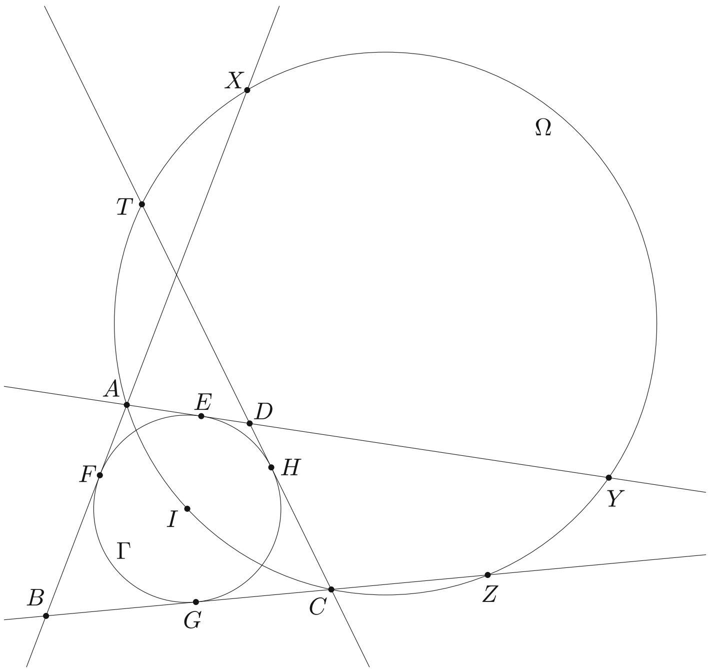
A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

Második nap*

4. *Legyen Γ egy I középpontú kör, és legyen $ABCD$ olyan konvex négyszög, hogy az AB, BC, CD és DA szakaszok mindegyike érinti Γ-t. Legyen Ω az AIC háromszög körülírt köre. A BA szakasz A-n túli meghosszabbítása Ω-t X-ben metszi, és a BC szakasz C-n túli meghosszabbítása Ω-t Z-ben metszi. Az AD, illetve a CD szakasz D-n túli meghosszabbítása Ω-t Y-ban, illetve T-ben metszi. Bizonyítandó, hogy*

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$



Velich Nóra megoldása. Legyen $DAI\sphericalangle = BAI\sphericalangle = \alpha$ és $BCI\sphericalangle = DCI\sphericalangle = \gamma$. Az Ω körön $YAI\sphericalangle = \alpha$ az IY irányított ívhez† tartozó kerületi szög. Az IX irányított ívhez tartozó kerületi szög pedig $XAI\sphericalangle = 180° - \alpha$, így az XI és IY

*Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

†Az AB irányított (kör)ív az A és B végpontú, az óramutató járásával megegyező irányítású ívet jelenti.

irányított körív egyenlő. Hasonlóan a TI és ZI irányított ívhez tartozó kerületi szög is γ, illetve $180^\circ-\gamma$, így a TI és IZ irányított körívek is egyenlőek. Ekkor a TIX és ZIY háromszögek egybevágóak, hiszen azonos a körülírt körük, és két-két oldalukhoz tartozó körív egyenlő hosszú. Így az XT és ZY irányított körívek is egyenlőek, tehát $TX=YZ$.

Már csak azt szükséges bizonyítani, hogy $AD+DT+XA=CD+DY+ZC$. Érintse a Γ kört az AD, AB, BC és CD szakasz rendre az E, F, G és H pontokban. Ekkor

$$AD+DT+XA=AE+ED+DT+XA=AF+DH+DT+XA=$$
$$=XF+TH.$$

Hasonlóan

$$CD+DY+ZC=CH+HD+DY+ZC=CG+DE+DY+ZC=$$
$$=ZG+YE.$$

Mivel X és Y egyenlő távolságra van I-től, így a belőlük húzott érintők az I középpontú Γ körhöz egyenlőek, azaz $XF=YE$. Hasonlóan $ZG=TH$. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

5. *Két mókus, Bozontos és Ugrálós,* 2021 *diót gyűjtött a télre. Ugrálós megszámozta a diókat* 1*-től* 2021*-ig, és ásott* 2021 *kis lyukat a talajba köralakú elrendezésben a kedvenc fájuk körül. Másnap reggel Ugrálós látta, hogy Bozontos mindegyik lyukba elhelyezett egy diót, de nem törődött a sorszámozással. Ugrálós elégedetlenségében elhatározta, hogy átrendezi a diókat* 2021 *egymást követő lépésben. A* k*-adik lépésben Ugrálós felcseréli a* k *sorszámú dióval szomszédos két diónak a helyzetét. Bizonyítandó, hogy létezik olyan* k *érték, hogy a* k*-adik lépésben Ugrálós olyan* a *és* b *sorszámú diókat cserél fel, amelyekre* $a<k<b$.

Fleiner Zsigmond megoldása. Indirekten bizonyítsuk a feladatot. A k-adik lépésben megjelöljük a k-adik diót és azt a lyukat, amiben éppen van.

