KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

71. évfolyam 8. szám Budapest, 2021. november

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 1050 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Főszerkesztő: RATKÓ ÉVA
Fizikus szerkesztő: GNÄDIG PÉTER
Műszaki szerkesztő: MIKLÓS ILDIKÓ
Borító: BURGHARDT ZSUZSA
Kiadja: MATFUND ALAPÍTVÁNY
Alapítványi képviselő: KÓS RITA
Felelős kiadó: KATONA GYULA
Nyomda: OOK-PRESS Kft.
Felelős vezető: SZATHMÁRY ATTILA
INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest,
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
Telefon: 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml`.
Előfizetési díj egy évre: 8800 Ft

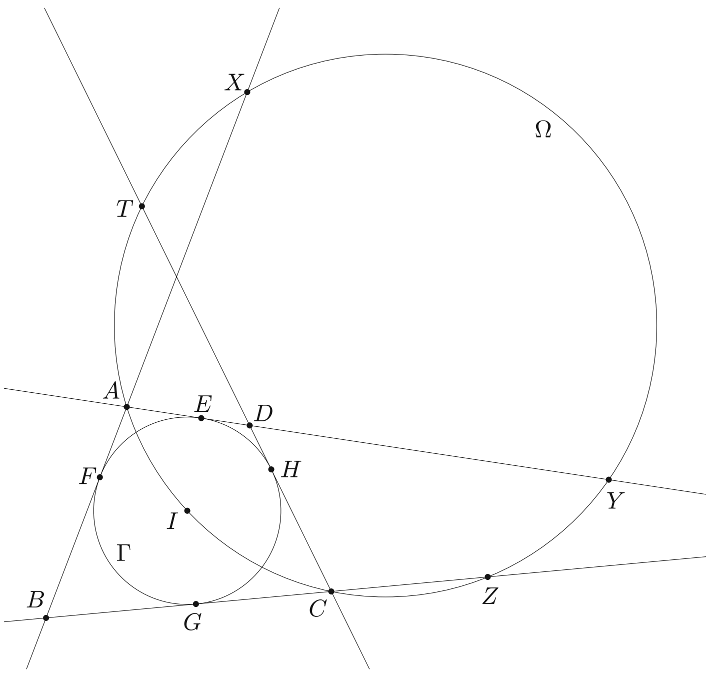
E-mail: `szerk@komal.hu`
Internet: `http://www.komal.hu`
This journal can be ordered from
the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1/C III. emelet 3.405.
1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
`www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml`.

A 62. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldása II.

Második nap*

4. *Legyen* Γ *egy* I *középpontú kör, és legyen* $ABCD$ *olyan konvex négyszög, hogy az* AB, BC, CD *és* DA *szakaszok mindegyike érinti* Γ*-t. Legyen* Ω *az* AIC *háromszög körülírt köre. A* BA *szakasz* A*-n túli meghosszabbítása* Ω*-t* X*-ben metszi, és a* BC *szakasz* C*-n túli meghosszabbítása* Ω*-t* Z*-ben metszi. Az* AD*, illetve a* CD *szakasz* D*-n túli meghosszabbítása* Ω*-t* Y*-ban, illetve* T*-ben metszi. Bizonyítandó, hogy*

$$AD + DT + TX + XA = CD + DY + YZ + ZC.$$



Velich Nóra megoldása. Legyen $DAI\sphericalangle = BAI\sphericalangle = \alpha$ és $BCI\sphericalangle = DCI\sphericalangle = \gamma$. Az Ω körön $YAI\sphericalangle = \alpha$ az IY irányított ívhez† tartozó kerületi szög. Az IX irányított ívhez tartozó kerületi szög pedig $XAI\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$, így az XI és IY

*Az első nap feladatainak megoldását az októberi számban közöltük.

†Az AB irányított (kör)ív az A és B végpontú, az óramutató járásával megegyező irányítású ívet jelenti.

irányított körív egyenlő. Hasonlóan a TI és ZI irányított ívhez tartozó kerületi szög is γ, illetve $180^\circ - \gamma$, így a TI és IZ irányított körívek is egyenlőek. Ekkor a TIX és ZIY háromszögek egybevágóak, hiszen azonos a körülírt körük, és két-két oldalukhoz tartozó körív egyenlő hosszú. Így az XT és ZY irányított körívek is egyenlőek, tehát $TX = YZ$.

Már csak azt szükséges bizonyítani, hogy $AD + DT + XA = CD + DY + ZC$. Érintse a Γ kört az AD, AB, BC és CD szakasz rendre az E, F, G és H pontokban. Ekkor

$$AD + DT + XA = AE + ED + DT + XA = AF + DH + DT + XA = \\ = XF + TH.$$

Hasonlóan

$$CD + DY + ZC = CH + HD + DY + ZC = CG + DE + DY + ZC = \\ = ZG + YE.$$

Mivel X és Y egyenlő távolságra van I-től, így a belőlük húzott érintők az I középpontú Γ körhöz egyenlőek, azaz $XF = YE$. Hasonlóan $ZG = TH$. Ezzel az állítást bizonyítottuk.

5. *Két mókus, Bozontos és Ugrálós,* 2021 *diót gyűjtött a télre. Ugrálós megszámozta a diókat* 1*-től* 2021*-ig, és ásott* 2021 *kis lyukat a talajba köralakú elrendezésben a kedvenc fájuk körül. Másnap reggel Ugrálós látta, hogy Bozontos mindegyik lyukba elhelyezett egy diót, de nem törődött a sorszámozással. Ugrálós elégedetlenségében elhatározta, hogy átrendezi a diókat* 2021 *egymást követő lépésben. A k-adik lépésben Ugrálós felcseréli a k sorszámú dióval szomszédos két diónak a helyzetét. Bizonyítandó, hogy létezik olyan k érték, hogy a k-adik lépésben Ugrálós olyan a és b sorszámú diókat cserél fel, amelyekre $a < k < b$.*

Fleiner Zsigmond megoldása. Indirekten bizonyítsuk a feladatot. A k-adik lépésben megjelöljük a k-adik diót és azt a lyukat, amiben éppen van.

Megfigyelés. Amennyiben nem teljesül a bizonyítandó állítás, minden megjelölt dió megjelölt lyukban marad (és viszont, azaz a nem-megjelölt diók nem-megjelölt lyukban maradnak).

Bizonyítás. Indirekten vizsgáljuk az első esetet, amikor megjelölt dió nem-megjelölt lyukba kerül. Legyen ez a k-adik lépés. A megjelölt dió kisebb, mint k, hiszen meg van jelölve. A nem-megjelölt lyukban eddig nem megjelölt dió volt, így az nagyobb, mint k. Azaz teljesül a bizonyítandó állítás.

Ezek szerint a k-adik lépésben a k-adik dió mellett vagy kettő megjelölt dió van, vagy kettő nem-megjelölt. (Hiszen különben abban a lépésben egy megjelölt dió egy nem-megjelölt lyukba kerülne.) Ezek után már csak azt vizsgáljuk, hogy milyen sorrendben jelöljük meg a lyukakat. Ehhez megszámozzuk a lyukakat: legyen 1-es az a lyuk, amit először megjelöltünk (azaz amiben kezdetben az első dió van), majd ettől az óramutató járása szerint haladva sorrendben az 1-es lyuk utáni a 2-es, mellette a következő a 3-as, és így tovább, a 2021-es lyuk után van az 1-es.

Most vizsgáljuk azokat a lyukakat, amiket úgy jelöltünk meg, hogy a megjelölés pillanatában mellettük két nem-megjelölt lyuk volt. Az 1-es lyuk nyilván ilyen (hiszen azt jelöltük meg először). Ezek szerint a 2-es lyukat úgy jelöltük meg, hogy mellette két megjelölt lyuk volt. Ebből következik, hogy a 3-as lyuk is olyan lyuk, amit úgy jelöltünk meg, hogy a megjelölés pillanatában mellette két nem-megjelölt lyuk volt. Ehhez hasonlóan az 5-ös lyuk is ilyen, majd a 7-es stb., és a 2021-es lyuk is ilyen. Ez viszont ellentmondás, hiszen amikor a 2021-es lyukat megjelöljük, akkor már van mellette egy megjelölt lyuk, az 1-es.

6. *Legyen $m \geqslant 2$ egész szám, A egy véges halmaza egész számoknak (amelyek nem feltétlenül pozitívak), és legyenek $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_m$ részhalmazai A-nak. Tegyük fel, hogy minden $k = 1, 2, \ldots, m$ esetén B_k elemeinek összege m^k. Bizonyítandó, hogy A legalább $m/2$ elemet tartalmaz.*

Füredi Erik megoldása. Legyen az A halmaz elemszáma x. Legyenek $y_1, y_2, \ldots, y_m$ egymástól nem feltétlenül különböző, m-nél kisebb természetes számok, mindegyik y_i értéke m-féle lehet ($1 \leqslant i \leqslant m$, i egész szám) és összesen m^m eset van. Ekkor az $y_1 m + y_2 m^2 + \ldots + y_m m^m$ összeg mind az m^m esetben egy-egy m-mel osztható, m^{m+1}-nél kisebb természetes szám felírása m-es számrendszerben, az 1-es helyiértéken 0 van, a felírás egyértelmű, így mind az m^m esetben különböző az összeg, a „csupa 0" eset 0 összegén kívül $m^m - 1$ különböző összegű eset van.

Bármely $y_1 m + y_2 m^2 + \ldots + y_m m^m$ összeg előáll A egyes elemeinek összegeként, némely elemeket esetleg többször belerakva az összegbe. Minden elem annyiszor szerepel az összegben, amennyi az őt tartalmazó B_k halmazokkal azonos indexű y_k számok összege. Ez a szám a definícióból következően legfeljebb m darab $m-1$-nél nem nagyobb nemnegatív egész szám összege, tehát legfeljebb $m^2 - m$. Így mind az x elem egy összegbeli létszáma $(m^2 - m + 1)$-féle lehet, ez legfeljebb $(m^2 - m + 1)^x$ eset, a csupa 0 eseten kívül $(m^2 - m + 1)^x - 1$. Ezen esetek összegei között ott van az előbb számolt $m^m - 1$ különböző összeg, így $(m^2 - m + 1)^x - 1 \geqslant m^m - 1$. $0 < m^2 - m + 1 < m^2$ a feladat $m \geqslant 2$ feltételéből, így $(m^2)^x - 1 > (m^2 - m + 1)^x - 1 \geqslant m^m - 1$, mivel x pozitív egész szám (A-nak kell, hogy legyen eleme pl. a B_1 részhalmaz elemösszegéhez). Ebből $(m^2)^x - 1 > m^m - 1$, így $m^{2x} > m^m$. Mivel m 1-nél nagyobb egész szám, ebből $2x > m$. Tehát x valóban legalább $m/2$ (sőt nagyobb), így A legalább $m/2$ elemet tartalmaz. A feladat állítását bebizonyítottuk.

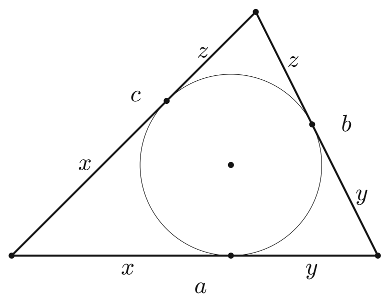
A háromszög-egyenlőtlenség alkalmazásai I.

Háromszög-egyenlőtlenségnek a matematika különféle területein más-más alakú becsléseket értenek, amelyek azonban nem függetlenek egymástól. Ez a közös elnevezés oka. A továbbiakban csak azokat tekintjük át, melyekkel a középiskolai szintű matematika feladatokban is találkozhatunk. Ezek (különböző mértékben) a következő témakörökben fordulnak elő: euklideszi geometria, vektorok, valós számok, komplex számok. A háromszög-egyenlőtlenség felsőbb matematikában használt általánosításaival (pl. norma) kapcsolatban az érdeklődő olvasónak az [1], [2], [3] műveket javasoljuk.

Az említett témakörök mindegyikének tárgyalását úgy végezzük, hogy rövid elméleti összefoglaló után kidolgozott példák megoldása következik. Az egyszerűbb példák alkalmasak lehetnek a tanár kollégák számára egy-egy óra színesítésére, gazdagítására, a nehezebbek szakköri feladatként használhatók. Diákoknak pedig tanulmányi versenyekre való felkészülésben nyújthatnak segítséget a feladatok. A szerző szinte minden feladatot „kipróbált” az elmúlt évtizedekben tanórákon, illetve szakköri foglalkozásokon. A közölt megoldásokban is felhasználtam tanítványaim ötleteit. A cikk végén felsorolunk még néhány feladatot, melyek megoldásához jól alkalmazható a leírt ötletek valamelyike. Az irodalomjegyzékben egyrészt a témakör mélyebb hátterét tárgyaló könyvek, másrészt olyan középiskolai szintű anyagok találhatók, melyek tanulmányozását jó szívvel ajánlom minden diáknak és kollégának. Végül szeretnék köszönetet mondani *Gulyás Tibor, Győry Ákos* és *Kubatov Antal* kollégáimnak, hogy a még nem publikált [7], illetve [10] anyagaikat rendelkezésemre bocsátották.

I.

Az euklideszi geometriában egy valódi (tehát szakasszá nem elfajuló) háromszög két oldalának összege nagyobb a harmadik oldalnál: $a+b>c$, $b+c>a$, $c+a>b$. Illetve megfordítva: ha adott három szakasz, melyek hossza a, b és c, továbbá ezekre érvényes a három egyenlőtlenség, akkor a szakaszokból háromszög szerkeszthető.



Fontos észrevétel az ún. dualitási helyettesítés. Pontosan akkor léteznek olyan $x,y,z>0$ pozitív számok, melyekre $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, ha van a síkon olyan háromszög, melynek oldalainak hossza a, b, c. A bizonyítás egyik irányból a háromszög-egyenlőtlenség triviális teljesülésén múlik. Másik irányból pedig azon, hogy minden háromszögnek van beírt köre, továbbá a beírt körhöz a csúcsokból húzott érintő szakaszok egyenlők. A dualitási helyettesítés jelentőségét az adja, hogy csak a háromszög oldalait tartalmazó becslések esetén áttérhetünk a segítségével az egymástól már független x, y, z pozitív változókra. Így geometria problémából algebrai problémát kapunk.

A háromszög-egyenlőtlenség általánosításaként fogható fel az a tétel, mely szerint egy töröttvonal nem lehet rövidebb a kezdő és végpontját összekötő szakasznál. Az állítást teljes indukcióval nem nehéz bizonyítani. Javasoljuk, hogy az olvasó ezt önállóan kísérelje meg.

A most következő feladatok többségében nem geometriai megfogalmazásúak. Az ismertetett megoldási módszer azonban olyan, amely geometriai modellt használ. További feladatokat illetően lásd még: [6], [9], [12], [13].

1. példa. *Igazoljuk, hogy háromszögben bármely két oldal hosszának eltérése kisebb a harmadik oldalnál:* $|a-b|<c$, $|b-c|<a$, $|c-a|<b$.

Megoldás. Az abszolút érték értelmezése miatt pl.:

$$|a-b|<c \iff -c<a-b<c,$$

amivel ekvivalens, hogy $b<c+a$ és $a<b+c$. Ugyanígy nyerhető a harmadik háromszög-egyenlőtlenség is.

2. példa. *Bizonyítsuk be, hogy ha* a, b, c *egy háromszög oldalainak hosszát jelöli, akkor*

$$a^2+b^2+c^2<2(ab+bc+ca).$$

1. megoldás. Mivel bármely x és y valós szám esetén $|x|\leqslant|y| \iff x^2\leqslant y^2$, így a háromszög-egyenlőtlenségből:

$$|a-b|<c \iff (a-b)^2<c^2,$$
$$|b-c|<a \iff (b-c)^2<a^2,$$
$$|c-a|<b \iff (c-a)^2<b^2.$$

Összeadás után

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca<a^2+b^2+c^2,$$
$$a^2+b^2+c^2<2ab+2bc+2ca.$$

2. megoldás. A dualitási helyettesítés: $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$, $x,y,z>$ >0. Beírva az oldalak helyére:

$$(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2<$$
$$<2(x+y)(y+z)+2(y+z)(z+x)+2(z+x)(x+y),$$
$$2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx<4xy+4yz+4zx+2x^2+2y^2+2z^2,$$
$$0<2xy+2yz+2zx,$$

ami nyilvánvaló.

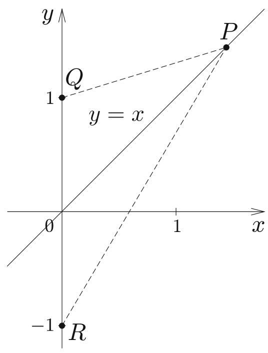
A 2 helyére kisebb szám nem írható, tehát a becslés éles. Ennek belátásához tekintsük az $a=b$, $c\to0$ határesetet. A dualitási helyettesítés számos alkalmazását tartalmazza Kubatov Antal tanár úr szakköri anyaga: [7].

3. példa. *Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:*

$$\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}=2.$$

Megoldás. Az egyenlet bal oldalán álló kifejezésben teljes négyzeteket kialakítva kapjuk, hogy

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{x^2+(x+1)^2}=2.$$



Ismeretes, hogy a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(a_1;a_2)$ és $B(b_1;b_2)$ pontok távolsága $AB = \sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$. Legyen P az $y=x$ egyenes valamely pontja, továbbá tekintsük a $Q(0;1)$ és $R(0;-1)$ pontokat. A távolságképlet szerint

$$PQ+PR=\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{x^2+(x+1)^2}.$$

A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$PQ+PR \geqslant QR=2,$$

továbbá egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha P pont az origóban van. Így az egyenlet egyetlen valós megoldása: $x=0$.

Megjegyzés. Hasonló típusú egyenleteket illetően lásd pl.: [8].

4. példa. *Az x, y, z pozitív számok összege* 1. *Határozzuk meg az*

$$S=\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+y^2}+\sqrt{1+z^2}$$

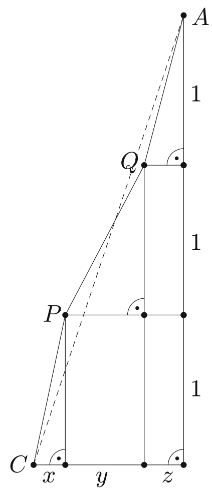
kifejezés legkisebb értékét.

Megoldás. Tekintsük az *ábrát.* A Pitagorasz-tétel alapján világos, hogy

$$AQ=\sqrt{1+z^2},$$

$$QP=\sqrt{1+y^2},$$

$$PC=\sqrt{1+x^2}.$$



Tehát S éppen az $AQPC$ töröttvonal hosszát adja meg, ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt akkor lesz minimális, ha P és Q illeszkedik az AC egyenesre.

Ekkor $x=y=z=\frac{1}{3}$, és a kifejezés minimuma

$$\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}\,.$$

5. példa. *Az a, b, c valós számokat jelölnek. Határozzuk meg az*

$$L=\sqrt{a^2+1+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+1+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+1+(1-a)^2}$$

kifejezés legkisebb értékét.

Megoldás. Tekintsük a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi pontokat:

$$A(1-a;0;0),\quad P(1;1-b;1),\quad Q(2-c;1;2),\quad B(2;2-a;3).$$

A két pont távolságára vonatkozó ismert képlet miatt:

$$AP=\sqrt{a^2+(1-b)^2+1^2},\qquad PQ=\sqrt{(1-c)^2+b^2+1^2},$$
$$QB=\sqrt{c^2+(1-a)^2+1^2},$$

így

$$L=AP+PQ+QB.$$

A háromszög-egyenlőtlenség alapján világos, hogy

$$L\geqslant AB=\sqrt{(1+a)^2+(2-a)^2+3^2}=\sqrt{2a^2-2a+14}=$$
$$=\sqrt{2\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{2}}\geqslant\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a=b=c=\frac{1}{2}$. A kifejezés minimális értéke $\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Megjegyzés. A megoldás során hivatkozott távolságképlet a következő. Ha

$$A(a_1;a_2;a_3)\quad \text{és}\quad B(b_1;b_2;b_3)$$

két adott pont a háromdimenziós euklideszi térben, akkor a két pont távolsága

$$AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+(a_3-b_3)^2}.$$

A bizonyítás a téglatest testátlójának kiszámítására vonatkozó ún. térbeli Pitagorasz-tétel segítségével természetes módon elvégezhető. Mélyebb ismeretként hivatkozhatunk a vektorok skaláris szorzatára is.

6. példa. *Igazoljuk, hogy ha a_k és b_k valós számok ($k=1,2,\ldots,n$), akkor*

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}.$$

Megoldás. Ekvivalens állításhoz jutunk, ha négyzetre emelünk:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2+\sum_{k=1}^{n} b_k^2+2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}\geqslant \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2.$$

Ebből a mindkét oldalon előforduló tagok levonása, majd 2-vel való osztás után:

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}\geqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k,$$

ami a jól ismert Cauchy-egyenlőtlenség. Egyenlőség pontosan akkor, ha $a_k=\lambda b_k$, ahol $\lambda>0$ adott valós szám.

Megjegyzés. Ha tekintjük az $\mathbf{a}(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ és $\mathbf{b}(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ vektorokat az n-dimenziós euklideszi térben, akkor a feladat állítása éppen a két vektorra érvényes háromszög-egyenlőtlenség:

$$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|\geqslant|\mathbf{a}+\mathbf{b}|.$$

(Részleteket illetően lásd [3] 8. fejezet: Euklideszi terek.)

A feladatban szereplő becslés általánosítható teljes indukcióval véges sok szám n-esre. Például három szám n-es esetén, ha azok $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ és $(c_1,c_2,\ldots,c_n)$, akkor

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2},$$

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+c_k)^2},$$

ezért

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{n} c_k^2}\geqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k+c_k)^2}.$$

(Az általánosításnál hivatkozhattunk volna a vektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség véges sok vektorra vonatkozó alakjára is.)

Ez után a megjegyzés után már könnyű látni, hogy az előző feladatok hátterében ugyanaz a becslés áll, melyet a világhírű matematikusról, Minkowskiról[1] neveztek el. A Minkowski-egyenlőtlenség diszkrét, véges változata azt mondja ki, hogy ha a_k és b_k valós számok $(k=1,2,\ldots,n)$, valamint $p>1$ valós szám, akkor

$$\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^p\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{k=1}^{n}|a_k+b_k|^p\right)^{1/p}.$$

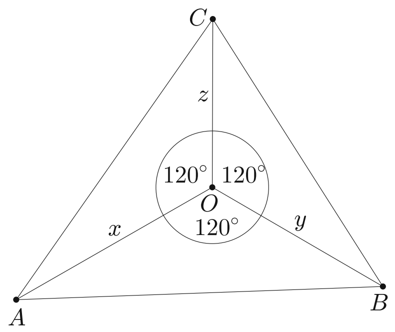
[1] *Hermann Minkowski* (1864–1909) német matematikus, Einstein egyik tanára Zürichben. Elegáns matematikai leírést adott a speciális relativitáselméletre.

