábla meglökésének irányában v_0 sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszer. (Mindkét rendszer inerciarendszer, melyekben $\boldsymbol{v}_0$ irányát tekintjük pozitív iránynak.)

A hirtelen lökés utáni pillanatban a kréta $\mathcal{K}$-ból nézve még áll, a tábla pedig v_0 sebességgel mozog, $\mathcal{K}'$-ből nézve viszont a kréta mozog $-v_0$ sebességgel, és a tábla áll. A kréta gyorsulása (mindkét vonatkoztatási rendszerben) $+\mu g$.

A további vizsgálathoz két esetet kell megkülönböztetnünk:

(i) Ha $T > \frac{v_0}{\mu g}$, akkor a kréta $\mathcal{K}'$-ből nézve $t_1 = \frac{v_0}{\mu g} < T$ idő múlva megáll a mindvégig álló táblán, tehát azon

$$s_1 = \frac{-v_0}{2} t_1 = -\frac{v_0^2}{2\mu g}$$

hosszú nyomot hagy. (A negatív előjel arra utal, hogy a kréta elmozdulása a táblához képest $\boldsymbol{v}_0$-lal ellentétes irányú.) A továbbiakban, egészen a falnak ütközésig a kréta és a tábla sebessége $\mathcal{K}'$-ből nézve nulla, $\mathcal{K}$-ból nézve pedig mindkettő sebessége $+v_0$.

Az ütközéskor a tábla sebessége $\mathcal{K}$-ból nézve hirtelen nullára csökken, a kréta sebessége marad v_0. A kréta $t_2 = \frac{v_0}{\mu g} = t_1$ idő alatt lefékeződik, és az álló táblán

$$s_2 = \frac{v_0}{2} t_2 = +\frac{v_0^2}{2\mu g}$$

hosszú utat tesz meg. Látjuk, hogy $s_1 + s_2 = 0$, tehát a kréta a táblához képest az eredeti helyére kerül vissza, miközben

$$s = |s_1| = s_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

hosszúságú nyomot hagy azon. (A második nyom csak vastagítja az elsőt, de a hosszát nem növeli meg.)

(ii) Legyen most $T < \frac{v_0}{\mu g}$. Ekkor $\mathcal{K}'$-ből nézve a kréta sebessége az álló táblán

$$v' = -v_0 + \mu g T < 0$$

lesz a falnak ütközést megelőző pillanatban, és az átlagsebességből számolt elmozdulás

$$s_1 = \frac{-v_0 + v'}{2} = -v_0 T + \frac{\mu g T^2}{2} < 0.$$

A krétanyom hossza tehát a mozgás első szakaszában

$$|s_1| = v_0 T - \frac{\mu g T^2}{2}.$$

A falnak történő ütközést megelőző pillanatban $\mathcal{K}$-ból nézve a kréta sebessége $v = \mu g T$, és ugyanennyi marad közvetlenül az ütközés után is. A továbbiakban a kréta $-\mu g$ „gyorsulással” (lassulással) mozog, a megállásáig tehát

$$s_2 = \frac{v^2}{\mu g} = \frac{\mu g T^2}{2}$$

utat tesz meg. Mivel

$$s_1 + s_2 = (\mu g T - v_0) T < 0,$$

a kréta nem jut vissza a táblán az eredeti helyére, a második krétanyom rövidebb lesz, mint az első. A táblán látható nyom tehát ebben az esetben $|s_1|$.

Összefoglalva: a táblán hagyott krétanyom hossza

$$s = \begin{cases} \dfrac{v_0^2}{2\mu g}, & \text{ha } T > \dfrac{v_0}{\mu g}, \\ v_0 T - \dfrac{\mu g}{2} T^2, & \text{ha } T < \dfrac{v_0}{\mu g}. \end{cases}$$

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

17 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 5336. *Elég nagy kiterjedésű, széles, sík mező fölött* 2 km *magasan repül egy szuperszonikus vadászgép vízszintes irányban. A gép hangját a mezőn álló három, egymástól páronként* 14 km*-re lévő megfigyelő egyszerre hallja meg. A repülőgép éppen az egyik megfigyelő feje felett repül el. Mekkora a vadászgép sebessége?*

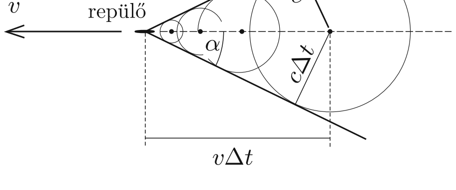
(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. Jelöljük a repülő sebességét v-vel, a hangsebességet pedig c-vel. ($c \approx 340$ m/s.) A vadászgép szuperszonikus, vagyis $v > c$. A $v/c = \mathrm{M}$ hányadost Mach-számnak nevezik (és néha Ma-val jelölik).

