Most vizsgáljuk azokat a lyukakat, amiket úgy jelöltünk meg, hogy a megjelölés pillanatában mellettük két nem-megjelölt lyuk volt. Az 1-es lyuk nyilván ilyen (hiszen azt jelöltük meg először). Ezek szerint a 2-es lyukat úgy jelöltük meg, hogy mellette két megjelölt lyuk volt. Ebből következik, hogy a 3-as lyuk is olyan lyuk, amit úgy jelöltünk meg, hogy a megjelölés pillanatában mellette két nem-megjelölt lyuk volt. Ehhez hasonlóan az 5-ös lyuk is ilyen, majd a 7-es stb., és a 2021-es lyuk is ilyen. Ez viszont ellentmondás, hiszen amikor a 2021-es lyukat megjelöljük, akkor már van mellette egy megjelölt lyuk, az 1-es.

6. *Legyen $m \geqslant 2$ egész szám, A egy véges halmaza egész számoknak (amelyek nem feltétlenül pozitívak), és legyenek $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ részhalmazai A-nak. Tegyük fel, hogy minden $k = 1, 2, \dots, m$ esetén B_k elemeinek összege m^k. Bizonyítandó, hogy A legalább $m/2$ elemet tartalmaz.*

Füredi Erik megoldása. Legyen az A halmaz elemszáma x. Legyenek $y_1, y_2, \dots, y_m$ egymástól nem feltétlenül különböző, m-nél kisebb természetes számok, mindegyik y_i értéke m-féle lehet ($1 \leqslant i \leqslant m$, i egész szám) és összesen m^m eset van. Ekkor az $y_1 m + y_2 m^2 + \ldots + y_m m^m$ összeg mind az m^m esetben egy-egy m-mel osztható, m^{m+1}-nél kisebb természetes szám felírása m-es számrendszerben, az 1-es helyiértéken 0 van, a felírás egyértelmű, így mind az m^m esetben különböző az összeg, a „csupa 0" eset 0 összegén kívül $m^m - 1$ különböző összegű eset van.

Bármely $y_1 m + y_2 m^2 + \ldots + y_m m^m$ összeg előáll A egyes elemeinek összegeként, némely elemeket esetleg többször belerakva az összegbe. Minden elem annyiszor szerepel az összegben, amennyi az őt tartalmazó B_k halmazokkal azonos indexű y_k számok összege. Ez a szám a definícióból következően legfeljebb m darab $m-1$-nél nem nagyobb nemnegatív egész szám összege, tehát legfeljebb $m^2 - m$. Így mind az x elem egy összegbeli létszáma $(m^2 - m + 1)$-féle lehet, ez legfeljebb $(m^2 - m + 1)^x$ eset, a csupa 0 eseten kívül $(m^2 - m + 1)^x - 1$. Ezen esetek összegei között ott van az előbb számolt $m^m - 1$ különböző összeg, így $(m^2 - m + 1)^x - 1 \geqslant m^m - 1$. $0 < m^2 - m + 1 < m^2$ a feladat $m \geqslant 2$ feltételéből, így $(m^2)^x - 1 > (m^2 - m + 1)^x - 1 \geqslant m^m - 1$, mivel x pozitív egész szám (A-nak kell, hogy legyen eleme pl. a B_1 részhalmaz elemösszegéhez). Ebből $(m^2)^x - 1 > m^m - 1$, így $m^{2x} > m^m$. Mivel m 1-nél nagyobb egész szám, ebből $2x > m$. Tehát x valóban legalább $m/2$ (sőt nagyobb), így A legalább $m/2$ elemet tartalmaz. A feladat állítását bebizonyítottuk.

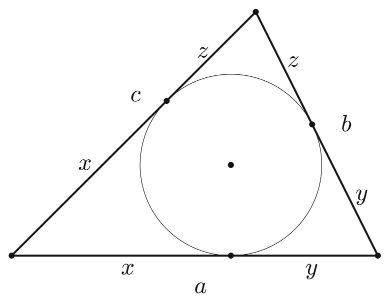
A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásai I.