A feladatban szereplő becslés az egyenlőtlenség $p=2$-re vonatkozó alakja. Az általános eset bizonyítása nem egyszerű, általában a Hölder-egyenlőtlenség[2] segítségével végzik. Ha $0<p<1$, akkor fordított irányú egyenlőtlenség érvényes. (A bizonyításokat lásd pl. [9]-ben.) Komplex számokra is érvényes ez a nevezetes egyenlőtlenség.

7. példa. *Legyenek x, y, z pozitív számok. Igazoljuk, hogy*

a) $$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}>\sqrt{y^2+yz+z^2},$$

b) $$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}<2(x+y+z).$$



Megoldás. Tekintsük a síkon a közös O végponttal rendelkező $OA=x$, $OB=y$, $OC=z$ hosszú szakaszokat, melyek páronként $120°$-os szöget zárnak be. A koszinusztétel miatt pl.

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos 120°,$$

$$AB=\sqrt{x^2+xy+y^2}.$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$BC=\sqrt{y^2+yz+z^2}\quad \text{és}\quad CA=\sqrt{z^2+zx+x^2}\,.$$

A háromszög-egyenlőtlenség szerint $AB+CA>BC$, ami az *a)* állítást bizonyítja.

Alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget rendre az OAB, OBC és OCA háromszögekre:

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}<x+y,$$

$$\sqrt{y^2+yz+z^2}<y+z,$$

$$\sqrt{z^2+zx+x^2}<z+x.$$

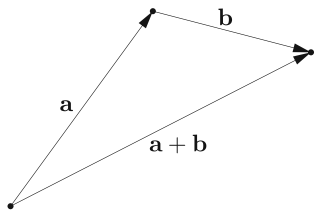
Összeadással nyerjük a *b)* állítást.

---

[2] A Hölder-egyenlőtlenség diszkrét, véges alakja szerint, ha $p,q>1$ és $1/p+1/q=1$, akkor az a_i és b_i nemnegatív valós számokra

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}.$$

II.



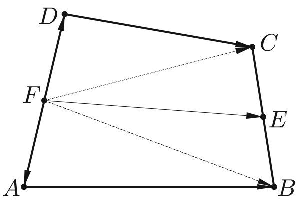
Ha **a** és **b** tetszőleges vektorok, akkor a vektorok összeadási szabályából azonnal látszik, hogy a hosszaikra $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a két vektor párhuzamos és azonos irányba mutat. (Másképpen mondva: egyik a másik pozitív számszorosa.) Ezt a becslést a vektorokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségnek hívjuk. Teljes indukciós gondolatmenettel az állítás véges sok vektorra kiterjeszthető:

$$|\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2+\ldots+\mathbf{v}_n| \leqslant |\mathbf{v}_1|+|\mathbf{v}_2|+\ldots+|\mathbf{v}_n|.$$

8. példa. *Az $ABCD$ négyszög BC és DA oldalainak felezési pontjai rendre E és F. Igazoljuk, hogy*

$$FE \leqslant \frac{AB+CD}{2}.$$

Mikor teljesül egyenlőség?



Megoldás. Vegyünk fel vektorokat az *ábrán* látható módon. Világos, hogy $\overrightarrow{FD}=-\overrightarrow{FA}$. A vektorok összeadásának paralelogramma-módszere alapján

$$\overrightarrow{FE}=\frac{\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}}{2}=\frac{\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DC}}{2}=$$

$$=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}.$$

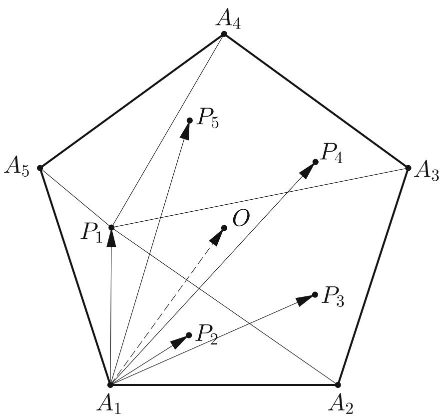
Alkalmazva a vektorokra érvényes háromszög-egyenlőtlenséget:

$$|\overrightarrow{FE}|=\frac{|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}|}{2} \leqslant \frac{|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{DC}|}{2} \ \Leftrightarrow\ FE \leqslant \frac{AB+DC}{2}.$$

Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $\overrightarrow{AB}$ és $\overrightarrow{DC}$ párhuzamosak és egy irányba mutatnak, amiből következik, hogy a négyszög trapéz. A bizonyított állítás szerint egy négyszög középvonala nem hosszabb, mint az őt közrefogó oldalak számtani közepe, valamint pontosan akkor van egyenlőség, ha a négyszög trapéz.

Egy vektorokkal kapcsolatos remek feladatgyűjtemény: [10].

9. példa. *Adott a síkon egy szabályos ötszög. Határozzuk meg azt a pontot a síkon, amelynek az ötszög csúcsaitól vett távolságainak összege minimális.*



Megoldás. Legyen P_1 a sík valamely pontja, melyet kössünk össze az $A_1A_2A_3A_4A_5$ szabályos ötszög csúcsaival. Forgassuk el az ötszög O középpontja körül a P_1 pontot 72°-kal, így adódik a P_2 pont. Megismételve az eljárást a P_2-re kapjuk a P_3 pontot. Ugyanígy adódnak a P_4 és P_5 pontok. A forgatások során az ötszög csúcsai mindig a rákövetkezőbe mennek át. Mindezekből kapjuk, hogy $P_1A_5 = P_2A_1$, $P_1A_4 = P_3A_1$, $P_1A_3 = P_4A_1$, $P_1A_2 = P_5A_1$, következésképpen

$$P_1A_1 + P_1A_2 + \ldots + P_1A_5 = P_1A_1 + P_2A_1 + \ldots + P_5A_1.$$

Indítsunk helyvektorokat az A_1 csúcsból a P_i pontokba, valamint a szabályos ötszög középpontjába. Ismeretes, hogy egy szabályos sokszög középpontjába mutató helyvektor a csúcsokba mutató helyvektorok számtani közepe, ezért $\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_1P_i} = 5 \cdot \overrightarrow{A_1O}$. A vektorok összegére vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt:

$$5|\overrightarrow{A_1O}| = \left|\sum_{i=1}^{5} \overrightarrow{A_1P_i}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{5} |\overrightarrow{A_1P_i}| = \sum_{i=1}^{5} A_1P_i = \sum_{i=1}^{5} P_1A_i.$$

Mivel $5|\overrightarrow{A_1O}|$ konstans, így a becslésből adódik, hogy a csúcsoktól mért távolságösszeg akkor minimális, ha P_1 egybeesik a szabályos ötszög középpontjával.

Megjegyzés. A megoldás tetszőleges szabályos n-szögre ugyanígy megy.

A feladat a [6] könyvből származik. E sorok írója szerint ez az egyik legjobb elemi matematika feladatgyűjtemény.

10. példa. *Adott a síkban n darab vektor, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. A vektorok abszolút értékeinek összege* 1. *Bizonyítsuk, hogy ezen vektorok halmazának van olyan nem üres részhalmaza, hogy a részhalmaz vektorai összegének abszolút értéke legalább* 1/6.

(*Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny* 2014/15, haladó *III*. kat. döntő)

Megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordináta-rendszert úgy, hogy semelyik vektor ne legyen párhuzamos egyik tengellyel sem. A vektorokat tekinthetjük helyvektoroknak, hiszen ez a hosszuk (abszolút értékük) összegét nem befolyásolja. Egy vektor koordinátái legyenek $\mathbf{v}_i(x_i; y_i)$, ekkor a vektor hossza $|\mathbf{v}_i| = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Két becslést alkalmazunk:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i| + |y_i|\big) \leqslant |\mathbf{v}_i| \leqslant |x_i| + |y_i|.$$

Az alsó becslés a számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség következménye:

$$\frac{|x_i|+|y_i|}{2} \leqslant \sqrt{\frac{|x_i|^2+|y_i|^2}{2}} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|x_i|+|y_i|\big) \leqslant |\mathbf{v}_i|.$$

A felső becslés pedig a háromszög-egyenlőtlenségből jön ki, hiszen $\mathbf{v}_i = x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j}$ miatt ($\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ a bázisvektorok)

$$|\mathbf{v}_i| = |x_i\mathbf{i} + y_i\mathbf{j}| \leqslant |x_i\mathbf{i}| + |y_i\mathbf{j}| = |x_i| + |y_i|.$$

Most bontsuk négy csoportra a vektorokat aszerint, hogy melyik síknegyedbe esnek. Számoljuk ki minden csoportban a vektorok tengelyeken vett merőleges vetületeinek összhosszát. Biztos lesz olyan síknegyed, ahol a vetületek összhossza legalább $1/4$, hiszen a fenti felső becslés alapján a négy csoportban összesen legalább 1 a vetületek összhossza. Azt is feltehetjük, hogy ez az első síknegyedben áll elő, tehát itt minden koordináta pozitív. (A tengelyek megfelelő forgatásával elérhető ez a helyzet.) Jelölje az első síknegyedbe eső vektorokat $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$. Tudjuk, hogy

$$\frac{1}{4} \leqslant \sum_{i=1}^{k}(x_i+y_i) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i,$$

ahol az összegzés már csak a $\mathbf{w}_i$ vektorokra vonatkozik, és az abszolútértékek a síknegyed megválasztása miatt voltak elhagyhatók. Végül a fenti alsó becslést alkalmazva:

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\mathbf{w}_i\right| = \left|\left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\mathbf{i} + \left(\sum_{i=1}^{k} y_i\right)\mathbf{j}\right| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i\right) \geqslant \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{6}.$$

E megoldás mellett további megoldások olvashatók [14]-ben a 2014/15. évi verseny döntőiről szóló beszámoló 50–56. oldalain. Ugyanitt szerepel annak bizonyítása is, hogy az alsó korlát értéke $1/\pi$-re erősíthető, ami az elérhető legjobb.

11. példa. *Az α, β, γ szögekről tudjuk, hogy* $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geqslant 2$. *Bizonyítsuk be, hogy*

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \sqrt{5}\,.$$

Megoldás. Tekintsük az $\mathbf{a}(\sin\alpha; \cos\alpha)$, $\mathbf{b}(\sin\beta; \cos\beta)$, $\mathbf{c}(\sin\gamma; \cos\gamma)$ egységvektorokat. Ekkor

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = (\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos y)^2 \geqslant$$
$$\geqslant 4 + (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2.$$

A vektorokra érvényes háromszög-egyenlőtlenség, valamint a skaláris szorzatról tudottak miatt

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| + |\mathbf{c}| = 3,$$
$$\big(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}\big)^2 \leqslant 9,$$

amit a korábbi becsléssel összevetve a bizonyítandó állítás adódik.

Szakirodalom

[1] Szőkefalvi-Nagy Béla: *Valós függvények és függvénysorok,* Tankönyvkiadó (1981).
[2] Riesz Frigyes, Szőkefalvi-Nagy Béla: *Funkcionálanalízis,* Tankönyvkiadó (1988).
[3] Freud Róbert: *Lineáris algebra,* ELTE, Eötvös Kiadó (2009).
[4] Reiman István: *Geometria és határterületei,* Gondolat (1986).
[5] Titu Andreescu – Dorin Andrica: *Complex Numbers from A to … Z,* Birkhäuser (2006).
[6] Arthur Engel: *Problem-Solving Strategies,* Springer (1998).
[7] Kubatov Antal: *A dualitási helyettesítés,* kézirat.
[8] Olosz Ferenc: *Egyenletek I–II.,* Zalamat (2012).
[9] Ábrahám Gábor: *Egyenlőtlenségek I–II.,* Zalamat (2017).
[10] Gulyás Tibor, Győry Ákos: *Vektorok,* kézirat.
[11] Schultz János: *Elemi matematikai versenyfeladatok,* Zalamat (2011).
[12] Schultz János: *Elemi matematika mesterfokon,* Zalamat (2015).
[13] Besenyei Ádám: *Kalandozás a nevezetes egyenlőtlenségek világában,* előadások (2017). `https://abesenyei.web.elte.hu/mattanar/17o/egyenl17o/egyenl17o.php`.
[14] `https://www.bolyai.hu/arany-daniel-matematikaverseny-korabbi-evek-feladatai-es-megoldasai`.

Schultz János

KöMaL Ifjúsági Ankét 2021

A koronavírus ellenére szerencsére idén sikerült megrendezni személyesen a KöMaL Ankétot. A szokásos módon regisztrációval és ajándékosztással indult a program. Még az előadások előtt totó helyett fejtörők tették próbára a diákokat és tanárokat egyaránt. Az előadásokat rendhagyó módon két kerekasztal-beszélgetés követte. A kerekasztal-beszélgetés során a versenyzőknek lehetőségük nyílt kérdezni a javítókat és a szerkesztőségi tagokat. Idén az ebéd az Ericsson épületében volt. Az ebéd után szokásos módon a konferenciateremben zajlott a díjkiosztó, melyet előadások tarkítottak. Az első napot állófogadás zárta.

Másnap kísérletezéssel kezdtünk. A kísérletek az IYPT-en kitűzött versenyfeladatokból lettek válogatva, melyet korábbi versenyzők mutattak be. Ezután két kísérleti problémát ismerhettünk meg alaposabban ugyanebből a versenyből. Az előző nap mintájára egy kerekasztal-beszélgetéssel folytattuk, ahol szó esett a jó értékelésekről és tipikus hibákról a dolgozatokban. Még az ebéd előtt megismerhettük az adatninjákat és belepillanthattunk a világukba. A délután folyamán először a hajításokba mélyedhettünk el, és zárásul narancsok segítségével kerülhettünk közelebb a gömbi geometriához.

Mi úgy gondoljuk, hogy a teljes ankét tanulságos és hasznos volt és reméljük, hogy jövőre ismét sok versenyzővel találkozhatunk.

Kovács Bence, Róka Bálint
(jelenlegi javítók, volt versenyzők)

Gyakorló feladatsor
emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x}+\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\frac{13}{27}. \qquad (\textit{5 pont})$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a $\left[\frac{\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ intervallumon:

$$1+4\sin x-4\cos^2 x=0. \qquad (\textit{6 pont})$$

2. *a*) Kata és Máté nemrég tanulták az iskolában az osztókat. Kitaláltak egy játékot. A játékot Kata kezdi és felváltva mondanak az n pozitív egész szám osztói közül egyet úgy, hogy olyan osztót nem mondhatnak, amely korábban már elhangzott. Az veszít, aki már nem tud újabb osztót mondani. Hány olyan n pozitív egész szám van az $\{1;2;3;\ldots;25\}$ halmazban, amely esetén Kata nyer? (*4 pont*)

b) Hány olyan n pozitív egész szám van a $\{1;2;3;\ldots;2021\}$ halmazban, amelyre igaz, hogy $2^{n+3}+2^n$ négyzetszám? (*5 pont*)

c) Adjuk meg a p valós paraméter lehetséges értékeit, ha az alábbi polinom összevont alakjában a másodfokú tag együtthatója -3:

$$(x-1)^2\cdot(p+2x)^2. \qquad (\textit{5 pont})$$

3. *a*) Egy dobozban van 7 különböző pár kesztyű. A dobozból egyesével, visszatevés nélkül húzunk ki kesztyűket mindaddig, amíg nem kapunk egy pár kesztyűt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ehhez legfeljebb 3-szor kell húzzunk a dobozból? (*7 pont*)

b) Az iskola 11.-es és 12.-es legjobb 12 matekos diákjának nemek szerinti és évfolyam szerinti eloszlását a *táblázat* tartalmazza. A tanáruk véletlenszerűen választott közülük diákokat a körzeti matekversenyre. A verseny szabályzata szerint egy csapatban ketten indulnak (a csapattagok között nincs kitüntetettség), akik közül legalább az egyikük lány (akár mindkettő résztvevő lehet lány) és a két résztvevő nem lehet ugyanarról az évfolyamról. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a tanáruk a versenyszabályzatnak megfelelő nevezést adott le? Eredményünket 3 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

	11.-es	12.-es
Fiúk	4	3
Lányok	2	3

4. Adott az $x^2+y^2+18x-4y+45=0$ egyenletű k kör.

a) Igazoljuk, hogy a k kör középpontjának koordinátái $K(-9;2)$. (*2 pont*)

b) Határozzuk meg a k kör $P(-7;8)$ pontjába húzható érintőjének egyenletét. (*3 pont*) *c*) Adottak az $A(1;1)$, $B(10;4)$, $C(2;8)$ pontok. Mutassuk meg, hogy a három pont által meghatározott háromszög köré írható körének középpontja illeszkedik az $x+3y=17$ egyenletű egyenesre. (*9 pont*)

II. rész

5. Egy derékszögű háromszög oldalaiból álló minta terjedelme 18 egység, a medián 24 egység.

a) Igazoljuk, hogy a háromszög oldalainak hossza 7; 24 és 25 egység. (*5 pont*)

b) Adjuk meg a háromszög beírt és köré írt körének középpontjának távolságát. (*7 pont*)

A fenti háromszög befogóin megjelöljük azokat a belső osztópontokat, amelyek a derékszögű csúcstól egész egység távolságra helyezkednek el.

c) Hány olyan háromszög adható meg, melyeknek csúcsai ezen belső osztópontok közül kerülnek ki? (*4 pont*)

6. *a*) Ottónak 55 emelt matekos diákja van, akikkel tesztet írat koordinátageometriából.

A teszten 3 kérdés van és minden egyes kérdésre 3 válaszlehetőség, melyek közül pontosan 1 helyes válasz van. Mutassuk meg, hogy van legalább 3 olyan diák, akik pontosan ugyanúgy töltötték ki a tesztet. (Két tesztkitöltést akkor tekintünk azonosnak, ha az egyes kérdésekre adott válasz minden egyes esetben megegyezik.) (*5 pont*)

b) A fenti 55 diák közül András, Bogi, Csaba, Dani, Emese, Feri, Gizi és Huba úgy töltötték ki a teszt első kérdését, hogy minden egyes válaszlehetőség legalább egyszer előfordult a válaszaik között (3 válaszlehetőség volt minden egyes kérdésre). Hányféle különböző kitöltést tud adni a 8 tanuló csak az első kérdésre, ha csak az számít, hogy az egyes válaszlehetőségeket hányan jelölték meg? (*6 pont*)

c) A diákok közül Ilona, József, Kati, Laci, Marci és Nóri nagyon rosszul teljesítettek a teszten, ezért Ottó úgy döntött, hogy a jobb teljesítés érdekében alakítsanak ki tanulópárokat (azaz 2 diákból álló csoportokat). Hányféleképpen alakíthat ki a 6 diák tanulópárokat, ha az egyes tanulópárok között és a tanulópárokon belül sincs kitüntetettség a diákok között? (*5 pont*)

7. Szorgalmas Szonja elhatározza, hogy koordinátageometriai hiányosságait szorgos gyakorlással orvosolja. Ezért minden egyes nap megold 20 ilyen jellegű feladatot. Még nem megy neki olyan jól, ugyanis minden nap csak 5 feladatot tud helyesen megoldani.

Egy héten át minden egyes nap megkéri Lusta Lujzát, hogy ellenőrizze le mind a 20 feladatot. Lujza nem nézi végig az összes feladatot. Minden egyes nap csak 3, általa véletlenszerűen kijelöltet ellenőriz le.

a) Mutassuk meg, hogy három tizedesjegyre kerekítve 0,601 annak a valószínűsége, hogy az adott napon a 3 ellenőrzött feladatból lesz helyesen megoldott feladata Szonjának. (*4 pont*) *b*) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a 7 nap alatt legfeljebb egyszer fordul elő az, hogy lesz helyesen megoldott feladata Szonjának? Válaszunkat 4 tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

c) Legalább hány napon keresztül kell Lujzának átnéznie a feladatokat az ő sajátos módszerével, hogy legalább 99,99%-os valószínűséggel legyen olyan nap, amikor van helyesen megoldott feladata Szonjának? (*7 pont*)

8. *a*) Egy számtani sorozat első 9 tagjának összege 198. Mekkora a sorozat első tagja és differenciája, ha az első 18 tagjának összege 639? (*4 pont*)

b) Egy mértani sorozat hányadosa 2. A sorozat n-edik tagja 16 és az első n tag összege 31,75. Határozzuk meg n értékét. (*5 pont*)

c) Igazoljuk, hogy az $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ sorozat szigorúan monoton növekedő. (*5 pont*)

d) Adjuk meg az $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$ sorozat legkisebb tagját. (*2 pont*)

9. Adott az 3; 4; 5; $x+7$; $11-x$ öt elemből álló minta.

a) Mutassuk meg, hogy a minta szórásnégyzete $\frac{2x^2-8x+40}{5}$. (A minta szórásnégyzete a minta szórásának a négyzete.) (*5 pont*)

b) Írjuk fel az $f(x) = \frac{2x^2-8x+40}{5}$ függvénynek az $x_0 = 7$ abszcisszájú pontjába húzható érintőjének az egyenletét. (Abszcissza: a pont első koordinátája.) (*5 pont*)

c) Mekkora területet zár közre az x tengely, az $x=0$; $x=6$ egyenes és az $f(x) = \frac{2x^2-8x+40}{5}$ függvény? (*6 pont*)

Fridrik Richárd
Szeged

Megoldásvázlatok a 2021/7. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *A karát egy viszonyszám, amely megmutatja, hogy mekkora az aranyötvözetben az arany tömegaránya.*

a) *Hány gramm ezüstöt tartalmaz egy* 10 *karátos* 0,06 kg *tömegű nyaklánc, amely csak aranyat és ezüstöt tartalmaz, ha a színarany* 24 *karátos?* (*2 pont*)

b) *Hány gramm aranyat olvasszon a nyaklánchoz az ötvös, ha* 18 *karátos ötvözetet szeretne létrehozni?* (*4 pont*)

c) *Az ötvösmester pontosan* 25 *éve hordja az egyik aranygyűrűjét, és megállapította, hogy időközben a gyűrű aranytartalmának tömege* 0,012 milligrammal *csökkent. Számítsuk ki, hogy naponta hány aranyatom vált le a gyűrűről, ha* 197 gramm *arany hozzávetőlegesen* $6 \cdot 10^{23}$ *darab aranyatomot tartalmaz. (Feltételezzük, hogy a kopás egyenletesen ment végbe, és tudjuk, hogy ezen időszakban* 5 *szökőév volt.)* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A tízkarátos ötvözet tömegének $\frac{10}{24}$ része arany, $\frac{14}{24}$ része ezüst, tehát a nyaklánc ezüsttartalma $60\cdot\frac{14}{24}=35$ gramm.

b) *1. megoldás.* Ha x gramm aranyat olvasztunk hozzá, akkor a teljes tömeg $60+x$ gramm, az arany tömege pedig $25+x$ grammra nő, amely az össztömeg $\frac{18}{24}$ része. Ezek alapján felírhatjuk a következő egyenletet:

$$(60+x)\cdot\frac{18}{24}=25+x.$$

Rendezés és ekvivalens átalakítások után $x=80$, az ötvösnek 80 g aranyat kell hozzáolvasztani a nyaklánchoz.