Megfigyelés. Amennyiben nem teljesül a bizonyítandó állítás, minden megjelölt dió megjelölt lyukban marad (és viszont, azaz a nem-megjelölt diók nem-megjelölt lyukban maradnak).

Bizonyítás. Indirekten vizsgáljuk az első esetet, amikor megjelölt dió nem-megjelölt lyukba kerül. Legyen ez a k-adik lépés. A megjelölt dió kisebb, mint k, hiszen meg van jelölve. A nem-megjelölt lyukban eddig nem megjelölt dió volt, így az nagyobb, mint k. Azaz teljesül a bizonyítandó állítás.

Ezek szerint a k-adik lépésben a k-adik dió mellett vagy kettő megjelölt dió van, vagy kettő nem-megjelölt. (Hiszen különben abban a lépésben egy megjelölt dió egy nem-megjelölt lyukba kerülne.) Ezek után már csak azt vizsgáljuk, hogy milyen sorrendben jelöljük meg a lyukakat. Ehhez megszámozzuk a lyukakat: legyen 1-es az a lyuk, amit először megjelöltünk (azaz amiben kezdetben az első dió van), majd ettől az óramutató járása szerint haladva sorrendben az 1-es lyuk utáni a 2-es, mellette a következő a 3-as, és így tovább, a 2021-es lyuk után van az 1-es.

Most vizsgáljuk azokat a lyukakat, amiket úgy jelöltünk meg, hogy a megjelölés pillanatában mellettük két nem-megjelölt lyuk volt. Az 1-es lyuk nyilván ilyen (hiszen azt jelöltük meg először). Ezek szerint a 2-es lyukat úgy jelöltük meg, hogy mellette két megjelölt lyuk volt. Ebből következik, hogy a 3-as lyuk is olyan lyuk, amit úgy jelöltünk meg, hogy a megjelölés pillanatában mellette két nem-megjelölt lyuk volt. Ehhez hasonlóan az 5-ös lyuk is ilyen, majd a 7-es stb., és a 2021-es lyuk is ilyen. Ez viszont ellentmondás, hiszen amikor a 2021-es lyukat megjelöljük, akkor már van mellette egy megjelölt lyuk, az 1-es.

6. *Legyen $m \geqslant 2$ egész szám, A egy véges halmaza egész számoknak (amelyek nem feltétlenül pozitívak), és legyenek $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ részhalmazai A-nak. Tegyük fel, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, m$ esetén B_k elemeinek összege m^k. Bizonyítandó, hogy A legalább $m/2$ elemet tartalmaz.*

Füredi Erik megoldása. Legyen az A halmaz elemszáma x. Legyenek $y_1, y_2, \ldots, y_m$ egymástól nem feltétlenül különböző, m-nél kisebb természetes számok, mindegyik y_i értéke m-féle lehet ($1 \leqslant i \leqslant m$, i egész szám) és összesen m^m eset van. Ekkor az $y_1 m + y_2 m^2 + \ldots + y_m m^m$ összeg mind az m^m esetben egy-egy m-mel osztható, m^{m+1}-nél kisebb természetes szám felírása m-es számrendszerben, az 1-es helyiértéken 0 van, a felírás egyértelmű, így mind az m^m esetben különböző az összeg, a „csupa 0" eset 0 összegén kívül $m^m - 1$ különböző összegű eset van.

Bármely $y_1 m + y_2 m^2 + \ldots + y_m m^m$ összeg előáll A egyes elemeinek összegeként, némely elemeket esetleg többször belerakva az összegbe. Minden elem annyiszor szerepel az összegben, amennyi az őt tartalmazó B_k halmazokkal azonos indexű y_k számok összege. Ez a szám a definícióból következően legfeljebb m darab $m-1$-nél nem nagyobb nemnegatív egész szám összege, tehát legfeljebb $m^2 - m$. Így mind az x elem egy összegbeli létszáma $(m^2 - m + 1)$-féle lehet, ez legfeljebb $(m^2 - m + 1)^x$ eset, a csupa 0 eseten kívül $(m^2 - m + 1)^x - 1$. Ezen esetek összegei között ott van az előbb számolt $m^m - 1$ különböző összeg, így $(m^2 - m + 1)^x - 1 \geqslant m^m - 1$. $0 < m^2 - m + 1 < m^2$ a feladat $m \geqslant 2$ feltételéből, így $(m^2)^x - 1 > (m^2 - m + 1)^x - 1 \geqslant m^m - 1$, mivel x pozitív egész szám (A-nak kell, hogy legyen eleme pl. a B_1 részhalmaz elemösszegéhez). Ebből $(m^2)^x - 1 > m^m - 1$, így $m^{2x} > m^m$. Mivel m 1-nél nagyobb egész szám, ebből $2x > m$. Tehát x valóban legalább $m/2$ (sőt nagyobb), így A legalább $m/2$ elemet tartalmaz. A feladat állítását bebizonyítottuk.

A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásai I.

Háromszög-egyenlőtlenségnek a matematika különféle területein más-más alakú becsléseket értenek, amelyek azonban nem függetlenek egymástól. Ez a közös elnevezés oka. A továbbiakban csak azokat tekintjük át, melyekkel a középiskolai