Háromszög-egyenlőtlenségnek a matematika különféle területein más-más alakú becsléseket értenek, amelyek azonban nem függetlenek egymástól. Ez a közös elnevezés oka. A továbbiakban csak azokat tekintjük át, melyekkel a középiskolai szintű matematika feladatokban is találkozhatunk. Ezek (különböző mértékben) a következő témakörökben fordulnak elő: euklideszi geometria, vektorok, valós számok, komplex számok. A háromszög-egyenlőtlenség felsőbb matematikában használt általánosításaival (pl. norma) kapcsolatban az érdeklődő olvasónak az [1], [2], [3] műveket javasoljuk.

Az említett témakörök mindegyikének tárgyalását úgy végezzük, hogy rövid elméleti összefoglaló után kidolgozott példák megoldása következik. Az egyszerűbb példák alkalmasak lehetnek a tanár kollégák számára egy-egy óra színesítésére, gazdagítására, a nehezebbek szakköri feladatként használhatók. Diákoknak pedig tanulmányi versenyekre való felkészülésben nyújthatnak segítséget a feladatok. A szerző szinte minden feladatot „kipróbált” az elmúlt évtizedekben tanórákon, illetve szakköri foglalkozásokon. A közölt megoldásokban is felhasználtam tanítványaim ötleteit. A cikk végén felsorolunk még néhány feladatot, melyek megoldásához jól alkalmazható a leírt ötletek valamelyike. Az irodalomjegyzékben egyrészt a témakör mélyebb hátterét tárgyaló könyvek, másrészt olyan középiskolai szintű anyagok találhatók, melyek tanulmányozását jó szívvel ajánlom minden diáknak és kollégának. Végül szeretnék köszönetet mondani *Gulyás Tibor, Győry Ákos* és *Kubatov Antal* kollégáimnak, hogy a még nem publikált [7], illetve [10] anyagaikat rendelkezésemre bocsátották.

I.

Az euklideszi geometriában egy valódi (tehát szakasszá nem elfajuló) háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál: $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$. Illetve megfordítva: ha adott három szakasz, melyek hossza a, b és c, továbbá ezekre érvényes a három egyenlőtlenség, akkor a szakaszokból háromszög szerkeszthető.



Fontos észrevétel az ún. dualitási helyettesítés. Pontosan akkor léteznek olyan $x,y,z>0$ pozitív számok, melyekre $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, ha van a síkon olyan háromszög, melynek oldalainak hossza a, b, c. A bizonyítás egyik irányból a háromszög-egyenlőtlenség triviális teljesülésén múlik. Másik irányból pedig azon, hogy minden háromszögnek van beírt köre, továbbá a beírt körhöz a csúcsokból húzott érintő szakaszok egyenlők. A dualitási helyettesítés jelentőségét az adja, hogy csak a háromszög oldalait tartalmazó becslések esetén áttérhetünk a segítségével az egymástól már független x, y, z pozitív változókra. Így geometria problémából algebrai problémát kapunk.

A háromszög-egyenlőtlenség általánosításaként fogható fel az a tétel, mely szerint egy töröttvonal nem lehet rövidebb a kezdő és végpontját összekötő szakasznál. Az állítást teljes indukcióval nem nehéz bizonyítani. Javasoljuk, hogy az olvasó ezt önállóan kísérelje meg.

A most következő feladatok többségében nem geometriai megfogalmazásúak. Az ismertetett megoldási módszer azonban olyan, amely geometriai modellt használ. További feladatokat illetően lásd még: [6], [9], [12], [13].

1. példa. *Igazoljuk, hogy háromszögben bármely két oldal hosszának eltérése kisebb a harmadik oldalnál:* $|a-b|<c$, $|b-c|<a$, $|c-a|<b$.

Megoldás. Az abszolút érték értelmezése miatt pl.:

$$|a-b|<c \;\Leftrightarrow\; -c<a-b<c,$$

amivel ekvivalens, hogy $b<c+a$ és $a<b+c$. Ugyanígy nyerhető a harmadik háromszög-egyenlőtlenség is.

