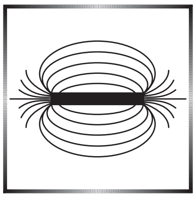
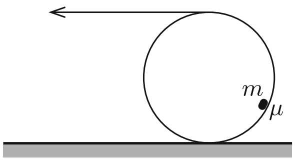
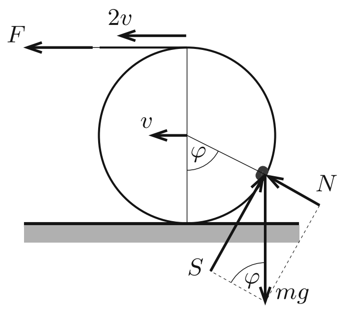
Fizika feladatok megoldása





P. 5252. *M tömegű, vékony falú csőre fonalat csévélünk, és a fonalat húzva az* ábrán *látható módon a csövet állandó sebességgel gurítjuk. A cső tisztán gördül a vízszintes talajon. A cső belsejébe kis méretű, m tömegű testet helyeztünk, ami odabent állandósult szöghelyzetben csúszik, a súrlódási együttható itt μ. Mekkora vízszintes fonálerő szükséges az állandó sebesség fenntartásához?*

(*5 pont*) Közli: *Vladár Károly,* Kiskunhalas



Megoldás. Legyen az állandósult szöghelyzetben a kis testtől a cső tengelyére bocsátott merőleges egyenes és a cső tengelyével párhuzamos függőleges sík által bezárt szög φ. Jelöljük az *ábrán* látható módon a cső által a kis testre kifejtett, sugárirányú nyomóerő nagyságát N-nel, az érintőirányú súrlódási erőt pedig S-sel.

A kis test sem a sugár, sem az érintő irányában nem gyorsul, emiatt

$$N - mg\cos\varphi = 0,$$

illetve

$$S - mg\sin\varphi = 0, \quad \text{vagyis} \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{S}{N} = \mu.$$

Legyen a cső tengelyének állandó sebessége v. Ehhez a fonalat valamekkora F erővel és $2v$ nagyságú sebességgel kell húznunk. Mivel a cső csúszásmentesen gördül, a cső minden pontja a tengelyéhez képest v sebességgel mozog, azaz a kis test és a cső falának relatív sebessége az érintkezési pontban v.

A súrlódás folytán időegységenként disszipált energia Sv, ezt a húzóerő teljesítménye fedezi:

$$Sv = F\cdot 2v,$$

azaz

$$F = \frac{1}{2}S = \frac{mg}{2}\sin\varphi = \frac{mg}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{mg}{2}\,\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)

39 dolgozat érkezett. Helyes 18 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 16, hibás 1, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5262. *Forma 1-es pilóták olyan versenyen vesznek részt, ahol nem a legnagyobb sebességgel lehet eredményesen szerepelni. Egy kijelölt, $d = 1250$ m hosszúságú távolságot állandó sebességgel kell megtenni, majd mindenkinek $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$ lassulással kell megállni. Az győz, aki az indulástól számítva a legrövidebb idő alatt áll meg.*

a) Mekkora sebességgel kell haladnia az állandó sebességű szakaszon a győztes pilótának, ha a lehető legrövidebb idő alatt akar megállni?

b) Mekkora utat tesz meg ekkor az indulástól a megállásig?

(*4 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

I. megoldás. *a*) A $d = 1250$ m hosszúságú szakaszt állandó v sebességgel haladva $t_1 = d/v$ idő alatt teszi meg az autó, majd állandó $a = 2\ \mathrm{m/s^2}$ lassulással $t_2 = v/a$ idő alatt tud lefékezni. A teljes menetidő

$$t = \frac{d}{v} + \frac{v}{a}.$$

Ennek a $t(v)$ kifejezésnek keressük a minimumát.

