C. 1690. Az AB szakasz fölé rajzolt egységsugarú félkör középpontja O. Megrajzoljuk a félkör belsejébe a K középpontú, OB átmérőjű félkört, amelyet az A pontból induló félegyenes a C pontban érint. Az O pontból az AC-re bocsátott merőleges az AB átmérőjű félkörvonalat a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a BD szakasz felezőpontja C.

C. 1691. Határozzuk meg, mely p, q pozitív prímszámokra teljesül, hogy $p^5 - q^3 + (p+q)^4 = 9900$.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1692. Az $ABCD$ négyzet DA oldalának belső pontja P. A $PBC\sphericalangle$-et felező egyenes a CD oldalt a Q pontban metszi, a Q pontból a BP egyenesre bocsátott merőleges talppontja R. Határozzuk meg az AR és BQ egyenesek hajlásszögét.

C. 1693. Egy kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Bármely négy csúcsot ugyanakkora valószínűséggel választunk ki. Mekkora az esélye, hogy a négy csúcs tetraédert határoz meg? Mi a valószínűsége, hogy a négy pont egy szabályos tetraéder négy csúcsa?

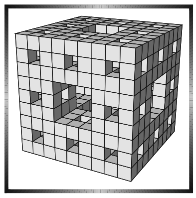
Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

❄

Beküldési határidő: 2021. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5198–5205.)

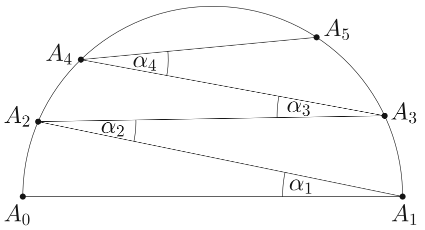


B. 5198. Ha az asztalom tetejére teszem a teknősömet, akkor a földön álló macskám fejéhez képest a teknős feje 70 cm-rel van feljebb. Ha a macskámat teszem az asztal tetejére, akkor a földön álló kutyám fejéhez képest 80 cm-rel lesz magasabban a macska feje. Ha pedig a kutyámat teszem az asztalra, akkor a földön álló teknőshöz képest 120 cm-rel lesz magasabban a kutya feje. Hány cm magas az asztalom?

(*3 pont*) *Kocsis Szilveszter* (Budapest) ötlete alapján

B. 5199. Egy sakktábla minden mezőjére egy érmét teszünk Fejjel felfelé. Megengedett lépés, hogy három közvetlenül egymás mellett lévő érmét egy sorban vagy egy oszlopban egyszerre megfordítsunk. El lehet-e érni azt, hogy minden érme Írással legyen felfelé?

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)



B. 5200. Az $A_0A_1 = 1$ átmérőjű félkörvonalon felvesszük az A_2 pontot úgy, hogy $A_0A_1A_2\sphericalangle = 1°$. Ezután a körvonal A_1A_2 ívén felvesszük az A_3 pontot úgy, hogy $A_1A_2A_3\sphericalangle = 2°$. Ezt folytatjuk a következők szerint: az A_{k+1} pontot a körvonal $A_{k-1}A_k$ ívén választjuk úgy, hogy $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ szög k fok ($k = 3, 4, \ldots, 9$). Milyen hosszú az A_9A_{10} szakasz? (Az *ábra* tájékoztató jellegű.)

(*3 pont*)

B. 5201. Legyenek az n pozitív egész szám pozitív osztói $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Határozzuk meg azokat az összetett n számokat, amelyekre d_1, $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3$, $\ldots$, $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$ számok mind osztói n-nek.

(*4 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5202. Két racionális számot *ismerősnek* nevezünk, ha van olyan p/q, illetve r/s alakjuk (p, q, r, s egészek), amelyekre $|ps - qr| = 1$. Hány közös ismerőse lehet két ismerős racionális számnak?

(*5 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5203. Az ABC háromszögben $AB > BC$, a beírt kör érintési pontjai a BC, CA és AB oldalakon rendre A_0, B_0 és C_0, továbbá az AC oldalhoz írt kör az AC oldalt a B_1 pontban érinti. Mutassuk meg, hogy az A_0B_1 és B_0C_0 szakaszok metszéspontja akkor és csak akkor van rajta a B csúcsból induló belső szögfelezőn, ha a C csúcsnál lévő szög $90°$.

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5204. Legyenek $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 4$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$16 \leqslant (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \leqslant 25.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

B. 5205. Adott a síkon négy kör: a k_1 kör belsejében a k_2, a k_2 belsejében a k_3, és a k_3 belsejében a k_4 kör. Adott továbbá három egyenes, e_1, e_2 és e_3, amelyek közül semelyik kettő sem párhuzamos, és mind a négy kört metszik. Mindegyik $i = 1, 2, 3$ esetén legyenek az e_i egyenes metszéspontjai a körökkel A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i és H_i, ebben a sorrendben. Igazoljuk, hogy ha $A_1B_1 + E_1F_1 = C_1D_1 + G_1H_1$ és $A_2B_2 + E_2F_2 = C_2D_2 + G_2H_2$, akkor $A_3B_3 + E_3F_3 = C_3D_3 + G_3H_3$.

(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2021. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`