2. megoldás. Ha aranyat olvasztunk hozzá, akkor az ezüsttartalom tömege változatlanul 35 g. 18 karátos ötvözet esetén ez a teljes tömeg $\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$ része, tehát az ötvözet tömege $35\cdot 4=140$ g. Eredetileg 60 g volt, így $140-60=80$ gramm aranyat kell hozzáolvasztani.

c) Az adott időszakban 20 szokásos és 5 szökőév volt, így összesen $20\cdot 365+{}$ $+\,5\cdot 366=9130$ nap telt el.

Összesen a gyűrűről

$$\frac{0{,}012\cdot 10^{-3}}{197}\cdot 6\cdot 10^{23}=3{,}65\cdot 10^{16}$$

darab aranyatom vált le, amelyet a napok számával elosztva megkapjuk, hogy egyenletes kopás esetén naponta $4\cdot 10^{12}$ (négyezer-milliárd, azaz négybillió) darab aranyatom távozott az ékszerről.

2. *Egy derékszögű háromszög egyik befogójának hossza egyenlő a másik két oldalhossz számtani közepével, kerülete* 276 egység.

a) *Mekkora a háromszög köréírt körének a területe?* (*8 pont*)

b) *Mekkora a háromszög beírt körének a kerülete?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A derékszögű háromszög nem egyenlő szárú, mert akkor a két befogó ugyanolyan hosszú lenne, így nem teljesülne a feladat első feltétele. Ekkor a két befogó hosszát a-val, illetve b-vel, az átfogó hosszát c-vel jelölve, feltehetjük, hogy $0<a<b<c$. Az első feltétel alapján felírhatjuk a következő egyenletet: $b=\frac{a+c}{2}$, amelyből $2b=a+c$.

A háromszög kerülete: $K=a+b+c=276$, amelybe $a+c$ helyére $(2b)$-t helyettesítve azt kapjuk, hogy $3b=276$, azaz $b=92$ egység. $a+c=2b$ alapján $a+c=184$, amelyből kifejezzük az egyik ismeretlent: $a=184-c$.

Pitagorasz tétele alapján felírhatjuk az $a^2+b^2=c^2$ egyenletet, amelybe a fentieket behelyettesítve: $(184-c)^2+92^2=c^2$, majd a zárójelet felbontva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$c=\frac{184^2+92^2}{368}=115 \text{ egység.}$$

A köréírt kör sugarának hossza $R=\frac{c}{2}=57{,}5$ egység.

A háromszög köréírható körének területe: $T_{\text{kör}}=R^2\pi=57{,}5^2\cdot\pi\approx 10\,386{,}9$ területegység.

b) 1. megoldás. A háromszög területe: $T=\frac{ab}{2}=3174$ területegység, félkerülete $s=\frac{K}{2}=138$ egység.

Most a háromszög területére vonatkozó $T=r\cdot s$ képletből kifejezzük a háromszögbe írt kör sugarának hosszát:

$$r=\frac{T}{s}=\frac{3174}{138}=23 \text{ egység.}$$

A háromszög beírt körének sugara 23 egység hosszúságú. A beírt kör kerülete: $K_{\text{kör}}=2r\pi=46\pi$ egység $\approx 144{,}5$ egység.

2. megoldás. Ismert, hogy a derékszögű háromszögbe írható kör sugarának hossza kiszámítható a háromszög oldalhosszainak segítségével a következőképpen:

$$r=\frac{a+b-c}{2}=\frac{69+92-115}{2}=23 \text{ egység.}$$

A beírt kör kerülete: $K_{\text{kör}}=2r\pi=46\pi\approx 144{,}5$ egység.

3. *a) Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amelynek négyzete osztható* 504*-gyel?* (*3 pont*)

b) Az első 504 *természetes szám közül véletlenszerűen kiválasztunk egyszerre négy különböző számot. Mekkora a valószínűsége, hogy legalább az egyik nagyobb* 400*-nál?* (*5 pont*)

c) Melyik számrendszerben írtuk fel a háromjegyű 352 *számot, ha értéke egyenlő lett a hatos számrendszerben felírt* 504 *értékével?* (*6 pont*)

Megoldás. *a)* A szám prímtényezős felbontása: $504=2^3\cdot3^2\cdot7$, amelyben szerepelnek páratlan kitevők, így ez nem négyzetszám. A páratlan kitevőket a náluk nagyobb páros számok közül a legkisebbre cserélve olyan négyzetszámot kapunk, amely osztható 504-gyel, és az ilyen négyzetszámok közül a legkisebb: $2^4\cdot3^2\cdot7^2$. Ez a szám a $2^2\cdot3\cdot7=84$ négyzete.

Megmutattuk, hogy a 84 a legkisebb olyan pozitív egész szám, amelynek négyzete osztható 504-gyel.

b) 504 különböző elemből kiválasztunk egyszerre négyet, így összesen $\binom{504}{4}$ eset van.

Az első természetes számnak a nullát tekintve, az ötszáznegyedik természetes szám az 503 lesz. Ezek közül 103 darab szám nagyobb, 401 darab szám pedig nem nagyobb 400-nál. Számítsuk ki a komplementer esemény bekövetkezésének valószínűségét! Ez azt jelenti, hogy a kiválasztott számok egyike sem nagyobb 400-nál, azaz mind a négy kisebb vagy egyenlő, mint 400, így az esetek száma $\binom{401}{4}$. Ekkor

$$p'=\frac{\binom{401}{4}}{\binom{504}{4}}\approx 0{,}4,$$

ami a komplementer eseményre vonatkozik.

A keresett valószínűség: $p=1-p'=0{,}6$.

c) A feladat feltételei alapján felírhatjuk a következő egyenletet: $352_x = 504_6$, ahol $x > 5$ egész szám.

Az egyenlet mindkét oldalán a helyiértékek segítségével felírjuk a számjegyek valódi értékét, melyek összege az adott szám értékével egyenlő: $3 \cdot x^2 + 5 \cdot x^1 + 2 \cdot x^0 = 5 \cdot 6^2 + 0 \cdot 6^1 + 4 \cdot 6^0$, amelyből a kijelölt műveletek elvégése, majd rendezés után a $3x^2 + 5x - 182 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek gyökei $x_1 = 7$, illetve $x_2 = -\frac{26}{3}$, ezek közül csak az első megoldás elégíti ki a feltételeket, tehát a kérdéses számot a hetes számrendszerben írtuk fel.

4. *A KöMaL Facebook oldalán minden bejegyzésnél pontosan* 2 *vagy pontosan* 3 *(különböző) szerepel az előre meghatározott* 10*-féle hashtagből, melyek között megtalálható a* `#ankét` *és a* `#kömalpóló` *is. Az adminisztrátorok megállapodtak, hogy amennyiben egy bejegyzésnél szerepel a* `#ankét`*, akkor szerepel a* `#kömalpóló` *is.*

a) Hány poszt jelenhet meg októberben úgy, hogy bármely kettőben különbözzön a hashtagek halmaza, ha ősszel minden posztban szerepel a `#kömalpóló`*?* (*3 pont*)

b) Az adminisztrátorok eredeti megállapodásának betartásával hány poszt jelenhet meg úgy, hogy bármely kettőben különbözzön a hashtagek halmaza, ha más megállapodás nincs? (*4 pont*)

c) A két adminisztrátort megkérdezték, hogy összesen hányan kedvelték a szeptemberi bejegyzéseket. Az egyik így válaszolt: „Minden szeptemberi bejegyzést ugyanannyian lájkoltak. Ha 2*-vel kevesebb bejegyzés lett volna és mindegyiket* 42*-vel többen kedvelték volna, akkor* 744*-gyel több lájkot gyűjtöttünk volna." A másik adminisztrátor válasza így hangzott: „Ha* 3*-mal többször posztoltunk volna, de mindegyiket félszázzal kevesebben kedvelték volna, akkor* 976*-tal kevesebb lájkunk lett volna." Összesen hány lájkot gyűjtöttek szeptemberben?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A `#kömalpóló` mellé a másik 9 darab hashtagből kell választani még egyet, illetve kettőt, így összesen $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 9 + 36 = 45$ különböző eset van, így legfeljebb 45 poszt jelenhet meg októberben, amely megfelel a feltételeknek.

b) *1. eset.* Ha szerepel a `#ankét`, akkor a `#kömalpóló` is ott van, ezért a maradék 8 hashtagből már nem kell egy sem, vagy egy kell közülük, így ekkor $\binom{8}{0} + \binom{8}{1} = 1 + 8 = 9$ különböző eset van.

2. eset. Ha nem szerepel a `#ankét`, akkor a másik 9 darab hashtagből kell mindkettőt, illetve mindhármat kiválasztani, ezért ekkor $\binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120$ különböző eset van.

Összesen $9 + 120 = 129$ poszt jelenhet meg úgy, hogy bármely kettőben különbözzön a hashtagek halmaza, ha más megállapodás nincs.

c) A szeptemberi bejegyzések számát x-szel, az egy-egy bejegyzést kedvelők számát y-nal jelölve, a szeptemberi kedvelések száma összesen $x \cdot y$, ekkor a feladatban megadott adatok alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$(x-2)(y+42) = x \cdot y + 744,$$
$$(x+3)(y-50) = x \cdot y - 976,$$

amelyből a műveletek elvégzése és rendezés után azt kapjuk, hogy

$$42x - 2y = 828,$$
$$-50x + 3y = -826.$$

Ezt többféleképpen megoldhatjuk, például az egyenlő együtthatók módszerével úgy, hogy az első egyenletet 3-mal, a másodikat 2-vel megszorozzuk, majd a kapott egyenleteket összeadva a $26x = 832$ egyenlethez jutunk. Ebből $x = 32$, amelyet behelyettesítve az eredeti egyenletek bármelyikébe, kiszámoljuk, hogy $y = 258$.

Szeptemberben összesen $32 \cdot 258 = 8256$ lájkot kaptak.

Ellenőrzés: Ha $32 - 2 = 30$ bejegyzés lett volna, és minden bejegyzésre $258 + 42 = 300$ kedvelés érkezett volna, akkor $30 \cdot 300 = 9000$ lájk gyűlt volna össze, ami valóban 744-gyel több, mint a 8256.

Ha pedig $32 + 3 = 35$ bejegyzés lett volna, és mindegyiket $258 - 50 = 208$ fő lájkolta volna, akkor $35 \cdot 208 = 7280$ lájk jött volna összesen, ami tényleg 976-tal kevesebb, mint a 8256.

II. rész

5. *Adott a k kör, amelynek egyenlete $x^2 + y^2 = 20x - 21y$ és a $P\left(-\frac{1}{2}; p\right)$ pont, ahol p valós paraméter.*

a) Határozzuk meg a p valós paraméter összes értékét, amelyre P a k körön kívül helyezkedik el. (*5 pont*)

Legyen az AB szakasz a k kör azon átmérője, amelyre illeszkedik a $Q(5; -5{,}25)$ pont.

b) Számítsuk ki az A és a B pont koordinátáit! (*5 pont*)

A k körön belül véletlenszerűen rábökünk egy pontra.

c) Adjuk meg annak a valószínűségét, hogy a kiválasztott pont nincs messzebb a k kör középpontjától, mint a Q pont! (*6 pont*)

Megoldás. *a)* Az egyenlet valóban egy kör egyenlete. Ezt az egyenlet teljes négyzetté alakításával igazolhatjuk:

$$(x - 10)^2 + \left(y + \frac{21}{2}\right)^2 = \frac{841}{4}.$$

A P pont akkor és csak akkor van a körön kívül, ha a kör középpontjától mért távolsága nagyobb, mint a kör sugara, azaz koordinátái kielégítik az alábbi egyenlőtlenséget:

$$(x - 10)^2 + \left(y + \frac{21}{2}\right)^2 > \frac{841}{4}.$$

Ezt átrendezve az $x^2 + y^2 > 20x - 21y$ egyenlőtlenséghez jutunk.

A P pont koordinátáit behelyettesítjük az egyenlőtlenség megfelelő változóinak helyére:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + p^2 > 20 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 21p,$$

majd elvégezzük a kijelölt műveleteket és nullára redukálunk:

$$p^2 + 21p + \frac{41}{4} > 0.$$

A kapott egyenlőtlenség megoldása: $p < -\frac{41}{2}$ vagy $p > -\frac{1}{2}$, ezen értékek megfelelnek a feltételeknek, így a megoldáshalmaz a következő:

$$p \in \left]-\infty; -\frac{41}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2}; \infty\right[.$$

b) A kör középpontja illeszkedik az átmérőre, ezért a kör középponti egyenletéből kiolvassuk a K középpont koordinátáit és a sugár hosszát: $K\left(10; -\frac{21}{2}\right)$,

$$r = \sqrt{\frac{841}{4}} = \frac{29}{2} \text{ egység.}$$

Az AB átmérőre illeszkedik a Q és a K pont is, így egyenesének egyenlete felírható a két pont koordinátáinak segítségével:

$$d:\ (10-5)\big(y-(-5{,}25)\big) = \big(-10{,}5-(-5{,}25)\big)(x-5),$$

amelyből ekvivalens átalakítások után a $d:\ y = -\frac{21}{20}x$ egyenletet kapjuk.

Az A és a B pont egyaránt illeszkedik a k körre és a d egyenesre, így koordinátáikat az alábbi egyenletrendszer megoldásaiként kapjuk meg:

$$x^2 + y^2 = 20x - 21y,$$
$$y = -\frac{21}{20}x.$$

Az első egyenletben y helyett $\left(-\frac{21}{20}x\right)$-et írva, majd rendezve, a

$$\frac{841}{400}x^2 - \frac{841}{20}x = 0$$

hiányos másodfokú egyenlethez jutunk, amelyet szorzattá alakítva az $x_1 = 0$ és $x_2 = 20$ gyököket kapjuk.

A kapott értékeket visszahelyettesítve a második egyenletbe: $y_1 = 0$ és $y_2 = 21$, így a keresett két pont az $A(0;0)$ és a $B(20;-21)$.

c) A keresett valószínűség megegyezik a K középpontú, KQ sugarú kör területének és a k kör területének hányadosával, ami éppen a megfelelő sugárhosszak arányának négyzetével egyenlő: $r_k = 14{,}5$ egység, $|KQ| = \sqrt{5^2 + 5{,}25^2} = 7{,}25$ egység,

$$p = \left(\frac{7{,}25}{14{,}5}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

6. *Nevesincs szigeten felmérést végeztek az idén érettségiző* 152 *diák megkérdezésével. Az első kérdés arra vonatkozott, hogy ki hány tárgyból vizsgázik közép-, illetve emelt szinten. A válaszokat az alábbi táblázat mutatja:*

		középszintű vizsgák száma					
		0	1	2	3	4	5
emelt szintű vizsgák száma	0	**0**	**8**	**3**	**5**	**2**	**25**
	1	**1**	**2**	**3**	**10**	**20**	**2**
	2	**3**	**4**	**7**	**22**	**6**	**0**
	3	**1**	**3**	**10**	**8**	**1**	**0**
	4	**0**	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**
	5	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Például 20 *olyan diák van, aki* 4 *tárgyból középszintű,* 1 *tárgyból pedig emelt szintű vizsgára jelentkezett, ugyanakkor* 5 *tanuló* 3 *tárgyból középszinten vizsgázik, emelt szintű vizsgát pedig idén nem tesz.*

a) Összesen hány emelt szintű vizsgát terveznek a diákok? (*3 pont*)

b) Hányan érettségiznek pontosan 5 *tárgyból?* (*3 pont*)

c) Határozzuk meg a legfeljebb 4 *tárgyból vizsgázók között a középszintű vizsgák számának leggyakoribb értékét, illetve mediánját!* (*5 pont*)

d) Számítsuk ki az egy főre jutó átlagos vizsgaszámot! (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Az emelt szintű vizsgák száma:

$$0\cdot(8+3+5+2+25)+1\cdot(1+2+3+10+20+2)+2\cdot(3+4+7+22+6)+$$
$$+3\cdot(1+3+10+8+1)+4\cdot(1+2+1)+5\cdot 2=0+38+84+69+16+10=$$
$$=217 \text{ darab.}$$

b) Pontosan 5 tárgyból vizsgázik, aki

- 5 középszintű vizsgát tesz, és nem vizsgázik emelt szinten (a táblázat utolsó oszlopának a legfelső sorában szerepel): 25 fő,
- 4 középszintű és 1 emelt szintű vizsgát tesz (utolsó előtti oszlop második sorában): 20 fő,
- 3 középszintű és 2 emelt szintű vizsgát tesz (negyedik oszlop harmadik sorában): 22 fő,
- 2 középszintű és 3 emelt szintű vizsgát tesz (harmadik oszlop negyedik sorában): 10 fő,
- 1 középszintű és 4 emelt szintű vizsgát tesz (második oszlop ötödik sorában): 1 fő,
- 5 emelt szintű vizsgát tesz, és nem tesz középszintű érettségit (első oszlop utolsó sorában): 2 fő.

Összesen: 80 fő tesz pontosan öt tárgyból érettségit idén.

c) A legfeljebb négy tantárgyból vizsgázók a táblázatban éppen a *b*) részben szereplő (pontosan 5 tantárgyból vizsgázók) fölött vannak, tehát az 1. oszlop felső 5 sorában, a 2. oszlop felső 4 sorában, és így tovább, mindig 1-gyel kevesebb sorban, amíg eljutunk az uolsó oszlopba, ahol nincs ilyen tanuló. Oszloponként összeadva a létszámot, megkapjuk, hogy középszinten hányan tesznek egy adott számú vizsgát. Táblázatba foglalva:

középszintű vizsgák száma	0	1	2	3	4
vizsgázók száma (a legfeljebb 4 tárgyból vizsgázók közül)	5	17	13	15	2

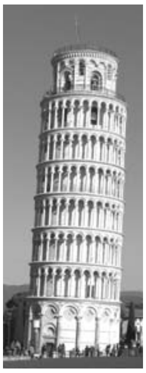
Az így kapott adathalmaz módusza az 1, mediánja pedig a 2, tehát a legfeljebb 4 tárgyból vizsgázók között a középszintű vizsgák számának leggyakoribb értéke az 1 (darab) vizsga, mediánja pedig a 2 (darab) vizsga.

d) Az egy főre jutó átlagos vizsgaszámot úgy számítjuk ki, hogy a vizsgák számát elosztjuk a létszámmal.

A *b*) feladatrészben láttuk, hogy a pontosan egy adott számú vizsgát tevő diákok a táblázatban átlósan találhatóak, így összeadjuk a számokat és megszorozzuk a vizsgák számával. Az így kapott szorzatokat összeadva kapjuk a vizsgák számát:

$$7\cdot(1+1)+6\cdot(2+6+8+2)+5\cdot 80+4\cdot(2+10+7+3+0)+$$
$$+3\cdot(5+3+4+1)+2\cdot(3+2+3)+1\cdot(8+1)=674.$$

Átlagosan $\frac{674}{152}=4{,}43$ darab vizsgát tesznek fejenként a tanulók.



7. *Olaszországi kirándulása során Zéta méréssel meghatározta a pisai ferde torony épületének hosszát. A torony talpától először kimért* 48 métert *abba az irányba, amerre a torony dől, és innen a torony teteje* 54,7 fokos *szögben látszott. Ezután ugyanabban az irányban még* 24 métert *ment, ahonnan a torony teteje már csak* 42 fokos *szögben látszott.*

a) *Határozzuk meg a torony hosszát Zéta mérési eredményei alapján, majd adjuk meg annak százalékos eltérését a torony valódi hosszúságától, amely* 56,3 méter. (*6 pont*)

b) *Mekkora szöget zár be az épület a vízszintes talajjal?* (*3 pont*)

c) *Zéta öccse, Zétény felment a toronyba és közben megszámolta a lépcsőket. Felérve megállapította, hogy a lépcsőfokok száma egy olyan mértani sorozat harmadik eleme, amelyhez hozzáadva a második elemet* 336*-ot kapunk összegként. Ugyanezen sorozat ötödik eleméből kivonva a harmadik elemet, a különbség* 14 112. *Hány lépcsőfok van a pisai ferde toronyban?* (*7 pont*)

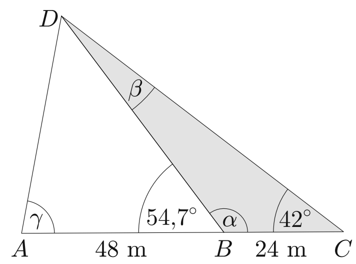
Megoldás. *a*) Az *ábra* jelöléseit használva:

$$\alpha=180^\circ-54{,}7^\circ=125{,}3^\circ \quad\text{és}\quad \beta=180^\circ-125{,}3^\circ-42^\circ=12{,}7^\circ.$$

A BCD háromszögben alkalmazva a szinusztételt, felírhatjuk a

$$\frac{24}{\sin 12{,}7^\circ} = \frac{BD}{\sin 42^\circ}$$

egyenletet, amelyből $BD \approx 73$ méter.



Most alkalmazzuk a koszinusztételt az ABD háromszögben az AD oldalhossz meghatározására: $AD^2 = 48^2 + 73^2 - 2\cdot 48\cdot 73\cdot \cos 54{,}7^\circ = 3583{,}37$, ebből $AD \approx 59{,}9$ méter. $\frac{59{,}9}{56{,}3} \approx 1{,}064$, tehát a mérések alapján meghatározott érték 6,4%-kal nagyobb a torony valódi hosszánál.

b) A koszinusztételt felhasználhatjuk az ABD háromszögben a dőlésszög nagyságának meghatározására is:

$$\cos\gamma = \frac{59{,}9^2 + 48^2 - 73^2}{2\cdot 59{,}9\cdot 48}, \quad \text{így} \quad \gamma \approx 84{,}4^\circ.$$

A torony a vízszintes talajjal hozzávetőlegesen 84,4° nagyságú szöget zár be.

c) Legyen $q(\neq 0)$ a mértani sorozat hányadosa, $a_n(\neq 0)$ pedig a sorozat n-edik tagja. Ekkor a feladat szövege alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert:

$$a_3 + a_2 = 336,$$
$$a_5 - a_3 = 14\,112.$$

Az első egyenletben két egymást követő tag pozitív összeget ad, így a hányados nem lehet -1 sem.