Az A számtani és a G mértani közepekre vonatkozó nevezetes $G \leqslant A$ egyenlőtlenség szerint

$$\frac{t}{2} = \frac{\frac{d}{v} + \frac{v}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{d}{v} \cdot \frac{v}{a}} = \sqrt{\frac{d}{a}} = 25\ \mathrm{s},$$

vagyis a győztes idő legalább 50 s. Ez a határeset akkor valósulhat meg, ha a középértékekben egyenlő nagyságú mennyiségek fordulnak elő, vagyis

$$\frac{d}{v} = \frac{v}{a}, \qquad \text{azaz} \qquad v = \sqrt{da} = 50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 180\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

Ekkora sebesség mellett $t_1 = t_2 = \sqrt{d/a} = 25$ s.

b) A verseny nyertesének teljes úthossza:

$$s = d + \frac{a}{2}t_2^2 = d + \frac{a}{2} \cdot \frac{d}{a} = \frac{3}{2}\,d = 1875\ \mathrm{m}.$$

Schmercz Blanka (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

II. megoldás. Az egyenletes mozgás v sebessége és a teljes menetidő (t) kapcsolata:

$$\frac{d}{v} + \frac{v}{a} = t, \quad \text{vagyis} \quad v^2 - v(at) + ad = 0.$$

Ez az egyenlet (adott d, a és t mellett) v-re nézve másodfokú, aminek akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$(at)^2 - 4ad \geqslant 0, \qquad \text{azaz} \qquad t \geqslant 2\sqrt{\frac{d}{a}} = 50\ \mathrm{s}.$$

a) A minimális időt visszahelyettesítve a másodfokú egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$v^2 - 2v\sqrt{ad} + ad \equiv \left(v - \sqrt{ad}\right)^2 = 0,$$

tehát a győztes sebessége

$$v = \sqrt{ad} = 50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

b) Az egyenletes mozgás ideje

$$t_1 = \frac{1250\ \mathrm{m}}{50\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 25\ \mathrm{s},$$

tehát a fékezés ideje $t_2 = 25$ s. A fékezés során megtett út

$$d_2 = \frac{v^2}{2a} = 625\ \mathrm{m},$$

a teljes út pedig $d + d_2 = 1875$ m.

Megjegyzés. A feladat szövege nem adott információt az „indulás" körülményeiről. A megoldás során feltételeztük, hogy a d hosszúságú szakasz elejére már v sebességre felgyorsulva érkeznek a versenyzők, és „indulásnak" az időmérés kezdetét tekintjük.

Fekete András Albert (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

102 dolgozat érkezett. Helyes 69 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 10, nem versenyszerű 10 dolgozat.

P. 5267. *Pista vizsgálgatja szemüvegét. A szemüveg a Nap fényét a lencsétől* 50 cm*-re fókuszálja. Észreveszi, hogy a Nap fényét visszaverve két fényesebb pont (fókuszpont) is található, az egyik* 17*, a másik* 7 cm*-rel a lencse előtt. Mekkora a lencse anyagának törésmutatója?*

(*5 pont*) *Tichy Géza* (1945–2021) feladata

Megoldás. Vizsgáljuk azt az esetet, mikor a Nap fénye visszaverődik. Ekkor két fókuszpont látható. Az egyik a lencse Nap felőli oldaláról közvetlenül visszaverődő fénysugarak találkozási pontja. Mivel ezek a sugarak ténylegesen fókuszálódnak, nyilván egy *homorú* felületről verődnek vissza. Tehát a lencsét határoló egyik gömbfelület kívülről nézve homorú, a sugara legyen R_1.

A lencse a rajta teljesen áthaladó napsugarakat is fókuszálja, vagyis gyűjtőlencse. Ez akkor teljesül, ha a lencsét határoló másik gömbfelület kívülről nézve domború, és a görbületi sugara $R_2 < R_1$.

A Nap felőli oldal másik fókuszpontjában azok a fénysugarak találkoznak, amelyek a homorú gömbfelületen belépnek a lencsébe, a lencsét határoló másik gömbfelületről visszaverődnek, majd ismét áthaladnak a lencsén és végül kilépnek abból. A nagyobb görbületi sugarú, homorú gömbfelületnek (mint homorú tükörnek) a fókusztávolsága $f_1 = R_1/2$, és ez a megadott 7 és 17 cm valamelyike. Könnyen belátható, hogy a két érték közül a nagyobb tartozik ehhez a tükörhöz, hiszen a „hátsó" tükör fókusztávolsága ($R_2 < R_1$ miatt) már önmagában kisebb, mint az „első” tüköré, és ezt a távolságot a gyűjtőlencsén való kétszeri áthaladás még jobban csökkenti.