2. példa. *Bizonyítsuk be, hogy ha* a, b, c *egy háromszög oldalainak hosszát jelöli, akkor*

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

1. megoldás. Mivel bármely x és y valós szám esetén $|x|\leqslant|y| \;\Leftrightarrow\; x^2\leqslant y^2$, így a háromszög-egyenlőtlenségből:

$$|a-b|<c \;\Leftrightarrow\; (a-b)^2<c^2,$$
$$|b-c|<a \;\Leftrightarrow\; (b-c)^2<a^2,$$
$$|c-a|<b \;\Leftrightarrow\; (c-a)^2<b^2.$$

Összeadás után

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca<a^2+b^2+c^2,$$
$$a^2+b^2+c^2<2ab+2bc+2ca.$$

2. megoldás. A dualitási helyettesítés: $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, $x,y,z>0$. Beírva az oldalak helyére:

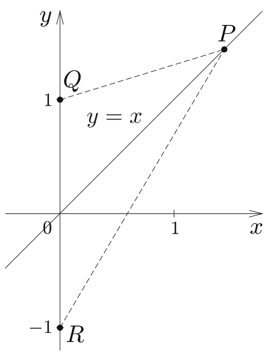
$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2<$$
$$<2(x+y)(y+z)+2(y+z)(z+x)+2(z+x)(x+y),$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx<4xy+4yz+4zx+2x^2+2y^2+2z^2,$$
$$0<2xy+2yz+2zx,$$

ami nyilvánvaló.

A 2 helyére kisebb szám nem írható, tehát a becslés éles. Ennek belátásához tekintsük az $a=b$, $c\to 0$ határesetet. A dualitási helyettesítés számos alkalmazását tartalmazza Kubatov Antal tanár úr szakköri anyaga: [7].

3. példa. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}=2.$$



Megoldás. Az egyenlet bal oldalán álló kifejezésben teljes négyzeteket kialakítva kapjuk, hogy

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{x^2+(x+1)^2}=2.$$

Ismeretes, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok távolsága $AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$. Legyen P az $y=x$ egyenes valamely pontja, továbbá tekintsük a $Q(0;1)$ és $R(0;-1)$ pontokat. A távolságképlet szerint

$$PQ+PR=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{x^2+(x+1)^2}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$PQ+PR\geqslant QR=2,$$

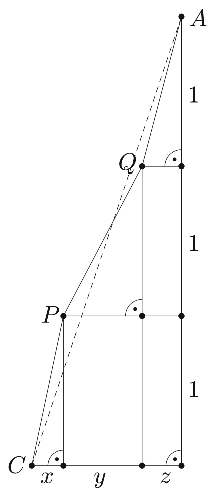
továbbá egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha P pont az origóban van. Így az egyenlet egyetlen valós megoldása: $x=0$.

Megjegyzés. Hasonló típusú egyenleteket illetően lásd pl.: [8].

4. példa. *Az x, y, z pozitív számok összege* 1. *Határozzuk meg az*

$$S=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

kifejezés legkisebb értékét.



Megoldás. Tekintsük az *ábrát.* A Pitagorasz-tétel alapján világos, hogy

$$AQ=\sqrt{1+z^2},$$

$$QP=\sqrt{1+y^2},$$

$$PC=\sqrt{1+x^2}.$$

Tehát S éppen az $AQPC$ töröttvonal hosszát adja meg, ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt akkor lesz minimális, ha P és Q illeszkedik az AC egyenesre.

Ekkor $x=y=z=\frac{1}{3}$, és a kifejezés minimuma

$$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}\,.$$

5. példa. *Az a, b, c valós számokat jelölnek. Határozzuk meg az*

$$L=\sqrt{a^2+1+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+1+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+1+(1-a)^2}$$

kifejezés legkisebb értékét.