Az $a_n = a_1\cdot q^{n-1}$ képlet többszöri alkalmazásával átalakítjuk az egyenletrendszert:

$$a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q = 336,$$
$$a_1\cdot q^4 - a_1\cdot q^2 = 14\,112.$$

Az első egyenletből $(a_1\cdot q)$-t, a másodikból $(a_1\cdot q^2)$-t kiemelve, majd a megfelelő (nemnulla) oldalakat elosztva egymással, a bal oldalon $(a_1\cdot q)$-val, míg a jobb oldalon 336-tal egyszerűsítünk: $\frac{q(q^2-1)}{q+1} = 42$, ahol $q \neq -1$. Tudjuk, hogy $q^2 - 1 = (q-1)(q+1)$, így $(q+1)$-gyel is egyszerűsíthetünk, így a $q(q-1) = 42$ egyenlethez jutunk, amelynek gyökei $q_1 = 7$ és $q_2 = -6$. A kapott értékeket az $a_1\cdot q^2 + a_1\cdot q = 336$ egyenletbe helyettesítve $a_{1_1} = 6$ és $a_{1_2} = 11{,}2$, ebből $a_{3_1} = 6\cdot 7^2 = 294$, ugyanakkor $a_{3_2} = 11{,}2\cdot(-6)^2 = 403{,}2$, az utóbbi nem egész szám, ezért nem felel meg a feladat feltételeinek.

A pisai ferde toronyban 294 lépcső van.

8. *Adott a valós számok lehető legbővebb részhalmazán értelmezett*

$$f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x \quad \textit{és} \quad g(x) = 3x + 1$$

függvény.

a) Írjuk fel az $u = f \circ g$ és a $v = g \circ f$ függvények hozzárendelési szabályát, határozzuk meg értelmezési tartományukat és értékkészletüket. (*8 pont*)

b) Adjuk meg az $f(x)$, illetve a $g(x)$ függvény egy-egy olyan leszűkítését, amelynek értékkészlete

- $]-3; 5]$;
- *a természetes számok halmaza;*
- *a racionális számok halmaza.* (*8 pont*)

Megoldás. *a)* $u(x) = f\big(g(x)\big) = \log_{\frac{1}{3}}(3x+1)$, ahol $3x+1>0$, $x > -\frac{1}{3}$, ezért $D_u = \big]-\frac{1}{3};\infty\big[$, $R_u = \mathbb{R}$. $v(x) = g\big(f(x)\big) = 3 \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x)+1$, ahol $x>0$, ezért $D_v = \mathbb{R}^+$, $R_v = \mathbb{R}$.

b) Az $f(x)$ függvény folytonossága és szigorú monoton csökkenése miatt elegendő a megadott értékkészlet végpontjainak megfelelően vizsgálatokat végezni, azaz megoldani a következő két egyenlőtlenséget: $\log_{\frac{1}{3}} x > -3$, amelyből $x < 27$; illetve $\log_{\frac{1}{3}} x \leqslant 5$, amelyből $x \geqslant \frac{1}{243}$, így a megfelelő leszűkítés a következő:

$$f(x)_1 : \left[\frac{1}{243}; 27\right[\to \,]-3;5]\,.$$

A másik két leszűkítésnél a logaritmus alapjának megfelelő hatványai alkotják az értelmezési tartományt, így a kérdezett leszűkítések rendre:

$$f(x)_2 : \left\{x \;\middle|\; x = \left(\frac{1}{3}\right)^n;\ n \in \mathbb{N}\right\} \to \mathbb{N}; \quad \text{illetve}$$

$$f(x)_3 : \left\{x \;\middle|\; x = \left(\frac{1}{3}\right)^q;\ q \in \mathbb{Q}\right\} \to \mathbb{Q}.$$

A $g(x)$ függvény leszűkítéseit a fentiekhez hasonlóan határozhatjuk meg. Ezek rendre:

$$g(x)_1 : \left]-\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right] \to \,]-3;5]\,;$$

$$g(x)_2 : \left\{x \;\middle|\; x = \frac{1}{3}(n-1);\ n \in \mathbb{N}\right\} \to \mathbb{N}; \quad \text{illetve} \quad g(x)_3 : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}.$$

9. *Egy* 7 dm *hosszúságú szakaszt felosztunk két részre.*

a) Bizonyítsuk be, hogy az így kapott egyik szakaszhossz köbének és a másik szakaszhossz négyzetének szorzata akkor a legnagyobb, ha az egyik szakasz hossza 42 cm. (*8 pont*)

b) Hány olyan különböző háromszög van, amelynek két oldala az a) részben kapott két szakasz, és a harmadik oldalának hossza is centiméterben mérve egész szám? (*3 pont*)

c) Mekkora lehet a legnagyobb belső szöge annak a háromszögnek a fentiek közül, amelynek oldalhosszai számtani sorozatot alkotnak? (*5 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az eredeti szakasz egyik részének hossza x cm ($0 < x < 70$), ekkor a másik rész hossza $70 - x$ cm.

Keressük az $f(x) = x^3 \cdot (70 - x)^2$ függvény lokális maximumát az adott intervallumon.

$$f(x) = x^5 - 140x^4 + 4900x^3,$$

ennek deriváltfüggvénye

$$f'(x) = 5x^4 - 560x^3 + 14700x^2.$$

A függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla: $5x^4 - 560x^3 + 14\,700x^2 = 0$. A kapott egyenlet mindkét oldalát elosztva az x^2 pozitív értékű kifejezéssel másodfokú egyenletet kapunk: $5x^2 - 560x + 14\,700 = 0$, amelynek gyökei $x_1 = 70$ és $x_2 = 42$.

Az első megoldás nem eleme az értelmezési tartománynak, a második megoldás eleme. Ellenőrizzük, hogy $x = 42$-nél valóban lokális maximuma van a függvénynek. Ezt többféleképpen is megtehetjük, például a második derivált segítségével:

$$f''(42) = 20 \cdot 42^3 - 1680 \cdot 42^2 + 29\,400 \cdot 42 = -246\,960,$$

azaz itt a második deriváltfüggvény értéke negatív, tehát valóban lokális maximumhelyet találtunk, így a feladat állítását beláttuk.

b) A háromszög két oldalának hossza 28 és 42 cm, a harmadiké legyen z cm ($z \in \mathbb{Z}^+$). A háromszög-egyenlőtlenséget alkalmazva: $28 + z > 42$ és $42 + 28 > z$, amiből $14 < z < 70$. 55 ilyen egész szám van, tehát 55 különböző háromszög létezik, amely megfelel a feltételeknek.

c) Három esetet kell megvizsgálnunk aszerint, hogy z oldal 1) a legrövidebb, 2) a leghosszabb, vagy 3) 28 és 42 cm között van.

1. eset. $z; 28; 42$ számtani sorozat egymást követő elemeiként igaz, hogy $28 = \frac{z+42}{2}$; ebből $z = 14$, ami a háromszög-egyenlőtlenség miatt nem lehet, így nincs ilyen háromszög.

2. eset. $28; 42; z$, ekkor $42 = \frac{28+z}{2}$; ebből $z = 56$ cm. A háromszög oldalai 28; 42 és 56 centiméteresek, a legnagyobb belső szög a leghosszabb oldallal szemben fekszik. A koszinusztételt alkalmazva, a keresett szöget φ-vel jelölve:

$$\cos\varphi = \frac{28^2 + 42^2 - 56^2}{2 \cdot 28 \cdot 42} = -\frac{1}{4}; \quad \varphi \approx 104{,}5^\circ.$$

3. eset. $28; z; 42$, ekkor $z = \frac{28+42}{2} = 35$ cm, így a legnagyobb belső szög a 42 centiméteres oldallal szemközt található, jelöljük ω-val. A 2. esetben látott módon meghatározzuk ω nagyságát,

$$\omega = \frac{28^2 + 35^2 - 42^2}{2 \cdot 28 \cdot 35} = \frac{1}{8}; \quad \omega \approx 82{,}8^\circ.$$

A feltételeknek megfelelő háromszög legnagyobb belső szögének nagysága 82,8° vagy 104,5° lehet.

Kozma Katalin Abigél
Győr

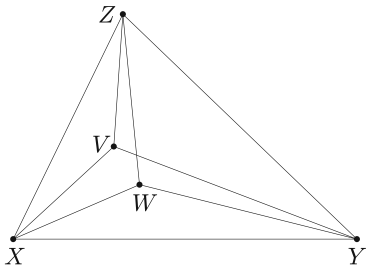
Matematika feladat megoldása

B. 5133. *Adott a térben hat pont, semelyik négy nem esik egy síkra. Bizonyítsuk be, hogy a pontok szétválaszhatók két hármas csoportra úgy, hogy az általuk meghatározott két háromszöglap messe egymást.*

(*6 pont*)

Megoldás. A megoldáshoz használni fogjuk a következő jól ismert tételt, ami Erdős Pál nyomán Happy End-problémaként terjedt el. Azt mondjuk, hogy néhány pont a síkon *általános helyzetű,* ha nincs köztük három, ami illeszkedik egy egyenesre.

Tétel. *Öt általános helyzetű pont közül a síkon mindig kiválasztható négy, amik egy konvex négyszög csúcsai (azaz konvex pozícióban vannak).*



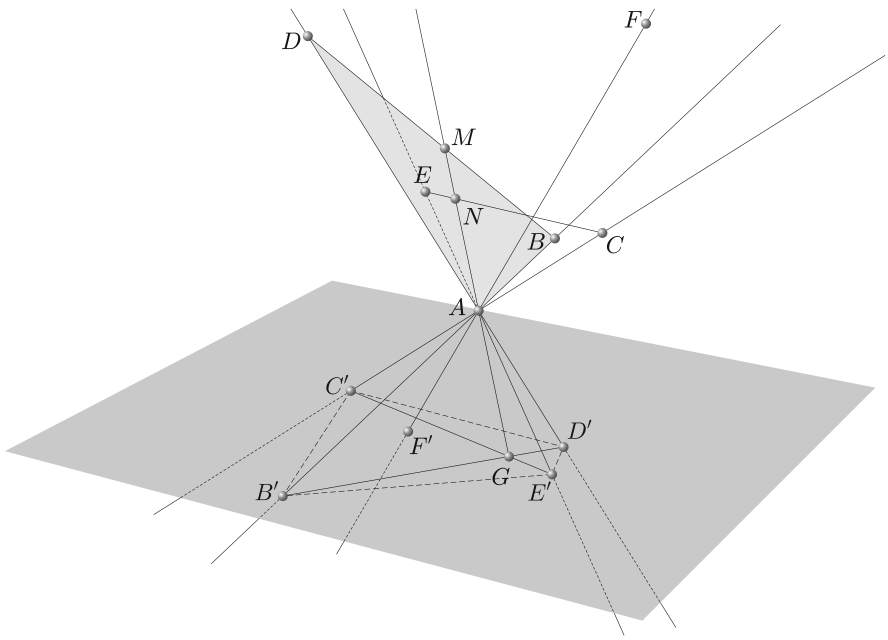
Bizonyítás. Legyenek az adott pontok X, Y, Z, V és W. Ha a pontok konvex burkának legalább négy csúcsa van, akkor az állítás nyilvánvaló. Feltehetjük tehát, hogy V és W az $XYZ\triangle$ belsejében van (lásd *ábra*).

A W pont az XYV, XZV és YZV háromszögek közül pontosan egyben van benne, mondjuk $W \in XYV\triangle$, és így $W \notin$ $\notin XZV\triangle$ valamint $W \notin YZV\triangle$. Nyilvánvalóan V az XZW és YZW háromszögek közül legfeljebb (valójában pontosan) egyben van benne, vagyis feltehetjük, hogy $V \notin YZW\triangle$.

Így Y, Z, V és W pontok konvex burkának Y és Z nyilvánvalóan csúcsa, míg $W \notin YZV\triangle$ és $V \notin YZW\triangle$ miatt csúcsa V és W is. Tehát Y, Z, V és W pontok valóban egy konvex négyszög csúcsai, ezzel a tétel állítását beláttuk.

Rátérünk a feladat megoldására. Tekintsünk egy olyan S síkot, ami a pontok által meghatározott egyenesek egyikével sem párhuzamos, és a pontok mindegyike a sík ugyanazon félterébe esik. Legyen A az adott pontok közül az S-hez legközelebbi (a feltevés szerint ez a pont egyértelmű), a további pontok B, C, D, E és F. Jegyezzük meg, hogy a konstrukció miatt az AB_+, AC_+, AD_+, AE_+ és AF_+ félegyenesek egyike sem metszi az S síkot.

Vetítsük le centrálisan az A-tól különböző pontokat A-ból S-re, azaz legyen $B' = S \cap AB$, $C' = S \cap AC$, és így tovább. A Happy End-probléma miatt feltehetjük, hogy $B'C'D'E'$ egy konvex négyszög, a $B'D'$ és $C'E'$ átlók metszéspontja legyen G. A vetítés mellett G pontnak a BD és CE szakaszokon is van őse, azaz létezik $M \in \overline{BD}$ és $N \in \overline{CE}$, amikre $M' = N' = G$. $AM > AN$ az általánosság megszorítása nélkül feltehető, és így a konstrukció miatt N illeszkedik $\overline{AM}$ szakasz-



ra, azaz N az ABD háromszögnek is belső pontja. Kaptuk, hogy $N = ABD\triangle\cap\overline{CE}$, ami miatt nyilvánvalóan ABD és CEF háromszögek is metszik egymást. Ezzel az állítást beláttuk.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

34 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 14 versenyző: Bán-Szabó Áron, Duchon Márton, Fey Dávid, Kercsó-Molnár Anita, Kovács 129 Tamás, Kökényesi Márk Péter, Lőw László, Molnár-Szabó Vilmos, Nádor Benedek, Seres-Szabó Márton, Simon László Bence, Terjék András József, Varga Boldizsár, Virág Rudolf. 5 pontos 5, 4 pontos 3, 3 pontos 5, 2 pontos 2, 1 pontos 1, 0 pontos 4 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (704–708.)

K. 704. Egy sakkversenyen 5 játékos vett részt. Mindenki egyszer játszott mindenkivel, a győzelemért 1 pont, döntetlenért 0,5 pont, vereségért 0 pont járt. A verseny végére az derült ki, hogy:
– az első helyezettnek nem volt döntetlenje;
– a második helyezett nem vesztett játszmát;
– minden versenyzőnek különböző pontszáma lett.

Hány pontot értek el az egyes helyezettek?

K. 705. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok közül kiválasztunk három különböző számot és összeadjuk őket. Ezt minden lehetséges számhármassal megtesszük. Az összeadások között lesznek páros és páratlan eredményűek. Melyikből lesz több, a páros vagy a páratlan eredményűből?

K. 706. Egy három oszlopból álló táblázat első sorába beírtunk 3 számot balról jobbra haladva, nevezzük ezeket a, b, c-nek. A második sorba az $a-b$, $b-c$, $c-a$ számok kerülnek. A harmadik sorba a második sor elemeiből ugyanezen szabály szerint előállított számok kerülnek (az első, második és harmadik helyen álló számokkal végzett műveleteket tekintve), és így folytatjuk tovább a táblázat kitöltését. Mutassuk meg, hogy a táblázatban a negyedik sortól kezdve nem fordulhat elő a 2021.

K/C. 707. Néhány (legalább kettő) gyerek körbeáll, és „kiesős" játékot játszik. Ebben a játékban a kezdő játékostól kezdve minden második gyerek kiesik, és kiáll a körből, az utolsóként bent maradó játékos győz. Például, ha hatan játszanak (A, B, C, D, E, F) és A kezd, akkor B, D, F, C, A sorrendben állnak ki, így E a győztes. Hány gyerek esetén lehet győztes a kezdő játékos?

K/C. 708. Jean, az inas azt a feladatot kapja gazdájától, hogy tegyen gyertyákat a nappaliban levő 10 darab háromágú gyertyatartóba. Jeannak ezt úgy kell megoldania, hogy vagy minden gyertyatartóban 3 különböző színű gyertya legyen, vagy mind a 30 gyertya ugyanolyan színű. Jean bemegy a sarki vegyesboltba, ahol összesen 70 db gyertyát talál. Mutassuk meg, hogy ebből mindenképpen tud 30 db-ot vásárolni úgy, hogy a feltételeknek megfelelően feltölthesse a gyertyatartókat.

Beküldési határidő: 2021. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (707–708., 1689–1693.)

Feladatok 10. évfolyamig

K/C. 707. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

K/C. 708. A szövegét lásd a **K** feladatoknál.

Feladatok mindenkinek

C. 1689. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ha a, b, c, d egész számok:

$$\begin{aligned} a+d&=9,\\ ad+b&=8,\\ bd+c&=74,\\ cd&=18. \end{aligned}$$

Javasolta: *Berkó Erzsébet* (Szolnok)

C. 1690. Az AB szakasz fölé rajzolt egységsugarú félkör középpontja O. Megrajzoljuk a félkör belsejébe a K középpontú, OB átmérőjű félkört, amelyet az A pontból induló félegyenes a C pontban érint. Az O pontból az AC-re bocsátott merőleges az AB átmérőjű félkörvonalat a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a BD szakasz felezőpontja C.

C. 1691. Határozzuk meg, mely p, q pozitív prímszámokra teljesül, hogy $p^5-q^3+(p+q)^4=9900$.

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1692. Az $ABCD$ négyzet DA oldalának belső pontja P. A $PBC\sphericalangle$-et felező egyenes a CD oldalt a Q pontban metszi, a Q pontból a BP egyenesre bocsátott merőleges talppontja R. Határozzuk meg az AR és BQ egyenesek hajlásszögét.

C. 1693. Egy kocka csúcsai közül véletlenszerűen kiválasztunk négyet. Bármely négy csúcsot ugyanakkora valószínűséggel választunk ki. Mekkora az esélye, hogy a négy csúcs tetraédert határoz meg? Mi a valószínűsége, hogy a négy pont egy szabályos tetraéder négy csúcsa?

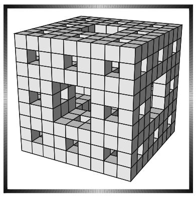
Javasolta: *Zagyva Tiborné* (Baja)

❄

Beküldési határidő: 2021. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5198–5205.)

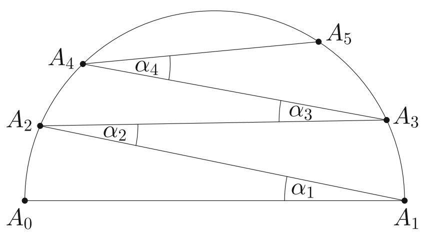


B. 5198. Ha az asztalom tetejére teszem a teknősömet, akkor a földön álló macskám fejéhez képest a teknős feje 70 cm-rel van feljebb. Ha a macskámat teszem az asztal tetejére, akkor a földön álló kutyám fejéhez képest 80 cm-rel lesz magasabban a macska feje. Ha pedig a kutyámat teszem az asztalra, akkor a földön álló teknőshöz képest 120 cm-rel lesz magasabban a kutya feje. Hány cm magas az asztalom?

(*3 pont*) *Kocsis Szilveszter* (Budapest) ötlete alapján

B. 5199. Egy sakktábla minden mezőjére egy érmét teszünk Fejjel felfelé. Megengedett lépés, hogy három közvetlenül egymás mellett lévő érmét egy sorban vagy egy oszlopban egyszerre megfordítsunk. El lehet-e érni azt, hogy minden érme Írással legyen felfelé?

(*4 pont*) Javasolta: *Gáspár Merse Előd* (Budapest)



B. 5200. Az $A_0A_1 = 1$ átmérőjű félkörvonalon felvesszük az A_2 pontot úgy, hogy $A_0A_1A_2\sphericalangle = 1°$. Ezután a körvonal A_1A_2 ívén felvesszük az A_3 pontot úgy, hogy $A_1A_2A_3\sphericalangle = 2°$. Ezt folytatjuk a következők szerint: az A_{k+1} pontot a körvonal $A_{k-1}A_k$ ívén választjuk úgy, hogy $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ szög k fok ($k = 3, 4, \ldots, 9$). Milyen hosszú az A_9A_{10} szakasz? (Az *ábra* tájékoztató jellegű.)

(*3 pont*)

B. 5201. Legyenek az n pozitív egész szám pozitív osztói $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Határozzuk meg azokat az összetett n számokat, amelyekre d_1, $d_1 + d_2$, $d_1 + d_2 + d_3$, $\ldots$, $d_1 + d_2 + \ldots + d_{k-1}$ számok mind osztói n-nek.

(*4 pont*) Javasolta: *Sándor Csaba* (Budapest)

B. 5202. Két racionális számot *ismerősnek* nevezünk, ha van olyan p/q, illetve r/s alakjuk (p, q, r, s egészek), amelyekre $|ps - qr| = 1$. Hány közös ismerőse lehet két ismerős racionális számnak?

(*5 pont*) Javasolta: *Kocsis Szilveszter* (Budapest)

B. 5203. Az ABC háromszögben $AB > BC$, a beírt kör érintési pontjai a BC, CA és AB oldalakon rendre A_0, B_0 és C_0, továbbá az AC oldalhoz írt kör az AC oldalt a B_1 pontban érinti. Mutassuk meg, hogy az A_0B_1 és B_0C_0 szakaszok metszéspontja akkor és csak akkor van rajta a B csúcsból induló belső szögfelezőn, ha a C csúcsnál lévő szög $90°$.

(*5 pont*) Javasolta: *Holló Gábor* (Budapest)

B. 5204. Legyenek $1 \leqslant a, b, c, d \leqslant 4$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$16 \leqslant (a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \leqslant 25.$$

(*6 pont*) Javasolta: *Szoldatics József* (Budapest)

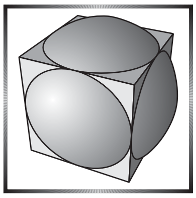
B. 5205. Adott a síkon négy kör: a k_1 kör belsejében a k_2, a k_2 belsejében a k_3, és a k_3 belsejében a k_4 kör. Adott továbbá három egyenes, e_1, e_2 és e_3, amelyek közül semelyik kettő sem párhuzamos, és mind a négy kört metszik. Mindegyik $i = 1, 2, 3$ esetén legyenek az e_i egyenes metszéspontjai a körökkel A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i és H_i, ebben a sorrendben. Igazoljuk, hogy ha $A_1B_1 + E_1F_1 = C_1D_1 + G_1H_1$ és $A_2B_2 + E_2F_2 = C_2D_2 + G_2H_2$, akkor $A_3B_3 + E_3F_3 = C_3D_3 + G_3H_3$.

(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2021. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (809–811.)



A. 809. Az ABC háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel a, b és c, a súlypontja pedig S. Igazoljuk, hogy a háromszög síkjának tetszőleges P pontjára teljesül, hogy

$$a \cdot PA^3 + b \cdot PB^3 + c \cdot PC^3 \geqslant 3abc \cdot PS.$$

Javasolta: *Shultz János* (Szeged)

A. 810. Legyen minden pozitív egész n-re

$$r_n = \sum_{t=0}^{n} (-1)^t \binom{n}{t} \frac{1}{(t+1)!}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n = 0$.

