Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\frac{13}{27}. \qquad (5\ pont)$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ intervallumon:

$$1+4\sin x-4\cos^2 x=0. \qquad (6\ pont)$$

2. *a*) Kata és Máté nemrég tanulták az iskolában az osztókat. Kitaláltak egy játékot. A játékot Kata kezdi és felváltva mondanak az n pozitív egész szám osztói közül egyet úgy, hogy olyan osztót nem mondhatnak, amely korábban már elhangzott. Az veszít, aki már nem tud újabb osztót mondani. Hány olyan n pozitív egész szám van az $\{1;2;3;\dots;25\}$ halmazban, amely esetén Kata nyer? (*4 pont*)

b) Hány olyan n pozitív egész szám van a $\{1;2;3;\dots;2021\}$ halmazban, amelyre igaz, hogy $2^{n+3}+2^n$ négyzetszám? (*5 pont*)

c) Adjuk meg a p valós paraméter lehetséges értékeit, ha az alábbi polinom összevont alakjában a másodfokú tag együtthatója -3:

$$(x-1)^2\cdot(p+2x)^2. \qquad (5\ pont)$$

3. *a*) Egy dobozban van 7 különböző pár kesztyű. A dobozból egyesével, visszatevés nélkül húzunk ki kesztyűket mindaddig, amíg nem kapunk egy pár kesztyűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez legfeljebb 3-szor kell húzzunk a dobozból? (*7 pont*)

b) Az iskola 11.-es és 12.-es legjobb 12 matekos diákjának nemek szerinti és évfolyam szerinti eloszlását a *táblázat* tartalmazza. A tanáruk véletlenszerűen választott közülük diákokat a körzeti matekversenyre. A verseny szabályzata szerint egy csapatban ketten indulnak (a csapattagok között nincs kitüntetettség), akik közül legalább az egyikük lány (akár mindkettő résztvevő lehet lány) és a két résztvevő nem lehet ugyanarról az évfolyamról. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tanáruk a versenyszabályzatnak megfelelő nevezést adott le? Eredményünket 3 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

	11.-es	12.-es
Fiúk	4	3
Lányok	2	3

4. Adott az $x^2+y^2+18x-4y+45=0$ egyenletű k kör.

a) Igazoljuk, hogy a k kör középpontjának koordinátái $K(-9;2)$. (*2 pont*)

b) Határozzuk meg a k kör $P(-7;8)$ pontjába húzható érintőjének egyenletét. (*3 pont*) *c*) Adottak az $A(1;1)$, $B(10;4)$, $C(2;8)$ pontok. Mutassuk meg, hogy a három pont által meghatározott háromszög köré írható körének középpontja illeszkedik az $x+3y=17$ egyenletű egyenesre. (*9 pont*)

II. rész

5. Egy derékszögű háromszög oldalaiból álló minta terjedelme 18 egység, a medián 24 egység.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög oldalainak hossza 7; 24 és 25 egység. (*5 pont*)

b) Adjuk meg a háromszög beírt és köré írt körének középpontjának távolságát. (*7 pont*)

A fenti háromszög befogóin megjelöljük azokat a belső osztópontokat, amelyek a derékszögű csúcstól egész egység távolságra helyezkednek el.

c) Hány olyan háromszög adható meg, melyeknek csúcsai ezen belső osztópontok közül kerülnek ki? (*4 pont*)

6. *a*) Ottónak 55 emelt matekos diákja van, akikkel tesztet írat koordinátageometriából.

A teszten 3 kérdés van és minden egyes kérdésre 3 válaszlehetőség, melyek közül pontosan 1 helyes válasz van. Mutassuk meg, hogy van legalább 3 olyan diák, akik pontosan ugyanúgy töltötték ki a tesztet. (Két tesztkitöltést akkor tekintünk azonosnak, ha az egyes kérdésekre adott válasz minden egyes esetben megegyezik.) (*5 pont*)

b) A fenti 55 diák közül András, Bogi, Csaba, Dani, Emese, Feri, Gizi és Huba úgy töltötték ki a teszt első kérdését, hogy minden egyes válaszlehetőség legalább egyszer előfordult a válaszaik között (3 válaszlehetőség volt minden egyes kérdésre). Hányféle különböző kitöltést tud adni a 8 tanuló csak az első kérdésre, ha csak az számít, hogy az egyes válaszlehetőségeket hányan jelölték meg? (*6 pont*)

c) A diákok közül Ilona, József, Kati, Laci, Marci és Nóri nagyon rosszul teljesítettek a teszten, ezért Ottó úgy döntött, hogy a jobb teljesítés érdekében alakítsanak ki tanulópárokat (azaz 2 diákból álló csoportokat). Hányféleképpen alakíthat ki a 6 diák tanulópárokat, ha az egyes tanulópárok között és a tanulópárokon belül sincs kitüntetettség a diákok között? (*5 pont*)