Megoldás. Tekintsük a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi pontokat:

$$A(1-a;0;0),\quad P(1;1-b;1),\quad Q(2-c;1;2),\quad B(2;2-a;3).$$

A két pont távolságára vonatkozó ismert képlet miatt:

$$AP=\sqrt{a^2+(1-b)^2+1^2},\qquad PQ=\sqrt{(1-c)^2+b^2+1^2},$$
$$QB=\sqrt{c^2+(1-a)^2+1^2},$$

így

$$L=AP+PQ+QB.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alapján világos, hogy

$$L\geqslant AB=\sqrt{(1+a)^2+(2-a)^2+3^2}=\sqrt{2a^2-2a+14}=$$
$$=\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{2}}\geqslant\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\frac{1}{2}$. A kifejezés minimális értéke $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Megjegyzés. A megoldás során hivatkozott távolságképlet a következő. Ha

$$A(a_1;a_2;a_3)\quad\text{és}\quad B(b_1;b_2;b_3)$$

két adott pont a háromdimenziós euklideszi térben, akkor a két pont távolsága

$$AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$

A bizonyítás a téglatest testátlójának kiszámítására vonatkozó ún. térbeli Pitagorasz-tétel segítségével természetes módon elvégezhető. Mélyebb ismeretként hivatkozhatunk a vektorok skaláris szorzatára is.

6. példa. *Igazoljuk, hogy ha a_k és b_k valós számok $(k=1,2,\ldots,n)$, akkor*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}.$$

Megoldás. Ekvivalens állításhoz jutunk, ha négyzetre emelünk:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)} \geqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2.$$

Ebből a mindkét oldalon előforduló tagok levonása, majd 2-vel való osztás után:

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

ami a jól ismert Cauchy-egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor, ha $a_k = \lambda b_k$, ahol $\lambda > 0$ adott valós szám.

Megjegyzés. Ha tekintjük az $\mathbf{a}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $\mathbf{b}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ vektorokat az n-dimenziós euklideszi térben, akkor a feladat állítása éppen a két vektorra érvényes háromszög-egyenlőtlenség:

$$|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a} + \mathbf{b}|.$$

(Részleteket illetően lásd [3] 8. fejezet: Euklideszi terek.)

A feladatban szereplő becslés általánosítható teljes indukcióval véges sok szám n-esre. Például három szám n-es esetén, ha azok $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ és $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, akkor

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2},$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k)^2},$$

ezért

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2} \geqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k + c_k)^2}.$$

(Az általánosításnál hivatkozhattunk volna a vektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség véges sok vektorra vonatkozó alakjára is.)

Ez után a megjegyzés után már könnyű látni, hogy az előző feladatok hátterében ugyanaz a becslés áll, melyet a világhírű matematikusról, Minkowskiról[1] neveztek el. A Minkowski-egyenlőtlenség diszkrét, véges változata azt mondja ki, hogy ha a_k és b_k valós számok ($k = 1, 2, \ldots, n$), valamint $p > 1$ valós szám, akkor

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{1/p} \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right)^{1/p}.$$

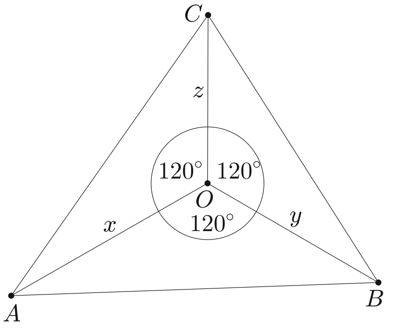
[1] *Hermann Minkowski* (1864–1909) német matematikus, Einstein egyik tanára Zürichben. Elegáns matematikai leírést adott a speciális relativitáselméletre.

A feladatban szereplő becslés az egyenlőtlenség $p=2$-re vonatkozó alakja. Az általános eset bizonyítása nem egyszerű, általában a Hölder-egyenlőtlenség[2] segítségével végzik. Ha $0<p<1$, akkor fordított irányú egyenlőtlenség érvényes. (A bizonyításokat lásd pl. [9]-ben.) Komplex számokra is érvényes ez a nevezetes egyenlőtlenség.

7. példa. *Legyenek x, y, z pozitív számok. Igazoljuk, hogy*

a) $$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}>\sqrt{y^2+yz+z^2},$$

b) $$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}<2(x+y+z).$$



Megoldás. Tekintsük a síkon a közös O végponttal rendelkező $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ hosszú szakaszokat, melyek páronként $120°$-os szöget zárnak be. A koszinusztétel miatt pl.