A. 811. Adott egy n elemű A halmaz és egy $k < n$ pozitív egész szám. Határozzuk meg m legnagyobb lehetséges értékét, ha $i = 1, 2, \ldots, m$ esetén kiválaszthatók B_i és C_i halmazok úgy, hogy a következők teljesüljenek:

(*i*) $B_i \subset A$, $|B_i| = k$,

(*ii*) $C_i \subset B_i$ (C_i elemszámára nincs további megkötés),

(*iii*) minden $i \neq j$ esetén $B_i \cap C_j \neq B_j \cap C_i$.

❄

Beküldési határidő: 2021. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

„Titkos üzenet száll a széllel” II.*

Az első rész összefoglalása

A cikk első részében betekintettünk a titkosítás egyszerű módjaiba, majd megismertük a Napóleon használta Vigenère-kódolás mikéntjét és technikáját. Azt is megállapítottuk, hogy a monoalfabetikus kódolással szemben a nyelvi rendszer adta további szabályszerűség, a betűgyakoriságból adódó könnyű megfejtéstől is sikerült megszabadítanunk a titkos szöveget.

Ezt a titkosítási módszert feltörhetetlennek tartották és el is nevezték feltörhetetlen kódolásnak. De ez a vélekedés nem sokáig tartott, néhány évtizeddel Napóleon halála után, 1864-ben meg is született a megfejtés. Ugyan a folyamatos háborúskodás miatt nem hozták nyilvánosságra. Csak az első megoldó halála után, hagyatékának átvizsgálásakor derült ki az, hogy rájött a megoldásra, és az is, hogy milyen gondolatmenetet követett. Persze nem akárkiknek szokták tudományos alapossággal átvizsgálni a hagyatékát, az illető nem volt más, mint matematikus, kriptográfus, az informatika, a számítógéptudomány egyik korai nagy képviselője, a differenciálgép és az analitikai gép kitalálója, *Charles Babbage*.

A Vigenère-kódolás hiányossága

Vegyük végig Babbage gondolatmenetét. Ha valaki kellően eltökélt és veszi magának a fáradságot, nem szükséges semmiféle zsenialitás a kód megfejtéséhez. A módszer zsenialitását az adja, hogy az apró lépésekből Babbage olyan gondolatmenetet épített fel, amely elvezet a megfejtéshez akkor is, ha nem áll rendelkezésünkre a titkosítás kulcsa.

A kitalálói úgy vélték, hogy a Vigenère-kódolás megszabadít a nyelvi rendszertől, a betűgyakoriság elemzése nem vezet eredményre. Ez utóbbi igaz is, de a nyelvi rendszernek vannak még ennél is mélyebb megnyilvánulásai. Minden nyelvben vannak gyakorta előforduló betűhármasok, például az angol the, a német der, die, das, sch vagy a magyarban az egy. (Az olvasóra bízom, összeszámolja-e hány olyan magyar szót tud összegyűjteni, amelyben az egy, kov, kor jelsorozat szerepel, és hány olyat, amiben például a vöm vagy az űté.)

A további gondolatmenet könnyebb megértéséhez válasszunk egy rövid, négy jelből álló kulcsot. Legyen ez a BUSA. Vizsgáljuk meg, mivé kódolódhat az EGY jelsorozat. Ez persze attól függ, hogyan helyezkedik el az EGY jelsorozat a kulcshoz képest. Az E betű felett lehet B, U, S és végül A.

Titkosítsuk mind a négy esetet az előző részben megismert módszerrel.

kulcs:	B	U	S	A	B	U	S	A	B	U	S	A	B	U	S	A	B	U	S	A
nyers:	E	G	Y			E	G	Y			E	G	Y			E	G	Y		
titkos:	G	A	R			X	Y	Z			V	H	Á			É	Í	T		

Tehát az eredeti EGY négy különböző alakban jelenhet meg a titkos üzenetben: GAR, XYZ, VHÁ vagy ÉÍT. Ha elég hosszú a szöveg, várhatóan mind a négy többször előfordul majd. Látszólag egy fikarcnyival sem jutottunk közelebb a megoldáshoz, de csak látszólag.

A megfejtéshez vezető úton most nem kevés babramunka jön, ezt persze a mai gépek pillanatok alatt el tudnák végezni. Meg kell keresni a többször ismétlődő betűhármasokat és fel kell jegyezni az azonosak kezdőbetűinek távolságát. Használjuk továbbra is a fenti paramétereket. Tegyük fel, hogy a következő eredményt kaptuk:

betűhármasok	GAR (7db)	XYZ (3 db)	VHÁ (4 db)	ÉÍT(6 db)	...
a távolságuk az előző találattól:	36, 51, 11, 44, 120, 68	24, 36	12, 23, 27	16, 20, 32, 168, 48	...

Ha megvizsgáljuk, az egymás utáni távolságokra adódó számértékeket, azt találjuk, hogy néhány kivételtől eltekintve a számoknak van egy közös osztójuk. Húzzuk ki a sorból kilógókat:

36, ~~51~~, ~~11~~, 44, 120, 68, 24, 36, 12, ~~23~~, ~~27~~, 16, 20, 32, 168, 48.

Ezt már csak ügyesen értelmeznünk kell, továbbá magyarázatot találni a kilógó esetekre, és máris közelebb kerülünk a megoldáshoz. A valóságban ennél jóval több betűhármas fog ismétlődni, de nekünk most ennyi is elég. Az eltéréseknek nyilván az az oka, hogy azoknál az előfordulásoknál nem az EGY kódolódott GAR, XYZ, VHÁ vagy ÉÍT jelekké, mert azok más szórészletből is kialakulhatnak. Például:

kulcs:	B	U	S	A	B	U	S	A	B	U	S	A	B	U	S	A	B	U	S	A
titkos:			G	A	R	...										V	H	Á		
nyers:	...		Ó	Z	Ő	...										Ű	É	H		

Ami lehet értelmes mondatok része, mondjuk: Három morcona kal**ÓZ Ő**rzi a kincset a szigeten... vagy: Szörny**Ű ÉH**ség gyötörte... De ez igazából nem vezet sehova, inkább fordítsuk figyelmünket a fennmaradó számokra.

36, 44, 120, 68, 24, 36, 12, 16, 20, 32, 168, 48.

És igen, a többi távolság mind a 4 szám többszöröse, vagyis az ismétlődések 9-szer, 11-szer, 30-szor, 17-szer stb. 4 betűnyire követik egymást, és ez csak azt jelentheti, hogy a kulcs négy karakterből áll.

Ezzel még egyáltalán nem vagyunk kisegítve, hiszen rengeteg négybetűs szó van, ki állna neki mindet végigpróbálni. Szerencsére nem is kell.

Ne akarjuk újra feltalálni a kereket!

Nézzük ezt az eredményt más szemüvegen keresztül. Az, hogy a kulcs hossza 4, azt jelenti, hogy a szöveg minden negyedik betűjét azonos kulcsbetűvel kódoltuk, a mi példánknál az 1., 5., 9., 13., ... betűt B szerint, a 2., 6., 10., 14., ... betűt U szerint, a 3., 7., 11., 15., ... betűt S szerint, végül a 4., 8., 12., 16., ... betűt A szerint.

Igen, ez a négy csoport monoalfabetikus kódolású. Ha összeválogatjuk a betűket, mind a négy csoportban végezhetünk gyakorisági vizsgálatot. Szerencsére most csak a leggyakoribb jelet kell megkeresni a négy csoportban, a mi példánknál maradva ez legyen G, X, V és É, vagyis rendre ezek a jelek fordulnak elő legtöbbször az első, a második, a harmadik és a negyedik csoportban.

	A	Á	B	C	D	E	É	F
A	Á	B	C	D	E	É	F	G
Á	B	C	D	E	É	F	G	H
B	C	D	E	É	F	G	H	I
C	D	E	É	F	G	H	I	Í
D	E	É	F	G	H	I	Í	J
E	É	F	G	H	I	Í	J	K
É	F	G	H	I	Í	J	K	L
F	G	H	I	Í	J	K	L	M
G	H	I	Í	J	K	L	M	N
H	I	Í	J	K	L	M	N	O
I	Í	J	K	L	M	N	O	Ó
Í	J	K	L	M	N	O	Ó	Ö
J	K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő
K	L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P
L	M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q
M	N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R
N	O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S
O	Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T
Ó	Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U
Ö	Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú
Ő	P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü
P	Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű
Q	R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V
R	S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W
S	T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X
T	U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y
U	Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z
Ú	Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A
Ü	Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á
Ű	V	W	X	Y	Z	A	Á	B
V	W	X	Y	Z	A	Á	B	C
W	X	Y	Z	A	Á	B	C	D
X	Y	Z	A	Á	B	C	D	E
Y	Z	A	Á	B	C	D	E	É
Z	A	Á	B	C	D	E	É	F

Ha ezek vannak az egyes csoportok gyakorisági táblázatának élén, akkor ezekké kódolódott a magyarban leggyakoribb betű, az E. Nézzük meg a Vigenére-tábla E oszlopát és keressük meg, melyik sorokban találjuk ezeket a betűket:

a G-t a B oszlopban;
az X-et az U oszlopban;
a V-t az S oszlopban, végül
az É-t az A oszlopban.

A kapott betűket a fenti sorrendben már csak össze kell olvasnunk és meg is van a kulcs: BUSA. A kulcs ismeretében alig valamivel nehezebb kihámozni a titkos üzenet értelmét, mintha a kódolatlan üzenetet nyomták volna a markunkba.

Végkövetkeztetésül: Ha elég hosszú a szöveg, továbbá ismerjük az adott nyelv leggyakrabban használt betűjét, akkor bizony a Vigenère-kódolású üzenet is megfejthető a kulcs ismerete nélkül. Babbage munkája új kihívás elé állította a rejtjelezőket, így született meg az ENIGMA, az RSA és az MD5 kódolás, de ez már egy másik történet. Hiábavaló volt tehát a sok fáradság, amivel kitalálták e furfangos titkosítási módszert, és a kódolásra fordított energia is kárba veszett a zseniális elmével szemben, és ez így volt törvényszerű. Hiszen kell lennie valamilyen értelmes rendszernek a kódoláskor, mert ha például a Bibliát szeretnénk titkosítani, mondjuk úgy, hogy ábécébe rendezzük a szavait, akkor sem lehetnénk biztosak benne, hogy némi próbálkozás után az eredeti szöveget kapjuk vissza. A Vigenère-módszer utódai is megfejtve végezték, vagy végzik majd.

Tóth Tamás

Informatikából kitűzött feladatok

I. 547. A morzekód (Samuel Morse találmánya) olyan kommunikációs kód, amely pontok és vonalak kombinációjából áll. Szöveges üzenet átvitelére alkalmas vezetékes, vagy vezeték nélküli kommunikációs csatornán.

A kódrendszer rövid és hosszú jelekből, valamint szünetekből áll. A morzekóddal a magyar ábécé ékezetmentes betűi egyértelműen kódolhatók a következő táblázat alapján:

Betű	**Jel**	**Betű**	**Jel**
A	· —	N	— ·
B	— · · ·	O	— — —
C	— · — ·	P	· — — ·
D	— · ·	Q	— — · —
E	·	R	· — ·
F	· · — ·	S	· · ·
G	— — ·	T	—
H	· · · ·	U	· · —
I	· ·	V	· · · —
J	· — — —	W	· — —
K	— · —	X	— · · —
L	· — · ·	Y	— · — —
M	— —	Z	— — · ·

Készítsünk programot `i547` néven, amely morzekóddal megadott üzenetet dekódol és a képernyőn megjelenít. Az üzenet legfeljebb 1000 jelből áll.

A jeleket, betűket, szavakat és mondatokat megadott számú szóközök választják el:

Jel	**Kód**
Rövid jel	· (pont)
Hosszú jel	`-` (kötőjel)
Jelköz	`_` (1 szóköz)
Betűköz	`___` (3 szóköz)
Szó és mondatköz	`_______` (7 szóköz)

A program olvassa be a standard input egyetlen sorából az üzenet morzekódját. Írja a standard output egyetlen sorába a dekódolt, megfelelően tagolt üzenetet.

Példa a bemenetre (nem tartalmaz sortörést):	**Példa a kimenetre:**
`·_·_-___-_-_·___-_·_-_-___·___·_·_·_______·_·_·_-` `___·_-___-_-_·___-_·_-_-_`	`UGYES VAGY`

Beküldendő egy tömörített `i547.zip` állományban a program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

I. 548 (É). Egy webáruház termékeit a vásárlók az ország különböző pontjain elhelyezkedő csomagátvevő helyeken kapják meg. A vállalat több raktárból szállítja ki a csomagátvevő helyekre a termékeket. A csomagok eljuttatását a raktárból a csomagátvevő helyekre kisebb szállítóvállalatok segítségével oldják meg.

A `szallit.txt` állományban rendelkezésre állnak az elmúlt hónapban történt kiszállítások adatai: a raktár és a csomagátvevő hely sorszáma, a szállító cég neve és a szállítási díj. Válaszoljunk a kérdésekre és oldjuk meg a feladatokat táblázatkezelő program segítségével. A feladat mintája a borítón található.

1. Töltsük be a tabulátorokkal tagolt, UTF-8 kódolású `szallit.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően. Mentsük a táblázatot i548 néven a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
2. Gyűjtsük ki a szállítók nevét a G oszlopban a mintának megfelelően. Minden szállító pontosan egyszer szerepeljen a táblázatrészben.
3. Adjuk meg a H oszlopban a szállítók nevei mellett, hogy hány alkalommal végeztek szállítást az elmúlt hónapban. Egy másolható képlettel dolgozzunk minden szállító esetében.
4. Adjuk meg az I oszlopban, hogy az egyes szállítóknak összesen mekkora díjat kellett fizetni a szállítások után.
5. Hozzunk létre az F8:K23 cellák fölött és formázzuk a minta szerint a szállítók teljes díját szemléltető diagramot. A diagram ne rendelkezzen jelmagyarázattal, de adjuk meg minden körcikkhez a cég nevét és az összes díjat tartalmazó feliratot a mintának megfelelően.
6. A G26:J30 tartományban a mintának megfelelően vizsgáljuk meg, hogy egy raktár és egy csomagátvevő hely közötti szállításnál melyik szállító és milyen szállítási díjért vállalja legolcsóbban a termékek fuvarozását. A táblázatrészt a mintának megfelelően formázzuk. Amennyiben a G27 és I27 cellákban megadjuk egy raktár és egy szállító sorszámát, akkor a G30 cellában jelenjen meg a legkisebb ár, vagy „---” három vonal, illetve az I30-as cellában jelenjen meg a szállító neve, vagy a „--- nincs ---” felirat.
7. Alakítsuk ki a mintán látható elrendezést. A feladat megoldása során segédcellákat használhatunk az N oszloptól jobbra.

A feladathoz tartozó minta megtalálható a borítón.

Beküldendő egy tömörített `i548.zip` állományban a megoldást adó munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely leírja, hogy a munkafüzet melyik program segítségével készült.

I. 549. A Vigenère-féle kódolásról októberi számunkban, a visszafejtés rejtelmeiről pedig mostani számunkban olvashatunk egy-egy cikkben. A feladat ezek alapján a kódolást és visszafejtést végző programok elkészítése lesz.

Készítsünk programot `vcode` néven, amely a bemenet első argumentumaként megadott szöveges állományt kódolja a második argumentumként megadott kulcsszó segítségével, és az eredményt egy szöveges állományba írja. A kimeneti állomány csak a bemeneti állomány magyar ABC szerinti betűinek kódját tartalmazza, tehát a szóközöket és írásjeleket hagyjuk el. A könnyebb olvashatóság kedvéért a sortörések maradjanak meg. A kimeneti állomány nevét egy „`_vc`” szórészlettel egészítsük ki, az állomány kiterjesztése ne változzon.

Példa: a `vcode vers.txt KÖMALINFORMATIKA` parancs futtatása esetén jöjjön létre a `vers_vc.txt` szöveges állomány.

a `vers.txt` első négy sora	a `vers_vc.txt` első négy sora
Titkos üzenet száll a széllel, Hozzád is elér még az éjjel. Most megáll az ész, úgy száll a képzelet, És megtalállak téged.	DVÉLXAIFREPUMIMMÜŐEAPTWKX RBMANMÚXRCQSÉOQÁKUÜKŐT ŰBEUVNTHXCNAXAKÜQÓEANTWGWVBAWTÖU ŐHWÉRÁOQÖCVÁDÁŐHÖS

Készítsünk programot `vdecode` néven, amely a bemenet első argumentumaként megadott szöveges állományt visszaalakítja a második argumentumként megadott kulcsszó segítségével, és az eredményt egy szöveges állományba írja. A bemeneti állomány a magyar ABC nagybetűit tartalmazza, szóközöket és írásjeleket nem. Az áttekinthetőség érdekében az állomány sorokra tagolt. A kimeneti állomány nevét egy „`_de`” szórészlettel egészítsük ki, az állomány kiterjesztése ne változzon.

Példa: a `vdecode szoveg.txt KÖMALINFORMATIKA` parancs futtatása esetén jöjjön létre a `szoveg_de.txt` szöveges állomány.

a `szoveg.txt` első négy sora	a `szoveg_de.txt` első négy sora
OŰNSŰNÉIÓUÓÁZNLTKPWJEŰTLDLFEGUMOJ ÖÜLÍÜSZWÓZXÁZHÚFAMUTŐTBŐR LSUGQNEKZÚUBEÖŐQŐHNA LÁNMTÁÚPÓZSFJSSULZOMYRO	CHARLESBABBAGEASZÁMÍTÓGÉPTUDOMÁNY EGYIKKORAINAGYKÉPVISELŐJE ADIFFERENCIÁLGÉPÉSAZ ANALITIKAIGÉPKITALÁLÓJA

Beküldendő egy tömörített `i549.zip` állományban a két program forráskódja és rövid dokumentációja, amely megadja, hogy a forrásállományok melyik fejlesztői környezetben fordíthatók.

I/S. 57. Adott egy N elemű T tömb, amelynek az i-edik elemét $T[i]$-vel jelöljük ($1 \leqslant i \leqslant N$). A tömb összes eleme pozitív, N-nél nem nagyobb egész szám. A tömb leggyakoribb elemei közé akkor tartozik egy x szám ($1 \leqslant x \leqslant N$), ha nincs olyan másik y szám ($1 \leqslant y \leqslant N$), ami többször fordul elő T-ben, mint x.

Módosításnak nevezzük azt, ha az **eredeti** T tömb egy elemét megváltoztatjuk egy tetszőleges pozitív, N-nél nem nagyobb egész számra. Két módosítás különböző, ha különböző elemét módosítjuk T-nek, vagy ugyanazt az elemét módosítjuk, de más értékre.

Adjuk meg minden x számra ($1 \leqslant x \leqslant N$), hogy hány olyan módosítás van, aminek a végrehajtása után a kapott tömbnek x egy leggyakoribb eleme lesz.

Bemenet: az első sorban az N szám található. A következő sorban N darab szám található: a T tömb elemei.

A kimenet egyetlen sorában adjunk meg N darab számot: az i-edik szám azon módosítások száma legyen, amikor i egy leggyakoribb elem.

Példa:

Bemenet	Kimenet
`4` `1 1 2 2`	`6 6 0 0`

Magyarázat: az `1` egy leggyakoribb elem lesz, a 3. vagy 4. elemet bármilyen lehetséges értékre módosítjuk. Ez összesen $3+3=6$ eset. Ehhez hasonlóan lehet a `2` egy leggyakoribb elem. A `3` vagy a `4` nem lehet egy leggyakoribb elem.

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 1000$, $1 \leqslant T[i] \leqslant 1000$. Időlimit: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program az $1 \leqslant N \leqslant 10$ elemszámú tesztesetekre helyes megoldást ad.

Beküldendő egy `is57.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 156. Piripócson N utca van, melyek N csomópontban találkoznak. A csomópontok 1-től N-ig számozottak. Minden utca két csomópontot köt össze. Az utcákon két irányban lehet közlekedni és bármely csomópontból el lehet jutni bármelyik másikba. Egy turisztikai cég olyan túrát tervez, mely pontosan K utcán megy keresztül. Minden utcán legfeljebb egyszer haladnak át, és a túrán az egymás után következő utcák egyik végpontja közös.

Készítsünk programot, amely megadja, hogy hányféle túrát szervezhetnek. Két túra csak akkor különböző, ha van olyan utca, amit az egyik túra érint, de a másik nem.

Bemenet: az első sor tartalmazza a csomópontok N számát és a túra K hosszát. A következő N sor mindegyike egy-egy utca két végét írja le.

Kimenet: a kimenet első és egyetlen sorába a K hosszú túrák számát kell kiírni.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesít)	Kimenet
`4 2 / 1 2 / 1 3 / 2 3 / 2 4`	`5`

Korlátok: $3 \leqslant N \leqslant 500$, $1 \leqslant K \leqslant 20$. Időlimit: 0,5 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha a program az $N \leqslant 50$ elemszámú tesztesetekre helyes megoldást ad.

Beküldendő egy `s156.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

❄

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:

`https://www.komal.hu/munkafuzet`

Beküldési határidő: 2021. december 15.

❄

Európai Természettudományos Diákolimpia Szegeden (EOES 2021)

Az Európai Természettudományos Diákolimpiát (European Olympiad of Experimental Science, EOES, korábban European Union Science Olympiad, EUSO) ebben az évben Magyarországon, a Szegedi Egyetemen rendeztük. A járványhelyzet miatt a versenyt nem lehetett a hagyományos módon megtartani, ugyanakkor a verseny jellege miatt – csapatok közösen oldanak meg kísérleti feladatokat (ismertetés a *KöMaL*-ban, 2017. novemberi szám, 486–488. oldal) – az online rendezés se jöhetett szóba. A megoldás egy „distributed" rendezés volt: végül Európa 20 városában, 20 egyetemi vagy iskolai laboratóriumban versenyzett 18 ország 38 csapata. A feladatok főként a helyszínen elvégzendő mérésekből, illetve kis részben a Magyarországon előzetesen megmért adatok kiértékeléséből állt.

Ez a forma természetesen rengeteg szervezési nehézséget okozott: biztosítani kellett, hogy a különböző helyszíneken lényegében azonos körülmények között dolgozhassanak a diákok. A kísérleti berendezés egy részét – pontos leírásnak megfelelően – a helyi szervezők gyűjtötték össze, a speciálisabb eszközöket és a mérési mintákat pedig Magyarországról küldtük ki gyorspostával. A feladatok megvitatása online történt, erre a szokásosnál több időt hagytunk. A verseny lebonyolítását a helyi szervezők végezték, a verseny után a dolgozatokat beszkennelték, és feltöltötték a rendezők által biztosított felületre, így a javítás és a pontozás a szokásos módon történhetett. Az eredményhirdetés és a záróünnepség – a nyitóünnepséghez és a közösségi programokhoz hasonlóan – online zajlott.

A versenyről a `https://u-szeged.hu/eoes2021` honlapon minden információ megtalálható. A továbbiakban csak a fizika feladatokat ismertetjük röviden.