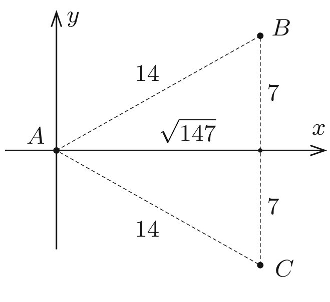
Egy hangforrás által $t = 0$ pillanatban kibocsátott hanghullám t idő elteltével a forrástól ct távolságra lévő pontokban halljuk meg. Ezek a pontok a térben egy ct sugarú gömbfelületen helyezkednek el. A v sebességgel mozgó hangforrás hangja $t = 0$ pillanatban olyan pontokba érkezik el, amelyek tetszőleges Δt idővel korábban indultak el. Ezek a hullámok $v\Delta t$ távolsággal ‚hátrábbról” indultak és $c\Delta t$ sugarú gömbfelületig jutottak el (*1. ábra*). Ezen gömbfelületek határa (burkolója) egy $\alpha = \arcsin\frac{c}{v}$ félnyílásszögű kúpfelület. Ezt a felületet Mach-kúpnak nevezik, amelyre

$$\sin\alpha = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

A vadászgép sebességének kiszámításához az α szöget kell meghatároznunk. Mivel a vadászgép a mező síkjával párhuzamosan repül, a három megfigyelőnek egy hiperbolán (a Mach-kúp síkmetszetén) kell elhelyezkednie. Válasszunk egy olyan



1. ábra



2. ábra

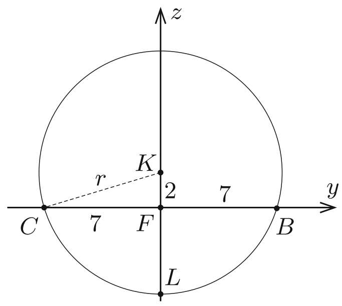
koordináta-rendszert, amelynek x tengelye a vadászgép sebességével párhuzamos, a $z=0$ sík a mező síkja. A koordináta-rendszer origója legyen annál az A megfigyelőnél, amelyiknek éppen a feje felett repült el a vadászgép. A másik két megfigyelő (B és C) az $x-z$ síkra szimmetrikusan helyezkedik el, koordinátáik a megadott (km-ben mért) távolságadatok szerint: $B\big(\sqrt{147},7,0\big)$, $C\big(\sqrt{147},-7,0\big)$. A három megfigyelő helyzetét az $x-y$ síkban a *2. ábra* mutatja.

Legyen B és C felezőpontja F. A Mach-kúpnak a tengelyére merőleges síkmetszetei körök. A B és C pontokra illeszkedő kör középpontja legyen K, a mező alatt legmélyebben található pontja pedig L. A *3. ábra* ezt a kört mutatja az $x=\sqrt{147}$ síkban. Innen leolvashatjuk, hogy a kör sugara

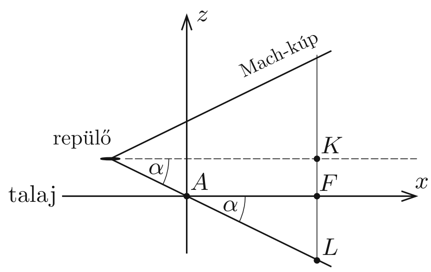
$$r=\sqrt{7^2+2^2}=\sqrt{53}\approx 7{,}28,$$

az L pont z koordinátája pedig

$$z_L=2-r\approx -5{,}28.$$



3. ábra



4. ábra

Ábrázoljuk most a három megfigyelő helyét, a repülő útvonalát és a Mach-kúpot az $x-z$ síkra vetítve (*4. ábra*). Az ábráról leolvashatjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{FL}{AF}=\frac{5{,}28}{\sqrt{147}}\approx 0{,}435, \qquad \text{tehát} \qquad \alpha=23{,}5^\circ.$$

Ezek szerint

$$\mathrm{M}=\frac{c}{v}=\frac{1}{\sin\alpha}=2{,}5,$$

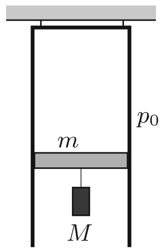
és így a vadászgép sebessége:

$$v=2{,}5\,c\approx 850\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

9 dolgozat érkezett. Helyes Kertész Balázs, Somlán Gellért, Téglás Panna, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–4 pont) 4 dolgozat.