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos 120°,$$

$$AB=\sqrt{x^2+xy+y^2}.$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$BC=\sqrt{y^2+yz+z^2} \quad \text{és} \quad CA=\sqrt{z^2+zx+x^2}\,.$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $AB+CA>BC$, ami az *a*) állítást bizonyítja.

Alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget rendre az OAB, OBC és OCA háromszögekre:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}<x+y,$$

$$\sqrt{y^2+yz+z^2}<y+z,$$

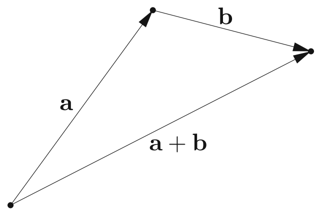
$$\sqrt{z^2+zx+x^2}<z+x.$$

Összeadással nyerjük a *b*) állítást.

[2] A Hölder-egyenlőtlenség diszkrét, véges alakja szerint, ha $p,q>1$ és $1/p+1/q=1$, akkor az a_i és b_i nemnegatív valós számokra

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

II.



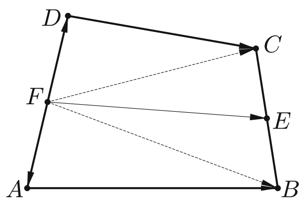
Ha **a** és **b** tetszőleges vektorok, akkor a vektorok összeadási szabályából azonnal látszik, hogy a hosszaikra $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a két vektor párhuzamos és azonos irányba mutat. (Másképpen mondva: egyik a másik pozitív számszorosa.) Ezt a becslést a vektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségnek hívjuk. Teljes indukciós gondolatmenettel az állítás véges sok vektorra kiterjeszthető:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n| \leqslant |\mathbf{v}_1| + |\mathbf{v}_2| + \ldots + |\mathbf{v}_n|.$$

8. példa. *Az $ABCD$ négyszög BC és DA oldalainak felezési pontjai rendre E és F. Igazoljuk, hogy*

$$FE \leqslant \frac{AB+CD}{2}.$$

Mikor teljesül egyenlőség?



Megoldás. Vegyünk fel vektorokat az *ábrán* látható módon. Világos, hogy $\overrightarrow{FD} = -\overrightarrow{FA}$. A vektorok összeadásának paralelogramma-módszere alapján

$$\overrightarrow{FE} = \frac{\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}}{2} = \frac{\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}}{2} = $$

$$= \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}.$$

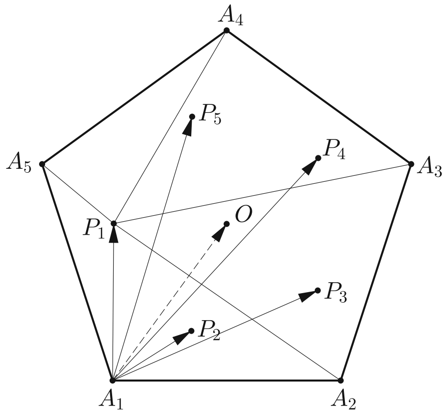
Alkalmazva a vektorokra érvényes háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|\overrightarrow{FE}| = \frac{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|}{2} \leqslant \frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|}{2} \ \Leftrightarrow\ FE \leqslant \frac{AB+DC}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ párhuzamosak és egy irányba mutatnak, amiből következik, hogy a négyszög trapéz. A bizonyított állítás szerint egy négyszög középvonala nem hosszabb, mint az őt közrefogó oldalak számtani közepe, valamint pontosan akkor van egyenlőség, ha a négyszög trapéz.

Egy vektorokkal kapcsolatos remek feladatgyűjtemény: [10].

