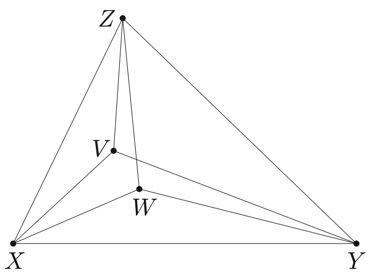
Matematika feladat megoldása

B. 5133. *Adott a térben hat pont, semelyik négy nem esik egy síkra. Bizonyítsuk be, hogy a pontok szétválaszhatók két hármas csoportra úgy, hogy az általuk meghatározott két háromszöglap messe egymást.*

(*6 pont*)

Megoldás. A megoldáshoz használni fogjuk a következő jól ismert tételt, ami Erdős Pál nyomán Happy End-problémaként terjedt el. Azt mondjuk, hogy néhány pont a síkon *általános helyzetű,* ha nincs köztük három, ami illeszkedik egy egyenesre.

Tétel. *Öt általános helyzetű pont közül a síkon mindig kiválasztható négy, amik egy konvex négyszög csúcsai (azaz konvex pozícióban vannak).*



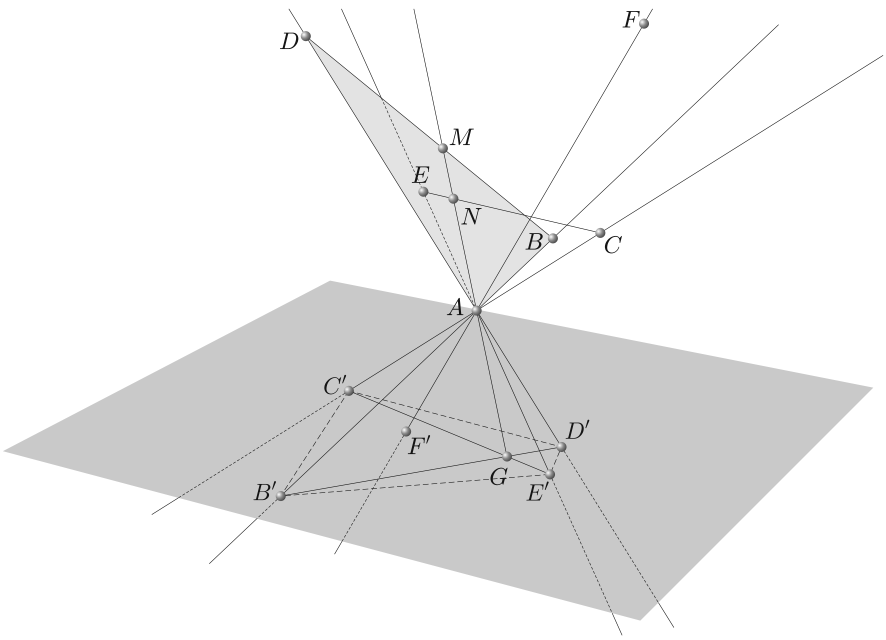
Bizonyítás. Legyenek az adott pontok X, Y, Z, V és W. Ha a pontok konvex burkának legalább négy csúcsa van, akkor az állítás nyilvánvaló. Feltehetjük tehát, hogy V és W az $XYZ\triangle$ belsejében van (lásd *ábra*).

A W pont az XYV, XZV és YZV háromszögek közül pontosan egyben van benne, mondjuk $W \in XYV\triangle$, és így $W \notin$ $\notin XZV\triangle$ valamint $W \notin YZV\triangle$. Nyilvánvalóan V az XZW és YZW háromszögek közül legfeljebb (valójában pontosan) egyben van benne, vagyis feltehetjük, hogy $V \notin YZW\triangle$.

Így Y, Z, V és W pontok konvex burkának Y és Z nyilvánvalóan csúcsa, míg $W \notin YZV\triangle$ és $V \notin YZW\triangle$ miatt csúcsa V és W is. Tehát Y, Z, V és W pontok valóban egy konvex négyszög csúcsai, ezzel a tétel állítását beláttuk.

Rátérünk a feladat megoldására. Tekintsünk egy olyan S síkot, ami a pontok által meghatározott egyenesek egyikével sem párhuzamos, és a pontok mindegyike a sík ugyanazon félterébe esik. Legyen A az adott pontok közül az S-hez legközelebbi (a feltevés szerint ez a pont egyértelmű), a további pontok B, C, D, E és F. Jegyezzük meg, hogy a konstrukció miatt az AB_+, AC_+, AD_+, AE_+ és AF_+ félegyenesek egyike sem metszi az S síkot.

Vetítsük le centrálisan az A-tól különböző pontokat A-ból S-re, azaz legyen $B' = S \cap AB$, $C' = S \cap AC$, és így tovább. A Happy End-probléma miatt feltehetjük, hogy $B'C'D'E'$ egy konvex négyszög, a $B'D'$ és $C'E'$ átlók metszéspontja legyen G. A vetítés mellett G pontnak a BD és CE szakaszokon is van őse, azaz létezik $M \in \overline{BD}$ és $N \in \overline{CE}$, amikre $M' = N' = G$. $AM > AN$ az általánosság megszorítása nélkül feltehető, és így a konstrukció miatt N illeszkedik $\overline{AM}$ szakasz-



ra, azaz N az ABD háromszögnek is belső pontja. Kaptuk, hogy $N = ABD\triangle \cap \overline{CE}$, ami miatt nyilvánvalóan ABD és CEF háromszögek is metszik egymást. Ezzel az állítást beláttuk.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

34 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 14 versenyző: Bán-Szabó Áron, Duchon Márton, Fey Dávid, Kercsó-Molnár Anita, Kovács 129 Tamás, Kökényesi Márk Péter, Lőw László, Molnár-Szabó Vilmos, Nádor Benedek, Seres-Szabó Márton, Simon László Bence, Terjék András József, Varga Boldizsár, Virág Rudolf. 5 pontos 5, 4 pontos 3, 3 pontos 5, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 4 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (704–708.)

K. 704. Egy sakkversenyen 5 játékos vett részt. Mindenki egyszer játszott mindenkivel, a győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont járt. A verseny végére az derült ki, hogy:
– az első helyezettnek nem volt döntetlenje;
– a második helyezett nem vesztett játszmát;
– minden versenyzőnek különböző pontszáma lett.

Hány pontot értek el az egyes helyezettek?