Ezek szerint $R_1 = 0{,}34$ m, és a másik fókusztávolság $f_2 = 0{,}07$ m, ami

$$D_{\text{eredő}} = \frac{1}{f_2} = 14{,}3\ \frac{1}{\text{m}}$$

dioptriának felel meg. Tudjuk még, hogy a lencse fókusztávolsága $f_{\text{lencse}} = 0{,}5$ m, vagyis a lencse dioptriája:

$$D_{\text{lencse}} = \frac{1}{f_{\text{lencse}}} = 2\ \frac{1}{\text{m}}.$$

A leképző eszköz egy három részből (két lencséből és egy tükörből) álló rendszerként képzelhető el. Az egymás mögé helyezett vékony lencsék dioptriája és a homorú tükör dioptriája összeadódik:

$$D_{\text{eredő}} = D_{\text{lencse}} + \frac{2}{R_2} + D_{\text{lencse}}.$$

Innen a domború felület görbületi sugara kiszámítható:

$$R_2 = \frac{2}{D_{\text{eredő}} - 2D_{\text{lencse}}} = 0{,}194\ \text{m}.$$

A homorú-domború lencse

$$D_{\text{lencse}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

dioptriájú, ahonnan a lencse anyagának keresett törésmutatója:

$$n = \frac{D_{\text{lencse}}}{\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}} + 1 = 1{,}91.$$

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes Bonifert Balázs és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (2–3 pont) 14 dolgozat.

P. 5270. *A radon* 222*-es izotópjának felezési ideje* 5508 perc. *Hány nap elteltével csökken egytizedére a radon aktivitása?*

(*4 pont*) *Tankönyvi feladat nyomán*

Megoldás. A sugárzó anyag aktivitás arányos az el nem bomlott atommagok számával:

$$A(t) = \frac{\ln 2}{T} N(t),$$

ahol $T=5508$ perc a felezési idő, t az eltelt idő és $N(t)=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}$ (N_0 a kezdeti atommagszám).

Keressük azt az eltelt t időt, amelyre

$$A(t)=\frac{1}{10}A_0,\qquad \text{vagyis}\qquad \frac{\ln 2}{T}N(t)=\frac{\ln 2}{T}\frac{N_0}{10},$$

tehát

$$N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/T}=\frac{N_0}{10},\qquad \text{azaz}\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{t/(5508\ \text{perc})}=\frac{1}{10}.$$

Eszerint

$$\frac{t}{5508\ \text{perc}}=\frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}5}=3{,}322,$$

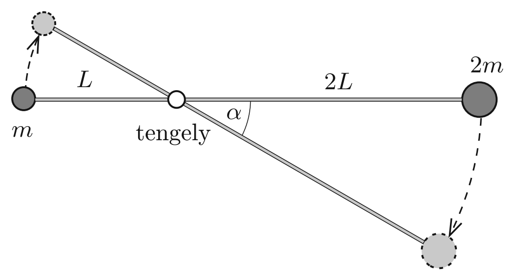
vagyis a keresett idő:

$$t=18\,297\ \text{perc}\approx 12{,}7\ \text{nap}.$$

Barta Gergely (Szeged, Radnóti M. Kís. Gimn., 12. évf.)

91 dolgozat érkezett. Helyes 67 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 13, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 3 dolgozat.