Az első versenynap témája az *akácméz* volt, mindhárom tantárgy feladatai ehhez kapcsolódtak. A fizika rész két feladatból állt: egy valódi mérésből és egy, a verseny előtt a *BME Fizikai Intézetében* elvégzett, videóval is részletesen dokumentált mérés kiértékeléséből.

Az első, hosszabb feladatban a méz viszkozitásának hőmérsékletfüggését kellett meghatározni. Ehhez a versenyzők először egy ellenálláshőmérőt hitelesítettek forró (és lassan hűlő) víz segítségével. Ezután összeállították a mérési elrendezést, ahol az akácmézzel töltött henger vízfürdőben állt – ezzel lehetett beállítani a méz hőmérsékletét, amelyet a mézben elhelyezett ellenálláshőmérővel tudtak megmérni. A diákok a mézbe apró fémgolyókat ejtettek és mérték a golyók süllyedési sebességét a méz hőmérsékletének függvényében. A mérés kiértékeléséhez, azaz a hőmérsékletfüggő viszkozitás kiszámításához szükség volt a méz és a fémgolyók sűrűségére, valamint az apró golyók átmérőjére is. Ezeket szintén a versenyzők mérték meg. Az elmélet szerint a folyadékok viszkozitásának hőmérsékletfüggését az $\eta = Ae^{B/T}$ összefüggés írja le, ahol T az abszolút hőmérséklet, A és B pedig a folyadékra jellemző állandók. A versenyzők feladata ezen állandók meghatározása volt *egyenes-*

illesztéssel, amihez az összefüggést megfelelően linearizálni kellett ($\ln\eta$-t ábrázolni $1/T$ függvényében).

A második feladat a méz melasszal történő hamisításának leleplezéséről szólt. Az akácméz megfelelően kis hullámhosszúságú (kék) lézerfénnyel megvilágítva fluoreszkál (a megvilágító fénynél nagyobb hullámhosszon fényt bocsát ki), amelynek hullámhosszfüggő intenzitása spektrofotométerrel kimérhető. A spektrumot egy jól meghatározott hullámhosszon megjelenő csúcs jellemzi. A melasszal kevert méz is fluoreszkál, de a spektrum eltér a tiszta akácméz spektrumától: megjelenik egy jellegzetes mellékcsúcs is. A részletesen dokumentált mérésben különböző arányban melasszal hígított mézek kimért spektruma alapján egy kalibrációs görbét kellett a versenyzőknek felvenni, amely a mellékcsúcs és a főcsúcs arányát ábrázolja a melaszkoncentráció függvényében. Ezután ennek segítségével egy ismeretlen minta koncentrációját határozták meg a spektruma alapján.

A második versenynap témája a *Tisza, a szőke folyó* volt. A Tisza „szőkeségét" a vízben lebegő homok és agyagszemcsék okozzák, így a fizika feladatok a homok (és általában a granulált anyagok) sokszor meglepő viselkedésével foglalkoztak.

Az első feladatban ismét a laboratóriumban elvégzett kísérletek voltak. A diákok először különböző homokminták *rézsűszögét* mérték meg (a mintákat óvatosan átlátszó, párhuzamos falú edénybe töltve), majd a homok-mák keverék öntés közben kialakuló *spontán szegregációját* tanulmányozták: az edényben párhuzamos homok- és mákrétegek alakulnak ki.

A következő részfeladatban a granulált anyagok egyik izgalmas tulajdonságát, az *eldugulás*t kellett vizsgálni. A versenyzők közvetlenül egy érzékeny mérleg fölé rögzített kicsi, hengeres csőbe lassan homokot öntöttek és leolvasták a mérleg által mutatott értéket a homokoszlop magasságának függvényében. Gondos mérés esetén az derült ki, hogy a homok a saját súlyánál kisebb erővel nyomja a mérleget, mert a súlyának egy részét a súrlódáson keresztül a cső fala tarja meg. Ugyanakkor a csövet hajszálnyit megemelve, majd visszaengedve a mérleget nyomó erő a homok súlyánál nagyobb is lehet: ilyenkor a nyugalmi súrlódási erő iránya megváltozik, az is lefelé hat. Ezt a jelenséget a mérési eredmények alapján a versenyzőknek fel kellett ismerni, majd magyarázatként a válaszlapon lévő ábrába az erőket berajzolni. Összehasonlításként a mérést vízzel is elvégezték, ahol – nyugalmi súrlódás hiányában – a mérleget nyomó erő megegyezett a folyadék súlyával.

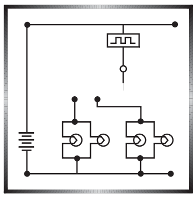
A diákok végül pedig meghatározták a homokszemcsék anyagának sűrűségét. Ez nem olyan könnyű, hiszen a szemcsék között üres tér van: ennek nagyságát a mintára öntött, a homok által „elnyelt" víz tömege alapján lehetett meghatározni.

A másik feladat ezen a napon is egy, Budapesten elvégzett mérés kiértékelése volt. A vízbe szórt és alaposan felkevert homok a szemcsék méretétől függő sebességgel ülepedik. Az ülepedést pedig mérni lehet a vízen áthaladó fény intenzitáscsökkenésével: a felkevert mintában először a nagyobb, majd az egyre kisebb szemcsék ürülnek ki a fénysugár magasságában, és így a fényintenzitás időfüggéséből meghatározható a szemcsék méretének eloszlása. A kiértékeléshez szükség van (a víz ismert sűrűségén és viszkozitásán kívül) a homokszemcsék anyagának sűrűségére is, amelyet a versenyzők az előző mérésben már meghatároztak.

A feladatok teljes szövege, a válaszlapok a helyes megoldással és a pontozási útmutató is megtalálható a verseny fentebb megadott honlapján (angolul).

Vankó Péter

Fizika gyakorlatok megoldása



G. 741. *Tegyük fel, hogy a hóbortos ötleteiről ismert multimilliárdos,* Elon Musk *úgy akarja közvetlenül meghatározni a Föld körül geostacionárius pályán keringő műholdak számát, hogy ugyanennek a pályának a közvetlen közelébe juttat egy számláló műholdat, amely nem nyugatról keletre, hanem éppen ellenkezőleg, keletről nyugatra halad. Mennyi idő alatt számolja meg ez a műhold az összes, a Földhöz viszonyítva álló műholdat?*

(*3 pont*)

Megoldás. A geostacionárius pályán haladó műholdak a Földhöz képest egyhelyben állnak, egy teljes kört 24 óra alatt tesznek meg. Egy adott magasságban jól meghatározott (kiszámítható) sebességgel kell haladnia egy műholdnak, hogy a körmozgásához szükséges erő éppen egyenlő legyen a gravitációs erővel. Az adott magassághoz tartozó sebesség nagyságát nem befolyásolja az, hogy melyik irányba halad a műhold, így a számláló műholdnak is ugyanakkora sebességgel kell haladnia, mint a többi műholdnak, vagyis a „fordulatszáma" $\frac{1}{24}$ fordulat/óra.

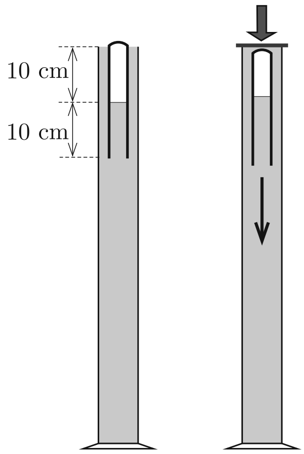
Mivel a műholdak a Földhöz képest álló helyzetben vannak, a számláló műholdnak (a Földről nézve) egy teljes kört kell megtennie ezen a pályán, hogy minden műholddal találkozzon. (Az egyes műholdak ugyanakkora sebességgel haladnak, nem előzik le egymást, így ha a számláló műhold az első műholdhoz visszaér, akkor mindegyik mellett elment már egyszer.) Mivel a Föld az egyik irányba tesz meg $\frac{1}{24}$ fordulatot óránként, míg a számláló műhold ugyanennyit a másik irányba, így a relatív fordulatszámuk

$$\frac{1}{24}-\left(-\frac{1}{24}\right)=\frac{1}{12}$$

fordulat óránként. A számláló műholdnak (a Földhöz képest) 1 teljes fordulatot kell megtennie, és ehhez 12 órára van szüksége, tehát 12 óra alatt számolhatja meg az összes geostacionárius műholdat.

Marozsi Lenke Sára (Kecskeméti Katona J. Gimn., 10. évf.)

30 dolgozat érkezett. Helyes 27 megoldás. Hiányos (1 pont) 2, hibás 1 dolgozat.



G. 748. *Egy magas, vízzel telt mérőhengerbe szájával lefelé fordított,* 20 cm *hosszú kémcsövet (Cartesius-búvárt) helyezünk úgy, hogy a kémcső felső felében levegő, alsó felében pedig víz legyen. Ekkor a kémcső úszik, zárt, felső vége kissé kiemelkedik a mérőhengerben lévő vízből. A mérőhenger tetejét gumilappal zárjuk le, majd akkora erővel nyomjuk lefelé a gumilapot, hogy ennek hatására a kémcsőben lévő levegő nyomása* 5 kPa-*lal megnő. Ebben a pillanatban a „búvár" elindul lefelé.*

a) A „búvár" elmerülésének a kezdetén mekkora volt a kémcsőbe zárt levegőoszlop magassága?

b) Legalább milyen magas a mérőhenger, ha a „búvár" lent marad akkor is, amikor eltávolítjuk a gumilapot a mérőhenger tetejéről?

(*4 pont*)

Megoldás. Kezdetben a levegő–víz határfelület a „búvárban" a mérőhenger vízszintje alatt 10 cm-rel van, és mivel 10 cm magas vízoszlop hidrosztatikai nyomása 1 kPa, ezért a bezárt levegő kezdeti nyomása 101 kPa. (Feltételezzük, hogy a külső légnyomás $p_0 = 100$ kPa.)

a) Az 5 kPa-nyi nyomásnövekedés közben a „búvárba" bezárt levegő izotermikusan összenyomódik, így a Boyle–Mariotte-törvény szerint a levegő térfogatával arányos hossza:

$$\ell_1 = \ell_0 \frac{p_1}{p_0} = 10\ \text{cm}\,\frac{101\ \text{kPa}}{106\ \text{kPa}} = 9{,}53\ \text{cm} \approx 9{,}5\ \text{cm}.$$

A Cartesius-búvár elmerülésének kezdetén tehát 9,5 cm volt a kémcsőbe bezárt levegőoszlop hossza.

b) A „búvár" akkor marad lenn a mérőhenger fenekén, ha a kémcsőben lévő levegőoszlop hossza legfeljebb 9,5 cm, tehát a bezárt levegő nyomása legalább 106 kPa. Ez akkor teljesül, ha a kémcsőben a vízszint legalább 60 cm-rel mélyebben van a mérőhenger tetejénél. A kémcső vízzel teli részének hossza 20 cm − 9,5 cm = = 10,5 cm, a mérőhenger magassága tehát

$$H \geqslant 60\ \text{cm} + 10{,}5\ \text{cm} = 70{,}5\ \text{cm}.$$

Vágó Botond (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 9. évf.)

25 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (2 pont) 3, hibás 2 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

Áprilisi pótfeladat.[*] *Egy függőleges falú medence a csap kinyitása után T idő múlva telik meg. Ezt a vízmennyiséget a lefolyónyílás megnyitása után $2T$ idő alatt lehet leereszteni. Mennyi idő alatt telik meg a medence, ha nyitott lefolyónyílás mellett szeretnénk a medencét a csap megnyitásával feltölteni?*

Közli: *Radnai Márton,* Budapest

Megoldás. Jelöljük x-szel azt az arányt, amely megmutatja, hogy a medence a teljes magasságának hányad részéig van vízzel töltve.

Feltöltéskor x időben egyenletesen növekszik, és mivel T idő alatt éri el az $x=1$ értéket,

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}}=\frac{1}{T}.$$

Kifolyáskor a kiáramlási sebesség – és ezzel arányosan x egységnyi idő alatti csökkenése – a Torricelli-törvény szerint a vízszint magasságának (tehát x-nek is) a négyzetgyökével arányos:

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}}=-K\sqrt{x}\,.$$

A K arányossági tényezőt úgy kell megválasztani, hogy x éppen $2T$ idő alatt csökkenjen le 1-ről 0-ra.

Mivel a kiáramlást leíró egyenlet ugyanolyan alakú, mint egy nulla kezdősebességgel induló, állandó a gyorsulású mozgásnál a sebesség és az elmozdulás közötti $v=\sqrt{2ax}$ összefüggés, megállapíthatjuk, hogy a folyadékszint is időben egyenletesen változó sebességgel csökken le nullára.

A kezdeti csökkenési ütem K, a végső nulla, átlagosan tehát $K/2$-vel egyenlő x csökkenésének sebessége. Ez az átlagos csökkenési idő kifejezhető a teljes kiürülési idővel:

$$\frac{K}{2}=\frac{1}{2T}.$$

Ha a töltőcsap is és a lefolyó is nyitva van, akkor a töltésből és a kiürülésből adódó változási sebességek összegződnek:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{be}}+\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\text{ki}}=\frac{1-\sqrt{x}}{T}.$$

Látjuk, hogy minél jobban megközelíti x az 1 értéket, annál lassabbá válik a vízszint emelkedése. Kérdés, hogy mikor éri el (ha egyáltalán eléri) x az 1-et.

[*] Ez a – pontversenyen kívüli – feladat a KöMaL 2021. áprilisi számában jelent meg.

Tegyük fel, hogy bizonyos t_0 idő alatt a medence már majdnem megtelt, vagyis az $x(t) \equiv 1-\varepsilon(t)$ jelölést használva $\varepsilon(t_0) \ll 1$. A tartályból még hiányzó ε hányad csökkenési sebessége:

$$\frac{\Delta\varepsilon(t)}{\Delta t} = -\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{1}{T}\left(1-\sqrt{x}\right) = -\frac{1}{T}\left(1-\sqrt{1-\varepsilon(t)}\right) \approx -\frac{1}{2T}\varepsilon(t).$$

Ez az egyenlet éppen olyan, mint az $1/(2T)$ bomlási állandójú radioaktív bomlás egyenlete, amelynek a megoldása

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_0)\,\mathrm{e}^{-(t-t_0)/(2T)}.$$

Innen leolvasható, hogy bármilyen hosszú ideig is várunk, a medence *sosem telik meg* teljesen. Másképpen megfogalmazva: a medence hosszú idő után *gyakorlatilag* teljesen tele lesz, miközben ugyanannyi víz folyik bele, mint amennyi távozik, hiszen $x=1$ esetében lesz a kifolyási és a beömlési sebességek nagysága egyenlő.

P. 5313. *Egy protonnyalábot álló céltárgyra ejtünk. Ha a nyalábban lévő protonok mozgási energiája nagyobb egy kritikus* E_{krit} *értéknél, akkor a beeső protonok a céltárgyban lévő, nyugvónak tekinthető protonokkal ütközve pozitív pionokat* (π^+) *kelthetnek az alábbi módon:*

$$\mathrm{p}^+ + \mathrm{p}^+ \Rightarrow \mathrm{p}^+ + \mathrm{n}^0 + \pi^+.$$

Határozzuk meg E_{krit} *értékét* MeV *egységekben!*

Felhasználható adatok: a proton nyugalmi energiája 938,27 MeV, *a neutron nyugalmi energiája* 939,57 MeV, *a pion nyugalmi energiája* 139,57 MeV.

(*5 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. A folyamatot leírásánál nyilván a relativisztikus kinematika és dinamika összefüggéseit kell alkalmaznunk. Felhasználjuk, hogy egy m_0 nyugalmi tömegű, v sebességgel mozgó részecske összes energiája

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

a mozgási energiája pedig

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0c^2,$$

ahol c a vákuumbeli fénysebesség. Szükségünk lesz még a relativisztikus sebességösszeadás képletére is:

$$u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}},$$

ahol u a részecske sebessége az egyik, u' pedig egy másik, az előzőhöz képest v relatív sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerben.

Vizsgáljuk a folyamatot a két proton tömegközéppontjának vonatkoztatási rendszeréből. Ebben a rendszerben a két proton ugyanakkora sebességgel közeledik egymáshoz, a kezdeti lendületük tehát 0. A lendületmegmaradás törvénye szerint reakció után is nulla lesz a három részecske összes lendülete.

A reakció után a három részecske összenergiája akkor lesz a legkisebb, ha mindhárom részecske (jó közelítéssel) áll, ilyenkor az energiájuk összege a nyugalmi energiák összege lesz. Legyen az ütköző protonok sebessége a tömegközépponti rendszerben v, a részecskék megadott *nyugalmi* energiáját pedig jelöljük rendre E_p-vel, E_n-nel éa E_π-vel. A folyamat energiamérlege:

$$\frac{2E_\mathrm{p}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=E_\mathrm{p}+E_\mathrm{n}+E_\pi.$$

Négyzetre emelés és rendezés után kapjuk, hogy

$$\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{2E_\mathrm{p}}{E_\mathrm{p}+E_\mathrm{n}+E_\pi}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{2\cdot 938{,}27}{938{,}27+939{,}57+139{,}57}\right)^2}=0{,}367.$$

A proton kritikus (a pionkeltéshez szükséges legkisebb) sebessége tehát a tömegközépponti rendszerben $v=0{,}367\,c$. Számoljuk ki, hogy mekkora v_krit sebességnek felel meg ez (a tömegközépponthoz képest v sebességgel mozgó) laboratórium vonatkoztatási rendszerében. A kritikus esetben

$$v_\mathrm{krit}=\frac{v+v}{1+\frac{v^2}{c^2}}=\frac{2\cdot 0{,}367}{1+0{,}367^2}c=0{,}647\,c.$$

A nyalábban mozgó protonok kritikus mozgási energiája tehát

$$v_\mathrm{krit}=\frac{E_\mathrm{p}}{\sqrt{1-(v_\mathrm{krit}/c)^2}}-E_\mathrm{p}=\frac{938{,}27\ \mathrm{MeV}}{\sqrt{1-0{,}647^2}}-938{,}27\ \mathrm{MeV}\approx 292{,}3\ \mathrm{MeV}.$$

(Ilyen sebességre a kezdetben állónak tekinthető protonokat 292,3 millió volt feszültséggel lehet felgyorsítani.)

Mihalik Bálint (Kecskemét, Bányai Júlia Gimn., 11. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes Koleszár Benedek, Ludányi Levente, Mihalik Bálint, Mócza Tamás István, Somlán Gellért, Téglás Panna és Tóth Ábel megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 10, hibás 4 dolgozat.

P. 5322. *Egy digitális fényképezőgép téglalap alakú szenzorának mérete:* 23,5 mm × 15,6 mm, *és ez a szenzor* 6045 × 4003 *képpontot képes rögzíteni. Oldalról,* 20 méter *távolságból lefényképezünk a géppel egy* 40 km/h *sebességgel haladó motorcsónakot.*

Mekkorának válasszuk a 35 mm gyújtótávolságú objektívvel felszerelt fényképezőgép expozíciós idejét, ha nem szeretnénk, hogy a motorcsónak képe „bemozduljon” (életlenné váljon)?

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A kép akkor válik életlenné, ha a motorcsónaknak a szenzoron keletkező képe az expozíciós idő alatt nagyobb távolságot tesz meg, mint két szomszédos képpont távolsága.

A szenzor nagyobbik mérete 23,5 mm, és ez 6054 képpontnak felel meg, tehát a szomszédos képpontok távolsága

$$K_0 = \frac{23{,}5 \text{ mm}}{6054} = 3{,}89 \cdot 10^{-3} \text{ mm}.$$

(Ugyanezt az értéket kapjuk, ha a szenzor kisebbik méretét osztjuk 4003-mal.)

Az expozíció t ideje alatt a motorcsónak $T = vt$ távolsággal mozdul el, ahol

$$v = 40 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{40\,000}{3{,}6} \ \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

A leképezés olyan, mintha egy $\ell = 20 \text{ m} = 2 \cdot 10^4$ mm távol lévő, T nagyságú tárgyat fényképeznénk le, és azt szeretnénk elérni, hogy az objektívtől $k = 35$ mm távolságban (gyakorlatilag a fókuszsíkban) keletkező kép K mérete ne legyen nagyobb K_0-nál. Az ℓ tárgytávolság, a $k \approx f$ képtávolság, a T tárgyméret és a K képméret között fennálló összefüggés:

$$\frac{T}{K} = \frac{\ell}{k}, \qquad \text{vagyis} \qquad K = T\frac{k}{\ell} = \frac{vtk}{\ell} \leqslant K_0.$$

Ennek megfelelően az expozíciós idő:

$$t \leqslant \frac{\ell K_0}{vk} = \frac{20\,000 \text{ mm} \cdot 3{,}6 \cdot 3{,}89 \cdot 10^{-3} \text{ mm}}{40\,000 \ \frac{\text{mm}}{\text{s}} \cdot 35 \text{ mm}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ s},$$

azaz legfeljebb 0,2 ms lehet.

Haubner Henrik (Győr, Révai M. Gimn., 10. évf.)

9 dolgozat érkezett. Helyes Hauber Henrik, Ludányi Levente, Mócza Tamás István és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 5 dolgozat.

P. 5325. *Egy kamrában hosszú ideje működik egy fagyasztóláda. A hőmérséklet a ládán belül* -20 °C*, a kamrában* 25 °C*, a kamrán kívül, a lakás többi részén pedig* 20 °C *van. Mekkora lesz hosszú idő után a kamrában a hőmérséklet, ha még egy ugyanilyen fagyasztóládát bekapcsolunk?*

Feltehetjük, hogy a lakás hőmérséklete a kamrán kívül nem változik. A hűtőládákat tekintsük ideális Carnot-gépeknek, amelyek termosztátja úgy van beállítva, hogy belül fenntartja a -20 °C*-os hőmérsékletet.*

(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. Ismert adatok:
– a hűtőláda (fagyasztóláda) belső hőmérséklete: $T_{\text{hűtő}} = -20\ {}^\circ\mathrm{C} = 253$ K,
– a kamra hőmérséklete: $T_{\text{kamra}} = 25\ {}^\circ\mathrm{C} = 298$ K,
– a lakás hőmérséklete: $T_{\text{lakás}} = 20\ {}^\circ\mathrm{C} = 293$ K.

A hűtőgép a hűtőláda $T_{\text{hűtő}}$ hőmérsékletű belsejéből időegységenként Q_{fel} hőt vesz fel és a T_{kamra} hőmérsékletű kamrának Q_{le} hőt ad le. $Q_{\text{le}} > Q_{\text{fel}}$, a különbözetet a hűtőgép

$$W = Q_{\text{le}} - Q_{\text{fel}}$$

munkája (áramfogyasztása) fedezi. A kamrába időegységenként bevitt energia éppen ezzel a munkával egyenlő:

$$Q_{\text{be}} = W.$$

Ha a hűtőládát ideális Carnot-gépnek tekintjük, akkor

$$\frac{Q_{\text{le}}}{Q_{\text{fel}}} = \frac{T_{\text{kamra}}}{T_{\text{hűtő}}}, \tag{1}$$

vagyis a gép

$$Q_{\text{le}} = Q_{\text{fel}} \frac{T_{\text{kamra}}}{T_{\text{hűtő}}}$$

hőt ad le időegységenként.