9. példa. *Adott a síkon egy szabályos ötszög. Határozzuk meg azt a pontot a síkon, amelynek az ötszög csúcsaitól vett távolságainak összege minimális.*



Megoldás. Legyen P_1 a sík valamely pontja, melyet kössünk össze az $A_1A_2A_3A_4A_5$ szabályos ötszög csúcsaival. Forgassuk el az ötszög O középpontja körül a P_1 pontot $72°$-kal, így adódik a P_2 pont. Megismételve az eljárást a P_2-re kapjuk a P_3 pontot. Ugyanígy adódnak a P_4 és P_5 pontok. A forgatások során az ötszög csúcsai mindig a rákövetkezőbe mennek át. Mindezekből kapjuk, hogy $P_1A_5 = P_2A_1$, $P_1A_4 = P_3A_1$, $P_1A_3 = P_4A_1$, $P_1A_2 = P_5A_1$, következésképpen

$$P_1A_1 + P_1A_2 + \ldots + P_1A_5 = P_1A_1 + P_2A_1 + \ldots + P_5A_1.$$

Indítsunk helyvektorokat az A_1 csúcsból a P_i pontokba, valamint a szabályos ötszög középpontjába. Ismeretes, hogy egy szabályos sokszög középpontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, ezért $\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_1P_i} = 5 \cdot \overrightarrow{A_1O}$. A vektorok összegére vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$5|\overrightarrow{A_1O}| = \left|\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_1P_i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{5} |\overrightarrow{A_1P_i}| = \sum_{i=1}^{5} A_1P_i = \sum_{i=1}^{5} P_1A_i.$$

Mivel $5|\overrightarrow{A_1O}|$ konstans, így a becslésből adódik, hogy a csúcsoktól mért távolságösszeg akkor minimális, ha P_1 egybeesik a szabályos ötszög középpontjával.

Megjegyzés. A megoldás tetszőleges szabályos n-szögre ugyanígy megy.

A feladat a [6] könyvből származik. E sorok írója szerint ez az egyik legjobb elemi matematika feladatgyűjtemény.

10. példa. *Adott a síkban n darab vektor, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A vektorok abszolút értékeinek összege* 1. *Bizonyítsuk, hogy ezen vektorok halmazának van olyan nem üres részhalmaza, hogy a részhalmaz vektorai összegének abszolút értéke legalább* 1/6.

(*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny* 2014/15, haladó *III*. kat. döntő)

Megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy semelyik vektor ne legyen párhuzamos egyik tengellyel sem. A vektorokat tekinthetjük helyvektoroknak, hiszen ez a hosszuk (abszolút értékük) összegét nem befolyásolja. Egy vektor koordinátái legyenek $\mathbf{v}_i(x_i; y_i)$, ekkor a vektor hossza $|\mathbf{v}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Két becslést alkalmazunk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i| + |y_i|\big) \leqslant |\mathbf{v}_i| \leqslant |x_i| + |y_i|.$$

Az alsó becslés a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség következménye:

$$\frac{|x_i|+|y_i|}{2} \leqslant \sqrt{\frac{|x_i|^2+|y_i|^2}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i|+|y_i|\big) \leqslant |\mathbf{v}_i|.$$

A felső becslés pedig a háromszög-egyenlőtlenségből jön ki, hiszen $\mathbf{v}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j}$ miatt ($\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a bázisvektorok)

$$|\mathbf{v}_i| = |x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j}| \leqslant |x_i\mathbf{i}| + |y_i\mathbf{j}| = |x_i| + |y_i|.$$

Most bontsuk négy csoportra a vektorokat aszerint, hogy melyik síknegyedbe esnek. Számoljuk ki minden csoportban a vektorok tengelyeken vett merőleges vetületeinek összhosszát. Biztos lesz olyan síknegyed, ahol a vetületek összhossza legalább $1/4$, hiszen a fenti felső becslés alapján a négy csoportban összesen legalább 1 a vetületek összhossza. Azt is feltehetjük, hogy ez az első síknegyedben áll elő, tehát itt minden koordináta pozitív. (A tengelyek megfelelő forgatásával elérhető ez a helyzet.) Jelölje az első síknegyedbe eső vektorokat $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{4} \leqslant \sum_{i=1}^{k}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i,$$

ahol az összegzés már csak a $\mathbf{w}_i$ vektorokra vonatkozik, és az abszolútértékek a síknegyed megválasztása miatt voltak elhagyhatók. Végül a fenti alsó becslést alkalmazva:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\mathbf{w}_i\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right)\mathbf{j}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i\right) \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{6}.$$

E megoldás mellett további megoldások olvashatók [14]-ben a 2014/15. évi verseny döntőiről szóló beszámoló 50–56. oldalain. Ugyanitt szerepel annak bizonyítása is, hogy az alsó korlát értéke $1/\pi$-re erősíthető, ami az elérhető legjobb.