P. 5342. *Függőleges helyzetben rögzített, felül zárt henger m tömegű dugattyúján egy M tömegű test függ. A hengerben lévő, kezdetben V térfogatú levegővel Q hőt közlünk. Kívül a légköri nyomás p_0.*



a) Mennyivel változik meg a gáz belső energiája?

b) Mennyi munkát végez a gáz? Ez a munka milyen energiaváltozásokkal jár együtt?

(A henger fala és a dugattyú hőszigetelő.)

(*4 pont*) *Tichy Géza* (1945–2021) feladata

Megoldás. *a*) A melegítési folyamat során a dugattyú minden pillanatban egyensúlyban van, így a hengerben lévő gáz (levegő) p_1 nyomása minden pillanatban ugyanakkora:

$$p_1A+(m+M)g=p_0A,$$

vagyis

$$p_1=p_0-\frac{(m+M)g}{A}.$$

Tegyük fel, hogy az m_0 tömegű bezárt levegő hőmérséklete T_1-ről T_2-re növekszik. Ekkor a közölt hő

$$Q=m_0c_p(T_2-T_1),$$

a belső energia megváltozása pedig

$$\Delta E_\text{b}=m_0c_V(T_2-T_1).$$

Látjuk, hogy

$$\frac{\Delta E_\text{b}}{Q}=\frac{c_V}{c_p}=\frac{5}{7},$$

vagyis

$$\Delta E_\text{b}=\frac{5}{7}\,Q.$$

Kihasználtuk, hogy a levegő $f=5$ szabadsági fokú molekulákból áll, így a fajhőhányados

$$\frac{c_p}{c_V}=\frac{f+2}{f}=\frac{7}{5}.$$

b) Az I. főtétel alapján a gáz által végzett munka

$$W^*=Q-\Delta E_\text{b}=Q-\frac{5}{7}\,Q=\frac{2}{7}\,Q.$$

Ha h-val jelöljük a dugattyú lesüllyedését a melegítés során, akkor a gáz munkavégzése:

$$W^*=p_1Ah=\left(p_0-\frac{(m+M)g}{A}\right)Ah=p_0Ah-(m+M)gh.$$

Innen leolvashatjuk, hogy a gáz és a nehézségi erő végzett munkát a külső légnyomás ellen. A folyamatban a gáz belső energiája nőtt, az m tömegű dugattyú és a rá akasztott M tömegű test helyzeti energiája csökkent, a környezet (légkör) helyzeti energiája pedig ugyancsak növekedett.

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes Beke Bálint, Juhász Júlia, Schmercz Blanka és Somlán Gellért megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 10, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 408. Ütköztessük egymással befőttesüvegek különböző méretű csavaros fedeleit úgy, hogy az egyik áll, a másik pedig egyenesen ütközik vele. Határozzuk meg az ütközés rugalmasságának mértékét jellemző ütközési számot!

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

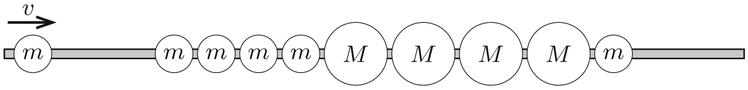
G. 757. Van egy pár kifordítható kesztyűm, mindkét darabja kívül fekete, belül fehér. Tudom-e ezeket felemás kesztyűként hordani?

(*3 pont*) Közli (2021. június): *Vladár Károly,* Kiskunhalas

G. 758. Egy személygépkocsi mögötti, nem túl messze lévő tárgyat egyszerre láthatjuk az autó két oldalsó, valamint a középső (belső) visszapillantó tükrében. Mindhárom tükör sík. Melyik tükörben látja a vezető a tárgy képét legnagyobbnak, illetve legkisebbnek? Másképp fogalmazva, hasonlítsuk össze a három kép látószögét!

(*3 pont*)

G. 759. Egy vízszintes, súrlódásmentes, rögzített pálcára felfűzve négy darab m tömegű, négy darab M tömegű ($m < M$), majd ismét egy m tömegű, tökéletesen rugalmas golyó áll közel egymáshoz az *ábrán* látható elrendezésben. Balról egy m tömegű, szintén tökéletesen rugalmas golyó érkezik v sebességgel, és ütközik a golyósor első tagjával.



A további ütközések lezajlása után mely golyók maradnak nyugalomban, és a többiek milyen irányban fognak mozogni?

(*4 pont*)