A hűtőláda hideg belsejébe a melegebb kamrából folyamatosan hő szivárog be. A Newton-féle hővezetési törvény szerint az időegységenként átadott hő a hőmérséklet-különbséggel és a hővezető felület nagyságával arányos. Állandósult (stacionárius) állapotban a hővezetéssel átadott hő éppen megegyezik a hűtőgép által a ládából felvett hővel:

$$Q_{\text{fel}} = k_{\text{hűtő}}(T_{\text{kamra}} - T_{\text{hűtő}}), \tag{2}$$

ahol $k_{\text{hűtő}}$ a hűtőláda falának anyagára jellemző állandó, amely arányos a láda felületének nagyságával (több egyforma fagyasztóláda esetén a berendezések számával).

A kamrából – ugyancsak hővezetéssel – hő adódik át a kamránál hidegebb lakásnak. Az időegységenként kiáramló hő arányos a kamra és a lakás hőmérséklet-különbségével:

$$Q_{\text{ki}} = k_{\text{fal}}(T_{\text{kamra}} - T_{\text{lakás}}), \tag{3}$$

ahol k_{fal} a kamra és a lakás közötti fal anyagától és felületének nagyságától függő állandó.

$Q_{\text{be}} > Q_{\text{ki}}$ esetén a kamra hőmérséklete folyamatosan emelkedne, $Q_{\text{be}} < Q_{\text{ki}}$ esetén pedig a kamra egyre hidegebb lenne. Egyensúlyi (stacionárius) állapot akkor alakul ki a kamrában, ha

$$Q_{\text{be}} = Q_{\text{ki}}. \tag{4}$$

Tudjuk, hogy

$$Q_{\rm be} = Q_{\rm le} - Q_{\rm fel} = Q_{\rm fel}\left(\frac{Q_{\rm le}}{Q_{\rm fel}} - 1\right),$$

ami (1) és (2) felhasználásával így is felírható:

$$Q_{\rm be} = k_{\text{hűtő}}\frac{\left(T_{\rm kamra} - T_{\text{hűtő}}\right)^2}{T_{\text{hűtő}}}. \tag{5}$$

A (3) és (5) kifejezéseket (4)-be helyettesítve megkapjuk a kamra állandó hőmérsékletének feltételét:

$$\frac{k_{\rm fal}}{k_{\text{hűtő}}} = \frac{\left(T_{\rm kamra} - T_{\text{hűtő}}\right)^2}{T_{\text{hűtő}}\left(T_{\rm kamra} - T_{\text{lakás}}\right)}. \tag{6}$$

Az ismert adatokat behelyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{k_{\rm fal}}{k_{\text{hűtő}}} = \frac{(298-253)^2}{253\,(298-293)} = 1{,}60.$$

Mi történik, ha egy második fagyasztóládát is bekapcsolunk? A hővezetési tényezők közül $k_{\rm fal}$ nyilván változatlan marad, de $k_{\text{hűtő}}$ az eredeti érték kétszeresére nő. A kialakuló stacionárius állapot egyenlete tehát (6)-nak megfelelően

$$\frac{(x-253)^2}{253\,(x-293)} = 0{,}80, \tag{7}$$

ahol x a kamra új (kelvinben kifejezett) hőmérséklete.

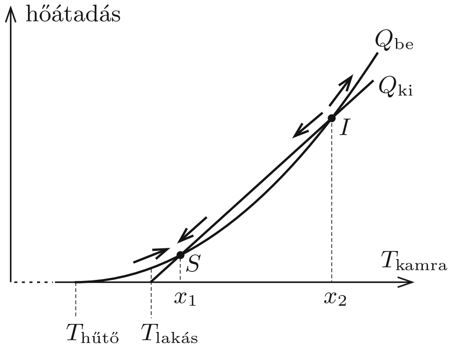
A másodfokú egyenletté alakítható (7) gyökei:

$$x_1 = 308\ \mathrm{K} \approx 35\ {}^\circ\mathrm{C}, \qquad \text{illetve} \qquad x_2 = 401\ \mathrm{K} \approx 127\ {}^\circ\mathrm{C}.$$

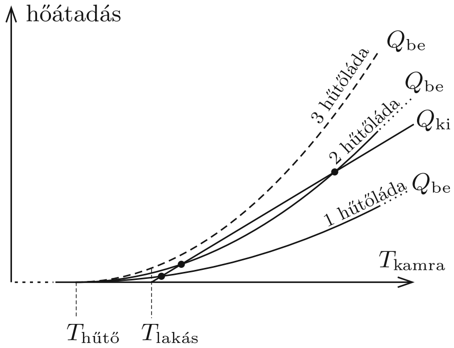
Az, hogy két megoldás is lehet, már (3)-ból és (5)-ből is látszik, hiszen a kamrába beáramló hő $T_{\rm kamra} = x$ függvényében egy felfelé nyitott parabola egyenlete, a kiáramló hő pedig x lineáris függvénye. Az *1. ábra* ezt a két függvényt ábrázolja (nem méretarányosan). A parabola és az egyenes S és I metszéspontja jelöli ki azokat a hőmérsékleteket, amelyeknél a kamrába beáramló és az onnan kiáramló hő éppen megegyezik.

A kisebb hőmérséklethez tartozó (S) metszéspont *stabil* állapotnak felel meg, hiszen x_1-nél kicsit magasabb hőmérsékleten $Q_{\rm ki} > Q_{\rm be}$, tehát a kamra hűlni kezd, x_1-nél kicsit alacsonyabb hőmérsékleten pedig éppen fordított a helyzet: $Q_{\rm be} > Q_{\rm ki}$, tehát a kamra melegedni fog.

A magasabb hőmérséklethez tartozó (I) metszéspont viszont *instabil* állapotot ad meg. $T_{\rm kamra} = x_2$ esetén a kamrába be- és kiáramló hő éppen megegyezik, de ha bármilyen ok miatt egy kicsit eltér a hőmérséklet az egyensúlyi értéktől, az eltérés tovább növekszik, és a kamra hőmérséklete vagy x_1-ig csökken, vagy „korlátlanul”



1. ábra



2. ábra

növekszik. (A korlátlan felmelegedésnek a valóságban a hűtőgép korlátozott teljesítménye szab határt; ezt a teljesítményhatárt elérve a gép már nem tudja biztosítani a fagyasztóláda állandó, -20 °C-os hőmérsékletét.)

A második hűtőgép bekapcsolása után (elegendően hosszú idő elteltével) a kamra hőmérséklete 25 °C-ról 35 °C-ra emelkedik, és – normál körülmények között – ennyi is marad (*2. ábra*). Az ábráról azt is leolvashatjuk, hogy egy esetlegesen bekapcsolt harmadik hűtőláda esetén (szaggatott vonal) a kamrába bevitt hő mindig nagyobb, mint az onnan elvezetett hő, tehát nem alakulhat ki állandósult hőmérséklet.

Kertész Balázs (Debreceni Ref. Koll. Dóczy Gimn., 11. évf.) és
Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata felhasználásával

8 dolgozat érkezett. Helyes Hauber Henrik, Kertész Balázs, Ludányi Levente, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–3 pont) 3 dolgozat.

P. 5326. *Egy ismeretlen magasságú toronyból elejtünk egy testet, amely szabadon esik. A közegellenállástól eltekintünk.*

a) A torony magasságát gondolatban osszuk két egyenlő részre. Határozzuk meg a két egyenlő szakaszon számított átlagsebességek arányát!

b) Hogyan osszuk fel két részre a $h=45$ *méteres torony magasságát, hogy a második szakaszon számított átlagsebesség négyszerese legyen az első szakaszon számított átlagsebességnek?*

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) Legyen a torony magassága h. A test az első szakaszon $\frac{h}{2}$ utat tesz meg t_1 idő alatt:

$$\frac{h}{2}=\frac{g}{2}t_1^2, \qquad \text{ahonnan} \qquad t_1=\sqrt{\frac{h}{g}}\,.$$

Számoljuk ki az esés teljes idejét:

$$h=\frac{g}{2}\,t_{\text{összes}}^2,\qquad \text{tehát}\qquad t_{\text{összes}}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\,.$$

A második szakasz megtételéhez szükséges idő:

$$t_2=t_{\text{összes}}-t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{h}{g}}\,.$$

Az átlagsebességek aránya:

$$\frac{\overline{v}_1}{\overline{v}_2}=\frac{\frac{(h/2)}{t_1}}{\frac{(h/2)}{t_2}}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{h}{g}}}{\sqrt{\frac{h}{g}}}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41.$$

(Látható, hogy az eredmény sem h-tól, sem g-től *nem* függ.)

b) Legyen az első szakasz hossza x, ekkor a második szakasz hossza $h-x$. Az első szakasz megtételéhez szükséges idő

$$t_1=\sqrt{\frac{2x}{g}},$$

a teljes esési idő

$$t_{\text{összes}}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\,,$$

a második szakasz megtételéhez tehát

$$t_2=t_{\text{összes}}-t_1=\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{2x}{g}}$$

időre van szükség.

Az átlagsebességek aránya ebben az esetben

$$\frac{\overline{v}_1}{\overline{v}_2}=\frac{\frac{x}{t_1}}{\frac{h-x}{t_2}}=\frac{x\cdot t_2}{(h-x)\cdot t_1}=\frac{x\left(\sqrt{\frac{2h}{g}}-\sqrt{\frac{2x}{g}}\right)}{(h-x)\sqrt{\frac{2x}{g}}}=\frac{x\left(\sqrt{h}-\sqrt{x}\right)}{(h-x)\sqrt{x}},$$

vagyis a megadott aránynak megfelelően

$$\frac{x\left(\sqrt{h}-\sqrt{x}\right)}{(h-x)\sqrt{x}}=\frac{1}{4}.$$

Mivel x sem nulla, sem h nem lehet, a fenti törtet egyszerűsíthetjük $\sqrt{x}$-szel és $\left(\sqrt{h}-\sqrt{x}\right)$-szel:

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{4},$$

ahonnan $3\sqrt{x}=\sqrt{h}$, azaz

$$x=\frac{h}{9}=5\text{ m}.$$

(Ez az eredmény is független g-től.)

Gábriel Tamás (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

43 dolgozat érkezett. Helyes 29 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 5, hibás 2, nem értékelhető 1 dolgozat.

P. 5328. *Satuba fogunk vízszintesen egy könnyű, hosszú acélpálcát. A végére egy nehezéket erősítünk, ami a pálca végét* 1 cm*-rel nyomja le annak eredeti helyzetéhez képest. Ha kis kitérésű rezgésbe hozzuk, mennyi lesz a rezgésideje?*

(*4 pont*) Közli: *Gelencsér Jenő,* Kaposvár

Megoldás. Amikor az acélpálca $s=1$ cm-t lehajlik és megáll, akkor a nehezékre ható nehézségi erő és a rugalmas erő eredője nulla:

$$mg=Ds,$$

ahol D a (rugónak tekinthető) pálca „rugóállandója". Eszerint

$$D=\frac{mg}{s},$$

és a „rugó" végén rezgő test mozgásának periódusideje

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}=2\pi\sqrt{\frac{s}{g}}=2\pi\sqrt{\frac{10^{-2}\text{ m}}{9{,}81\text{ m/s}^2}}\approx 0{,}20\text{ s}.$$

Kovács Kinga (Kecskemét, Katona J. Gimn., 10. évf.)

14 dolgozat érkezett. Helyes 13 megoldás, kicsit hiányos (2 pont) 1 dolgozat.

P. 5329. *Vízszintes táblán egy krétadarab nyugszik. A táblát meglökve, a tábla hirtelen vízszintes, v_0 nagyságú sebességet kap, majd T idő múlva egy falnak ütközve ugyanilyen hirtelen megáll. Milyen hosszú nyomot hagy a kréta a táblán, ha a kréta és a tábla közötti súrlódási együttható μ?*

(*5 pont*) A *Kvant* nyomán

Megoldás. Legyen $\mathcal{K}$ a laborrendszer, $\mathcal{K}'$ pedig a laborrendszerhez képest a tábla meglökésének irányában v_0 sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszer. (Mindkét rendszer inerciarendszer, melyekben $\boldsymbol{v}_0$ irányát tekintjük pozitív iránynak.)

A hirtelen lökés utáni pillanatban a kréta $\mathcal{K}$-ból nézve még áll, a tábla pedig v_0 sebességgel mozog, $\mathcal{K}'$-ből nézve viszont a kréta mozog $-v_0$ sebességgel, és a tábla áll. A kréta gyorsulása (mindkét vonatkoztatási rendszerben) $+\mu g$.

A további vizsgálathoz két esetet kell megkülönböztetnünk:

(*i*) Ha $T > \frac{v_0}{\mu g}$, akkor a kréta $\mathcal{K}'$-ből nézve $t_1 = \frac{v_0}{\mu g} < T$ idő múlva megáll a mindvégig álló táblán, tehát azon

$$s_1 = \frac{-v_0}{2} t_1 = -\frac{v_0^2}{2\mu g}$$

hosszú nyomot hagy. (A negatív előjel arra utal, hogy a kréta elmozdulása a táblához képest $\boldsymbol{v}_0$-lal ellentétes irányú.) A továbbiakban, egészen a falnak ütközésig a kréta és a tábla sebessége $\mathcal{K}'$-ből nézve nulla, $\mathcal{K}$-ból nézve pedig mindkettő sebessége $+v_0$.

Az ütközéskor a tábla sebessége $\mathcal{K}$-ból nézve hirtelen nullára csökken, a kréta sebessége marad v_0. A kréta $t_2 = \frac{v_0}{\mu g} = t_1$ idő alatt lefékeződik, és az álló táblán

$$s_2 = \frac{v_0}{2} t_2 = +\frac{v_0^2}{2\mu g}$$

hosszú utat tesz meg. Látjuk, hogy $s_1 + s_2 = 0$, tehát a kréta a táblához képest az eredeti helyére kerül vissza, miközben

$$s = |s_1| = s_2 = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

hosszúságú nyomot hagy azon. (A második nyom csak vastagítja az elsőt, de a hosszát nem növeli meg.)

(*ii*) Legyen most $T < \frac{v_0}{\mu g}$. Ekkor $\mathcal{K}'$-ből nézve a kréta sebessége az álló táblán

$$v' = -v_0 + \mu g T < 0$$

lesz a falnak ütközést megelőző pillanatban, és az átlagsebességből számolt elmozdulás

$$s_1 = \frac{-v_0 + v'}{2} = -v_0 T + \frac{\mu g T^2}{2} < 0.$$

A krétanyom hossza tehát a mozgás első szakaszában

$$|s_1| = v_0 T - \frac{\mu g T^2}{2}.$$

A falnak történő ütközést megelőző pillanatban $\mathcal{K}$-ból nézve a kréta sebessége $v = \mu g T$, és ugyanennyi marad közvetlenül az ütközés után is. A továbbiakban a kréta $-\mu g$ „gyorsulással” (lassulással) mozog, a megállásáig tehát

$$s_2 = \frac{v^2}{\mu g} = \frac{\mu g T^2}{2}$$

utat tesz meg. Mivel

$$s_1 + s_2 = (\mu g T - v_0) T < 0,$$

a kréta nem jut vissza a táblán az eredeti helyére, a második krétanyom rövidebb lesz, mint az első. A táblán látható nyom tehát ebben az esetben $|s_1|$.

Összefoglalva: a táblán hagyott krétanyom hossza

$$s = \begin{cases} \dfrac{v_0^2}{2\mu g}, & \text{ha } T > \dfrac{v_0}{\mu g}, \\ v_0 T - \dfrac{\mu g}{2} T^2, & \text{ha } T < \dfrac{v_0}{\mu g}. \end{cases}$$

Tóth Ábel (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

17 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 1 dolgozat.

P. 5336. *Elég nagy kiterjedésű, széles, sík mező fölött* 2 km *magasan repül egy szuperszonikus vadászgép vízszintes irányban. A gép hangját a mezőn álló három, egymástól páronként* 14 km*-re lévő megfigyelő egyszerre hallja meg. A repülőgép éppen az egyik megfigyelő feje felett repül el. Mekkora a vadászgép sebessége?*

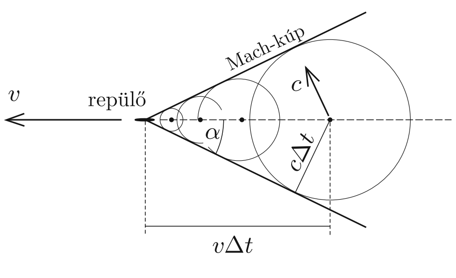
(*6 pont*) Közli: *Vigh Máté,* Biatorbágy

Megoldás. Jelöljük a repülő sebességét v-vel, a hangsebességet pedig c-vel. ($c \approx 340$ m/s.) A vadászgép szuperszonikus, vagyis $v > c$. A $v/c = \mathrm{M}$ hányadost Mach-számnak nevezik (és néha Ma-val jelölik).

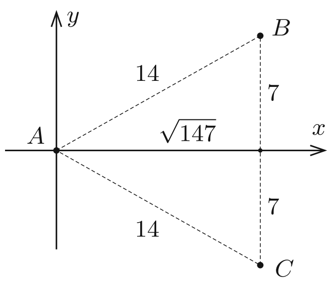
Egy hangforrás által $t = 0$ pillanatban kibocsátott hanghullám t idő elteltével a forrástól ct távolságra lévő pontokban halljuk meg. Ezek a pontok a térben egy ct sugarú gömbfelületen helyezkednek el. A v sebességgel mozgó hangforrás hangja $t = 0$ pillanatban olyan pontokba érkezik el, amelyek tetszőleges Δt idővel korábban indultak el. Ezek a hullámok $v\Delta t$ távolsággal ‚hátrábbról" indultak és $c\Delta t$ sugarú gömbfelületig jutottak el (*1. ábra*). Ezen gömbfelületek határa (burkolója) egy $\alpha = \arcsin \frac{c}{v}$ félnyílásszögű kúpfelület. Ezt a felületet Mach-kúpnak nevezik, amelyre

$$\sin \alpha = \frac{1}{\mathrm{M}}.$$

A vadászgép sebességének kiszámításához az α szöget kell meghatároznunk. Mivel a vadászgép a mező síkjával párhuzamosan repül, a három megfigyelőnek egy hiperbolán (a Mach-kúp síkmetszetén) kell elhelyezkednie. Válasszunk egy olyan



1. ábra



2. ábra

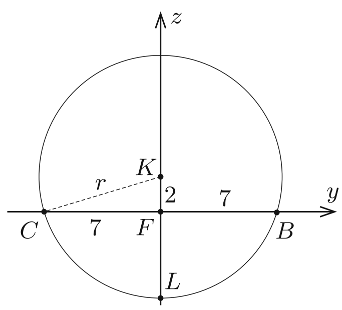
koordináta-rendszert, amelynek x tengelye a vadászgép sebességével párhuzamos, a $z=0$ sík a mező síkja. A koordináta-rendszer origója legyen annál az A megfigyelőnél, amelyiknek éppen a feje felett repült el a vadászgép. A másik két megfigyelő (B és C) az $x-z$ síkra szimmetrikusan helyezkedik el, koordinátáik a megadott (km-ben mért) távolságadatok szerint: $B\big(\sqrt{147},7,0\big)$, $C\big(\sqrt{147},-7,0\big)$. A három megfigyelő helyzetét az $x-y$ síkban a *2. ábra* mutatja.

Legyen B és C felezőpontja F. A Mach-kúpnak a tengelyére merőleges síkmetszetei körök. A B és C pontokra illeszkedő kör középpontja legyen K, a mező alatt legmélyebben található pontja pedig L. A *3. ábra* ezt a kört mutatja az $x=\sqrt{147}$ síkban. Innen leolvashatjuk, hogy a kör sugara

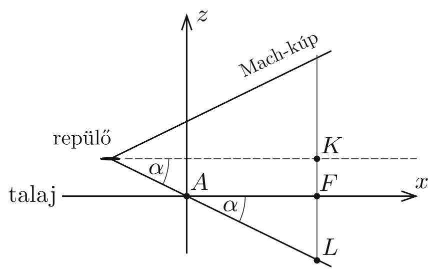
$$r=\sqrt{7^2+2^2}=\sqrt{53}\approx 7{,}28,$$

az L pont z koordinátája pedig

$$z_L=2-r\approx -5{,}28.$$



3. ábra



4. ábra

Ábrázoljuk most a három megfigyelő helyét, a repülő útvonalát és a Mach-kúpot az $x-z$ síkra vetítve (*4. ábra*). Az ábráról leolvashatjuk, hogy

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{FL}{AF}=\frac{5{,}28}{\sqrt{147}}\approx 0{,}435,\qquad \text{tehát}\qquad \alpha=23{,}5^\circ.$$

Ezek szerint

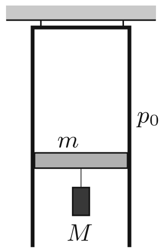
$$\mathrm{M}=\frac{c}{v}=\frac{1}{\sin\alpha}=2{,}5,$$

és így a vadászgép sebessége:

$$v=2{,}5\,c\approx 850\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Téglás Panna (Révkomárom, Selye János Gimn., 11. évf.)
dolgozata alapján

9 dolgozat érkezett. Helyes Kertész Balázs, Somlán Gellért, Téglás Panna, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Hiányos (1–4 pont) 4 dolgozat.



P. 5342. *Függőleges helyzetben rögzített, felül zárt henger m tömegű dugattyúján egy M tömegű test függ. A hengerben lévő, kezdetben V térfogatú levegővel Q hőt közlünk. Kívül a légköri nyomás p_0.*

a) Mennyivel változik meg a gáz belső energiája?

b) Mennyi munkát végez a gáz? Ez a munka milyen energiaváltozásokkal jár együtt?

(A henger fala és a dugattyú hőszigetelő.)