11. példa. *Az α, β, γ szögekről tudjuk, hogy* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2$. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}\,.$$

Megoldás. Tekintsük az $\mathbf{a}(\sin\alpha;\cos\alpha)$, $\mathbf{b}(\sin\beta;\cos\beta)$, $\mathbf{c}(\sin\gamma;\cos\gamma)$ egységvektorokat. Ekkor

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos y)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2.$$

A vektorokra érvényes háromszög-egyenlőtlenség, valamint a skaláris szorzatról tudottak miatt

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| = 3,$$
$$\big(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\big)^2 \leqslant 9,$$

amit a korábbi becsléssel összevetve a bizonyítandó állítás adódik.

Szakirodalom

[1] Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok,* Tankönyvkiadó (1981).
[2] Riesz Frigyes, Szőkefalvi-Nagy Béla: *Funkcionálanalízis,* Tankönyvkiadó (1988).
[3] Freud Róbert: *Lineáris algebra,* ELTE, Eötvös Kiadó (2009).
[4] Reiman István: *Geometria és határterületei,* Gondolat (1986).
[5] Titu Andreescu – Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to … Z,* Birkhäuser (2006).
[6] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies,* Springer (1998).
[7] Kubatov Antal: *A dualitási helyettesítés,* kézirat.
[8] Olosz Ferenc: *Egyenletek I–II.,* Zalamat (2012).
[9] Ábrahám Gábor: *Egyenlőtlenségek I–II.,* Zalamat (2017).
[10] Gulyás Tibor, Győry Ákos: *Vektorok,* kézirat.
[11] Schultz János: *Elemi matematikai versenyfeladatok,* Zalamat (2011).
[12] Schultz János: *Elemi matematika mesterfokon,* Zalamat (2015).
[13] Besenyei Ádám: *Kalandozás a nevezetes egyenlőtlenségek világában,* előadások (2017). `https://abesenyei.web.elte.hu/mattanar/17o/egyenl17o/egyenl17o.php`.
[14] `https://www.bolyai.hu/arany-daniel-matematikaverseny-korabbi-evek-feladatai-es-megoldasai`.

Schultz János

KöMaL Ifjúsági Ankét 2021

A koronavírus ellenére szerencsére idén sikerült megrendezni személyesen a KöMaL Ankétot. A szokásos módon regisztrációval és ajándékosztással indult a program. Még az előadások előtt totó helyett fejtörők tették próbára a diákokat és tanárokat egyaránt. Az előadásokat rendhagyó módon két kerekasztal-beszélgetés követte. A kerekasztal-beszélgetés során a versenyzőknek lehetőségük nyílt kérdezni a javítókat és a szerkesztőségi tagokat. Idén az ebéd az Ericsson épületében volt. Az ebéd után szokásos módon a konferenciateremben zajlott a díjkiosztó, melyet előadások tarkítottak. Az első napot állófogadás zárta.

Másnap kísérletezéssel kezdtünk. A kísérletek az IYPT-en kitűzött versenyfeladatokból lettek válogatva, melyet korábbi versenyzők mutattak be. Ezután két kísérleti problémát ismerhettünk meg alaposabban ugyanebből a versenyből. Az előző nap mintájára egy kerekasztal-beszélgetéssel folytattuk, ahol szó esett a jó értékelésekről és tipikus hibákról a dolgozatokban. Még az ebéd előtt megismerhettük az adatninjákat és belepillanthattunk a világukba. A délután folyamán először a hajításokba mélyedhettünk el, és zárásul narancsok segítségével kerülhettünk közelebb a gömbi geometriához.

Mi úgy gondoljuk, hogy a teljes ankét tanulságos és hasznos volt és reméljük, hogy jövőre ismét sok versenyzővel találkozhatunk.

Kovács Bence, Róka Bálint
(jelenlegi javítók, volt versenyzők)