7. Szorgalmas Szonja elhatározza, hogy koordinátageometriai hiányosságait szorgos gyakorlással orvosolja. Ezért minden egyes nap megold 20 ilyen jellegű feladatot. Még nem megy neki olyan jól, ugyanis minden nap csak 5 feladatot tud helyesen megoldani.

Egy héten át minden egyes nap megkéri Lusta Lujzát, hogy ellenőrizze le mind a 20 feladatot. Lujza nem nézi végig az összes feladatot. Minden egyes nap csak 3, általa véletlenszerűen kijelöltet ellenőriz le.

a) Mutassuk meg, hogy három tizedesjegyre kerekítve 0,601 annak a valószínűsége, hogy az adott napon a 3 ellenőrzött feladatból lesz helyesen megoldott feladata Szonjának. (*4 pont*) *b*) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 7 nap alatt legfeljebb egyszer fordul elő az, hogy lesz helyesen megoldott feladata Szonjának? Válaszunkat 4 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

c) Legalább hány napon keresztül kell Lujzának átnéznie a feladatokat az ő sajátos módszerével, hogy legalább 99,99%-os valószínűséggel legyen olyan nap, amikor van helyesen megoldott feladata Szonjának? (*7 pont*)

8. *a*) Egy számtani sorozat első 9 tagjának összege 198. Mekkora a sorozat első tagja és differenciája, ha az első 18 tagjának összege 639? (*4 pont*)

b) Egy mértani sorozat hányadosa 2. A sorozat n-edik tagja 16 és az első n tag összege 31,75. Határozzuk meg n értékét. (*5 pont*)

c) Igazoljuk, hogy az $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ sorozat szigorúan monoton növekedő. (*5 pont*)

d) Adjuk meg az $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ sorozat legkisebb tagját. (*2 pont*)

9. Adott az 3; 4; 5; $x+7$; $11-x$ öt elemből álló minta.

a) Mutassuk meg, hogy a minta szórásnégyzete $\frac{2x^2-8x+40}{5}$. (A minta szórásnégyzete a minta szórásának a négyzete.) (*5 pont*)

b) Írjuk fel az $f(x) = \frac{2x^2-8x+40}{5}$ függvénynek az $x_0 = 7$ abszcisszájú pontjába húzható érintőjének az egyenletét. (Abszcissza: a pont első koordinátája.) (*5 pont*)

c) Mekkora területet zár közre az x tengely, az $x = 0$; $x = 6$ egyenes és az $f(x) = \frac{2x^2-8x+40}{5}$ függvény? (*6 pont*)

Fridrik Richárd
Szeged

Megoldásvázlatok a 2021/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *A karát egy viszonyszám, amely megmutatja, hogy mekkora az aranyötvözetben az arany tömegaránya.*

a) *Hány gramm ezüstöt tartalmaz egy* 10 *karátos* 0,06 kg *tömegű nyaklánc, amely csak aranyat és ezüstöt tartalmaz, ha a színarany* 24 *karátos?* (*2 pont*)

b) *Hány gramm aranyat olvasszon a nyaklánchoz az ötvös, ha* 18 *karátos ötvözetet szeretne létrehozni?* (*4 pont*)

c) *Az ötvösmester pontosan* 25 *éve hordja az egyik aranygyűrűjét, és megállapította, hogy időközben a gyűrű aranytartalmának tömege* 0,012 milligrammal *csökkent. Számítsuk ki, hogy naponta hány aranyatom vált le a gyűrűről, ha* 197 gramm *arany hozzávetőlegesen* $6 \cdot 10^{23}$ *darab aranyatomot tartalmaz. (Feltételezzük, hogy a kopás egyenletesen ment végbe, és tudjuk, hogy ezen időszakban* 5 *szökőév volt.)* (*6 pont*)