(*4 pont*) *Tichy Géza* (1945–2021) feladata

Megoldás. *a*) A melegítési folyamat során a dugattyú minden pillanatban egyensúlyban van, így a hengerben lévő gáz (levegő) p_1 nyomása minden pillanatban ugyanakkora:

$$p_1A + (m+M)g = p_0A,$$

vagyis

$$p_1 = p_0 - \frac{(m+M)g}{A}.$$

Tegyük fel, hogy az m_0 tömegű bezárt levegő hőmérséklete T_1-ről T_2-re növekszik. Ekkor a közölt hő

$$Q = m_0c_p(T_2 - T_1),$$

a belső energia megváltozása pedig

$$\Delta E_\mathrm{b} = m_0c_V(T_2 - T_1).$$

Látjuk, hogy

$$\frac{\Delta E_\mathrm{b}}{Q} = \frac{c_V}{c_p} = \frac{5}{7},$$

vagyis

$$\Delta E_\mathrm{b} = \frac{5}{7}\,Q.$$

Kihasználtuk, hogy a levegő $f = 5$ szabadsági fokú molekulákból áll, így a fajhőhányados

$$\frac{c_p}{c_V} = \frac{f+2}{f} = \frac{7}{5}.$$

b) Az I. főtétel alapján a gáz által végzett munka

$$W^* = Q - \Delta E_\mathrm{b} = Q - \frac{5}{7}\,Q = \frac{2}{7}\,Q.$$

Ha h-val jelöljük a dugattyú lesüllyedését a melegítés során, akkor a gáz munkavégzése:

$$W^* = p_1Ah = \left(p_0 - \frac{(m+M)g}{A}\right)Ah = p_0Ah - (m+M)gh.$$

Innen leolvashatjuk, hogy a gáz és a nehézségi erő végzett munkát a külső légnyomás ellen. A folyamatban a gáz belső energiája nőtt, az m tömegű dugattyú és a rá akasztott M tömegű test helyzeti energiája csökkent, a környezet (légkör) helyzeti energiája pedig ugyancsak növekedett.

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

24 dolgozat érkezett. Helyes Beke Bálint, Juhász Júlia, Schmercz Blanka és Somlán Gellért megoldása. Kicsit hiányos (3 pont) 9, hiányos (1–2 pont) 10, nem versenyszerű 1 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 408. Ütköztessük egymással befőttesüvegek különböző méretű csavaros fedeleit úgy, hogy az egyik áll, a másik pedig egyenesen ütközik vele. Határozzuk meg az ütközés rugalmasságának mértékét jellemző ütközési számot!

(*6 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

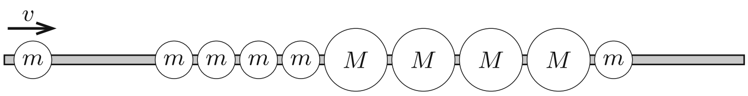
G. 757. Van egy pár kifordítható kesztyűm, mindkét darabja kívül fekete, belül fehér. Tudom-e ezeket felemás kesztyűként hordani?

(*3 pont*) Közli (2021. június): *Vladár Károly,* Kiskunhalas

G. 758. Egy személygépkocsi mögötti, nem túl messze lévő tárgyat egyszerre láthatjuk az autó két oldalsó, valamint a középső (belső) visszapillantó tükrében. Mindhárom tükör sík. Melyik tükörben látja a vezető a tárgy képét legnagyobbnak, illetve legkisebbnek? Másképp fogalmazva, hasonlítsuk össze a három kép látószögét!

(*3 pont*)

G. 759. Egy vízszintes, súrlódásmentes, rögzített pálcára felfűzve négy darab m tömegű, négy darab M tömegű ($m < M$), majd ismét egy m tömegű, tökéletesen rugalmas golyó áll közel egymáshoz az *ábrán* látható elrendezésben. Balról egy m tömegű, szintén tökéletesen rugalmas golyó érkezik v sebességgel, és ütközik a golyósor első tagjával.



A további ütközések lezajlása után mely golyók maradnak nyugalomban, és a többiek milyen irányban fognak mozogni?

(*4 pont*)

G. 760. Alumíniumból készült, 10 cm magas, kúp alakú testet a csúcsához rögzített fonál segítségével lassan kiemelünk egy téglatest alakú akváriumból. Kezdetben a kúp a 10 cm átmérőjű alapkörén áll az akvárium alján, és a víz teljesen ellepi. Az akvárium térfogata sokkal nagyobb, mint az alumíniumkúpé.

Ábrázoljuk a fonalat feszítő erőt a kúp elmozdulásának függvényében!

(*4 pont*) A KöMaL Nyári Tábor mérési feladata nyomán

P. 5355. Újsághír (2021. február 24.): *A kínai Mars-szonda, a Tienven-1 már a Mars körül kering, és adatokat gyűjt a vörös bolygóról. Parkolási pályájának a Mars felszínétől mért legtávolabbi pontja 59 ezer kilométerre, míg a legközelebbi 280 kilométerre van. A szonda két marsi nap alatt tesz meg egy „kört" a bolygó körül.*

Számítással ellenőrizzük, hogy milyen pontossággal igaz a keringési időre megadott érték, ha a többi adatot helyesnek fogadjuk el!

(*4 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5356. Vízszintes talajon fekszik egy téglalap keresztmetszetű gerenda. A téglalap vízszintes oldala L, függőleges oldala H hosszúságú. Elhanyagolva a közegellenállást, honnan és hogyan kell elugrania egy szöcskének, hogy a lehető legkisebb energiaráfordítással sikerüljön átugrania ezt a gerendát? Hol lesz az ugrási parabola fókuszpontja ebben az esetben?

(*5 pont*) *Radnai Gyula* (1939–2021) feladata

P. 5357. Vízszintes asztallapon fekszik egy homogén tömegeloszlású rúd. Ezt a rudat lassan függőleges helyzetbe hozzuk az egyik végére ható, a rúdra mindenkor merőleges erővel. Legalább mekkora a rúd és az asztallap közötti tapadási súrlódási együttható, ha a rúd nem csúszik meg felállítás közben?

(*5 pont*) Amerikai feladat nyomán

P. 5358. Hosszú, vékony, függőlegesen kifeszített szigetelőszálon két gyöngy közül az egyik rögzített, a másikat pedig efölött $h = 0{,}5$ m magasságban tartjuk.

A felső gyöngy tömege $m = 0{,}5$ gramm, mindkét gyöngy elektromos töltése $Q = 2{,}6 \cdot 10^{-7}$ C. Egy adott pillanatban a felső gyöngyöt lökésmentesen elengedjük.

a) Mekkora utat tesz meg a gyöngy a legnagyobb sebesség eléréséig?

b) Mekkora ez a sebesség?

c) Mekkora lesz a két gyöngy közötti minimális távolság?

d) Mekkora a pálya legalsó pontjában a gyöngy gyorsulása?

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

P. 5359. Egy kocka élei kétféle ellenállásból épülnek fel. Valamelyik két szemközti laphoz tartozó 8 db él ellenállásának értéke r, míg az ezekre merőleges 4 db élt alkotó ellenállások értéke R. Határozzuk meg a hálózat eredő ellenállását az egyik R ellenállást közrefogó, két szomszédos csúcspont között!

(*4 pont*) Közli: *Szekeres Béla,* Budapest

P. 5360. Demonstráció céljából egyszerű Kepler-távcsövet készítünk. Ehhez rendelkezésünkre áll két gyűjtőlencse: egy D átmérőjű, f_1 fókusztávolságú objektív és egy d átmérőjű, $f_2 \ll f_1$ fókusztávolságú szemlencse, valamint egy, a távcső tubusában a lencsék közös fókuszsíkjában rögzíthető blende (más néven: fényrekesz). Ezzel szeretnénk szabályozni a távcső képalkotásában szerepet játszó sugárnyalábokat.

a) Mekkora a blende nélküli távcső látómezeje szögben kifejezve (azaz legfeljebb milyen szögtávolságra lehet két csillag akkor, ha egyszerre láthatók a távcsőben)?

b) Legfeljebb mekkorára választhatjuk a „látómező határoló blende” nyílásának átmérőjét ahhoz, hogy a távcső fényerő szempontjából ne torzítson (azaz a kép szélének megfelelő irányokból is minden fény, ami az objektívre esik, átjusson a szemlencsén is)? Mekkora lehet így a távcső látómezeje?

Útmutatás: Vizsgáljuk az optikai tengelyhez képest különböző irányokból az objektívre érkező párhuzamos fénynyalábok alakulását, ahogy áthaladnak a távcsövön! A távcső *kilépő pupillája* (az objektív átmérője osztva a szögnagyítással) kisebb, mint a szemlencse átmérője.

(*5 pont*) Közli: *Woynarovich Ferenc,* Budapest

P. 5361. Az alábbi két képen ugyanazt az autót látjuk, ugyanabban az időben. Az első képen függönyön keresztül, a másodikon függöny nélkül. Az autó 20 méterre volt a függönytől.

Milyen sűrű szövésű lehet a függöny?

(*5 pont*) *Tichy Géza* (1945–2021) feladata

P. 5362. Szinkrociklotronban az elemi részecskék tömegének a sebességtől való függését a gyorsító elektromos tér frekvenciájának csökkentésével kompenzálják. Például ha protonokat gyorsítanak, a duánsokra (D alakú, fémből készült, üreges félkorongokra) kerülő feszültség frekvenciáját 25 MHz-ről 18,9 MHz-ig változtatják ciklusonként. Határozzuk meg ebben az esetben

a) a mágneses indukcióvektor nagyságát;

b) a kilépő protonok kinetikus energiáját!

(*5 pont*) Példatári feladat nyomán

P. 5363. Egy vékony, magas üvegcsőből homokórát készítettünk. A benne lévő homok m_0 tömege megegyezik az üvegcső és a tartótalpak együttes tömegével. Kezdetben a homok az alsó térfél $h = 5$ cm hosszú részét tölti ki, és az eszköz megfordítása után egyenletes ütemben $t_0 =$ $= 1$ perc alatt pereg le. (A felső és az alsó térfélben lévő homok alakját közelítsük hengerekkel.)

a) Határozzuk meg, hogy hol van a homokóra tömegközéppontja t idővel az óra elindítása után! (Ne foglalkozzunk a homokóra indítását követő, illetve a megállását közvetlenül megelőző nagyon rövid időtartamokkal, amikor a homokzuhatag még vagy már nem tölti ki a kifolyónyílás és az alsó becsapódási hely közötti teljes távolságot.)

b) Számítsuk ki, hogy mekkora a homokóra impulzusa (lendülete) t idővel a homokóra elindítása után!

c) Nagyon érzékeny mérleggel megmérjük a homokóra súlyát, miközben a homok a felső tartályból az alsóba pereg. Azt találjuk, hogy a mért súly egy kicsivel nagyobb, mint a már lepergett homokóra súlya. Az előző két részfeladatra adott választ felhasználva adjuk meg, hogy hány ezrelékkel nagyobb a működő homokóra súlya a már „lejárt" homokóráénál!

(*6 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Beküldési határidő: 2021. december 15.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 71. No. 8. November 2021)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 477): **K. 704.** There were 5 participants in a chess tournament. Each player played every other player once. 1 point was awarded for winning the game, 0.5 point for a draw and 0 for losing. At the end, it turned out that: – the player finishing in the first place had no draws; – the player in the second place lost no game; – each player had a different number of points. Find the score of each player. **K. 705.** Three different numbers are chosen from 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 and added. This is performed for every possible selection of three numbers. Some of the sums obtained will be even and some will be odd. Which kind of result will occur more frequently: even or odd? **K. 706.** Three numbers a, b, c are entered (left to right) in the first row of a three column table. The numbers in the second row are $a-b$, $b-c$, $c-a$. In the third row, the numbers are obtained by the same rule from the second row (the same operations carried out with the numbers of the first, second and third fields), and so on. Show that from the fourth row onwards 2021 cannot occur in the table. **K/C. 707.** A few children (at least two) are standing around a circle. They are playing an "elimination game" as follows: counting from the starting player, every second child is eliminated from the circle. The player remaining in the circle alone will win the game. For example, if there are six players A, B, C, D, E, F and A starts then the players eliminated (in this order) are B, D, F, C, A. Thus the winner is E. With how many players can the starting player win the game? **K/C. 708.** Jean the butler is instructed by his lord to place candles in the 10 three-prong candle holders in the living room. Jean either needs to put three candles of different colours in each holder, or put 30 candles of the same colour in all of them. Jean goes to the shop on the corner to buy the candles, and finds that the shop only has 70 candles altogether. Show that Jean can buy an appropriate selection of 30 candles.

New exercises for practice – competition C (see page 478): **Exercises up to grade 10: K/C. 707.** See the text at Exercises **K. K/C. 708.** See the text at Exercises **K. Exercises for everyone: C. 1689.** Solve the following simultaneous equations for integers a, b, c, d: $a+d=9$, $ad+b=8$, $bd+c=74$, $cd=18$. (Proposed by *E. Berkó,* Szolnok) **C. 1690.** The centre of a semicircle of unit radius and diameter AB is O. The semicircle of diameter OB, centred at K is drawn inside the larger semicircle. A ray drawn from point A touches the small semicircle at point C. The perpendicular dropped from point O to AC intersects the arc of diameter AB at a point D. Prove that the midpoint of line segment BD is C. **C. 1691.** What are the positive prime numbers p, q for which $p^5-q^3+(p+q)^4=9900$? **Exercises upwards of grade 11: C. 1692.** P is an interior point of side DA of a square $ABCD$. The angle bisector of $\angle PBC$ intersects side CD at point Q, and the foot of the perpendicular dropped from point Q to line BP is R. Find the angle of the lines AR and BQ. **C. 1693.** Four vertices of a cube are selected at random. Every selection of four vertices is equally probable. What is the probability that the four vertices form a tetrahedron? What is the probability that the four vertices form a regular tetrahedron? (Proposed by *N. Zagyva,* Baja)

New exercises – competition B (see page 479): **B. 5198.** I have a tortoise, a cat and a dog. If the cat is standing on the floor and I place the tortoise on the table, the head of the tortoise will be 70 cm above the head of the cat. If the dog is standing on the floor and I place the cat on the table, the head of the cat will be 80 cm above the head of the dog. Finally, if the tortoise is standing on the floor and I place the dog on the table, the head of the dog will be 120 cm above the head of the tortoise. How tall is the table? (*3 points*) (Based on the idea of *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5199.** A coin is placed on each field of a chessboard, heads facing up. In each move, we can (simultaneously) turn over three adjacent coins in any row or column. Is it possible to achieve an arrangement where all coins show tails on top? (*4 points*) (Proposed by *M. E. Gáspár,* Budapest) **B. 5200.** The diameter of a semicircular arc is $A_0A_1=1$. A point A_2 is selected on the arc, such that $\angle A_0A_1A_2=1°$. Then a point A_3 is selected on the arc A_1A_2, such that $\angle A_1A_2A_3=2°$. The procedure is continued: point A_{k+1} is selected on the arc $A_{k-1}A_k$, so that the measure of angle $A_{k-1}A_kA_{k+1}$ is k degrees $(k=3,4,\ldots,9)$. What will be the length of the line segment A_9A_{10}? (The *figure* is not to scale.) (*3 points*) **B. 5201.** Let $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$ be the divisors of a positive integer n. Determine those composite numbers n for which the numbers d_1, d_1+d_2, $d_1+d_2+d_3$, $\ldots$, $d_1+d_2+\cdots+d_{k-1}$ all divide n. (*4 points*) (Proposed by *Cs. Sándor,* Budapest) **B. 5202.** Two rational numbers are said to be *acquainted to each other* if they can be represented in the forms p/q and r/s, respectively (p, q, r, s are integers), such that $|ps-qr|=1$. If two rational numbers are acquainted to each other, how many common acquaintances may they have? (*5 points*) (Proposed by *Sz. Kocsis,* Budapest) **B. 5203.** In a triangle ABC, $AB>BC$, the inscribed circle touches sides BC, CA and AB at the points A_0, B_0 és C_0, respectively, and the escribed circle drawn to side AC touches AC at point B_1. Show that the intersection of the line segments A_0B_1 and B_0C_0 lies on the interior angle bisector drawn from vertex B if and only if the angle at vertex C measures $90°$. (*5 points*) (Proposed by *G. Holló,* Budapest) **B. 5204.** Let $1\leqslant a,b,c,d\leqslant 4$ denote real numbers. Prove that $16\leqslant (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\leqslant 25$. (*6 points*) (Proposed by *J. Szoldatics,* Budapest) **B. 5205.** There are four circles given in the plane: circle k_2 lies in the interior of circle k_1, circle k_3 lies in the interior of k_2, and circle k_4 lies in the interior of k_3. Also given are three lines e_1, e_2 and e_3 which are pairwise non-parallel and each line intersects each circle. For all $i=1,2,3$ let the intersections of line e_i with the circles be A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, G_i and H_i, in this order. Prove that if $A_1B_1+E_1F_1=C_1D_1+G_1H_1$ and $A_2B_2+E_2F_2=C_2D_2+G_2H_2$ then $A_3B_3+E_3F_3=C_3D_3+G_3H_3$. (*6 points*)

New problems – competition A (see page 481): **A. 809.** Let the lengths of the sides of triangle ABC be denoted by a, b and c using the standard notations. Let S denote the centroid of triangle ABC. Prove that for an arbitrary point P in the plane of the triangle the following inequality is true: $a\cdot PA^3+b\cdot PB^3+c\cdot PC^3\geqslant 3abc\cdot PS$. (Proposed by *János Schultz,* Szeged) **A. 810.** For all positive integers n let r_n be defined as $r_n=\sum\limits_{t=0}^{n}(-1)^t\binom{n}{t}\frac{1}{(t+1)!}$. Prove that $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r_n=0$. **A. 811.** Let A be a given set with n elements. Let $k<n$ be a given positive integer. Find the maximum value of m for which it is possible to choose sets B_i and C_i for $i=1,2,\dots,m$ satisfying the following conditions: (i) $B_i\subset A$, $|B_i|=k$, (ii) $C_i\subset B_i$ (there is no additional condition for the number of elements in C_i), (iii) $B_i\cap C_j\neq B_j\cap C_i$ for all $i\neq j$.

Problems in Physics

(see page 506)

M. 408. Let us make jam jar lids of different sizes collide with each other, such that one of them is at rest and the collision is a head on one. Determine the coefficient of restitution, which characterises the elasticity of the collision.

G. 757. Suppose you have a pair of reversible gloves, both pieces black on the outside and white on the inside. Can you wear them as mismatched gloves? **G. 758.** An object is behind a car not very far from it, and its images can be seen in both side-view mirrors as well as in the rear-view mirror of the car. All the three mirrors are plane mirrors. In which mirror does the driver observe the greatest and the smallest image? In other words compare visual angles of the images. **G. 759.** Four balls of mass m, then another four balls of M and then one more ball of mass m are strung on a horizontal, frictionless, fixed rod, as shown in the *figure.* The balls are close to each other, they are made of some perfectly elastic material and $m<M$. From the left another ball of mass m is coming at a speed of v and collides with the first one of the ball string. After the following collisions which balls remain at rest and what will the direction of the motion of the other balls be? **G. 760.** A 10 cm high aluminium cone is raised slowly out of an aquarium, by means of a thread attached to the apex of the cone. The shape of the aquarium is a rectangular box, and the diameter of the cone is also 10 cm. Initially the base of the cone lies on the bottom of the aquarium, and the cone is totally submerged into the water. The volume of the aquarium is much greater than that of the cone. Plot the graph of the tension in the thread as a function of the displacement of the cone.

P. 5355. Newspaper news (February 24, 2021): *China's Mars probe, Tianwen-1, has been already orbiting Mars and has collected data from the red planet. The furthest point of its parking orbit measured from the surface of Mars is 59 thousand kilometres, while the nearest is 280 kilometres away. The probe makes one revolution around the planet in two Mars days.* By calculation check the accuracy of the value given for the period if the other data are accepted as correct. **P. 5356.** A beam of rectangular cross section lies on the horizontal ground. The horizontal side of the rectangle is L, whilst its vertical side is H. Neglecting air resistance, from which point and how should a grasshopper jump in order to jump over this beam with the least energy? In this case where is the focus of the parabolic path of the leap? **P. 5357.** A uniform-density rod is lying on a horizontal tabletop. The rod is slowly raised into the vertical position by a force which is exerted at one end of the rod always perpendicularly to the rod. What is the least value of the coefficient of static friction between the rod and the tabletop if the rod does not slip during the process? **P. 5358.** There are two beads on an insulated thin vertical thread, one of them is fixed and the other is held at a height of $h = 0.5$ m above it. The mass of the upper bead is $m = 0.5$ grams and the charge of both beads is $Q = 2.58 \cdot 10^{-7}$ C. At a certain moment the upper bead is released without initial speed. *a*) How much distance does the bead cover until it reaches its greatest speed? *b*) What is this speed? *c*) What will the least distance between the beads be? *d*) What is the acceleration of the bead at the bottommost point of its path? **P. 5359.** The edges of a cube are built from resistors which has two different resistance values. The resistance of the resistors on 8 edges which are the edges of two opposite faces of the cube is r, and the resistance of the other 8 resistors on the 4 edges perpendicular to the previously described edges is R. Determine the equivalent resistance of the circuit between two adjacent vertices of the cube between which the resistance is R. **P. 5360.** A simple Keplerian telescope is built for demonstration purposes. We have two converging lenses, one having a diameter of D and focal length f_1, the other having a diameter of d and focal length f_2 ($f_1 \gg f_2$, $D > d$), and we also have a shutter (a device that allows light to pass for a determined period) which can be fixed in the tube of the telescope at the common focal plane of the lenses. With the shutter we would like to control the direction of light rays forming the image. *a*) What is the viewing angle of the telescope without the shutter? (That is: what is the maximum of the angular distance between two stars which can be seen in the telescope at the same time?) *b*) At most what can the diameter of the shutter, which restricts the field of view of the telescope, be in order that the image should not get distorted (that is: the light rays determined by the directions of the rim of the image and pass the objective lens, also pass the eyepiece)? *c*) Thus what can the field of view of the telescope be? *Hint:* investigate how the parallel rays coming from different directions travel through the telescope. **P. 5361.** The following two photos were taken of the same car, at the same time. In the first photo the car was photographed through a curtain and in the second without the curtain. The car was at a distance of 20 metres from the curtain. How densely woven could the curtain be? **P. 5362.** In a synchrocyclotron, the velocity dependence of the mass of elementary particles is compensated by decreasing the frequency of the electric field, which accelerates the particles. For example, if protons are accelerated, frequency of the applied voltage between the dees (D-shaped, metal, hollow half-discs) are varied from 25 MHz to 18.9 MHz in each cycle. Determine in this case *a*) the magnitude of the magnetic induction; *b*) the kinetic energy of the exiting protons. **P. 5363.** An hourglass was made from a thin, tall glass tube. The mass m_0 of the sand in it is equal to the total mass of the glass tube and the supporting stands. Initially, the sand is at the bottom filling it up to a height of $h = 5$ cm. After turning the hourglass upside down the sand flows down at a steady rate in $t_0 = 1$ minute. (Approximate the shape of the sand in the upper and lower bulbs with cylinders.) *a*) Determine where the centre of gravity of the hourglass is time t after the clock was started. (Don't deal with the very short periods following the start of the hourglass or immediately before its stop, when the flow of sand does not or no longer fill the entire distance between the outlet and the lower impact point.) *b*) Calculate the linear momentum of the hourglass time t after starting the hourglass. *c*) We measured the weight of the hourglass with a very sensitive scale while the sand is flowing from the top cylinder to the bottom. We found that the weight measured is slightly greater than the weight of the hourglass that has already been stopped. Using your answers given to the previous two subtasks, determine how many thousandths of the weight of a working hourglass is greater than that of the already "expired" hourglass!