P. 5274. *Az* ábrán *látható, $3L$ hosszúságú, elhanyagolható tömegű, merev rúd a bal oldali végétől L távolságra lévő, rögzített vízszintes tengely körül súrlódásmentesen foroghat a függőleges síkban. A rúd végeihez m, illetve $2m$ tömegű, kis méretű testeket erősítünk, és a rudat vízszintes helyzetben tartjuk. Egy adott pillanatban a rudat elengedjük.*

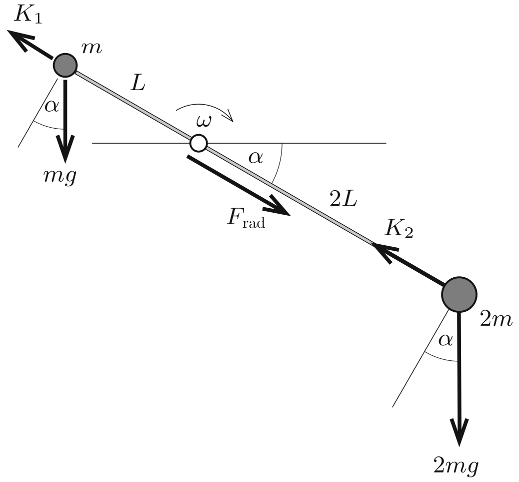


a) Mekkora a rúd által a tengelyre kifejtett erő rúdirányú összetevője abban a pillanatban, amikor a rúd α szöget zár be a vízszintes iránnyal?

b) Határozzuk meg az α szöget abban a pillanatban, amikor a rúd által a tengelyre kifejtett teljes erő $4mg$ nagyságú!

(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

Megoldás. *a*) A feladat megoldása során kihasználjuk, hogy a rúd tömege elhanyagolhatóan kicsi, ezért a rúdra ható erők és forgatónyomatékok eredője is zérus. Legyen a rúd által a testekre kifejtett erő rúdirányú összetevője K_1 és K_2 (*1. ábra*). (A rúdra merőleges irányban ható erőket az ábrán nem tüntettük fel.)



1. ábra

A rendszer tehetetlenségi nyomatéka:

$$\Theta = mL^2 + (2m)(2L)^2 = 9mL^2.$$

Az energiamegmaradás törvényét felhasználva kiszámíthatjuk a rúd α szögű elfordulásához tartozó ω szögsebességet:

$$\frac{1}{2}\Theta\omega^2 + mgL\sin\alpha - 2mg(2L)\sin\alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2}(9mL^2)\omega^2 = 3mgL\sin\alpha,$$

ahonnan

$$\omega^2 = \frac{2g}{3L}\sin\alpha.$$

A dinamika alapegyenlete szerint a rúdirányú mozgásegyenletek:

$$2m(2L)\,\omega^2 = K_2 - 2mg\sin\alpha,$$

vagyis

$$K_2 = \frac{14}{3}mg\sin\alpha,$$

illetve

$$mL\omega^2 = mg\sin\alpha - K_1,$$

tehát

$$K_1 = \frac{1}{3}mg\sin\alpha.$$

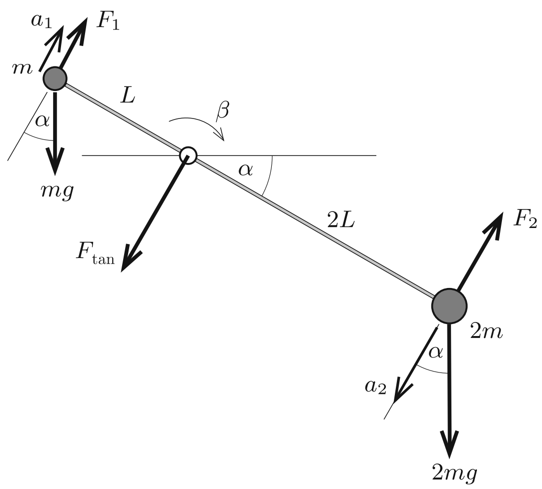
A rúd által a tengelyre kifejtett eredő erő rúdirányú (radiális) komponensének nagysága az elhanyagolható tömegű rúd mozgásegyenletéből adódik:

$$K_1 + K_2 - F_{\text{rad}} = 0,$$

vagyis

$$F_{\text{rad}} = K_1 + K_2 = 5mg\sin\alpha.$$

b) A rúd a rúdra merőleges irányban is fejt ki erőt a testekre, hiszen azok a körpályájuk érintőjének irányában (tangenciálisan) is gyorsulnak. Jelöljük az érintő irányú erőket F_1-gyel és F_2-vel, a megfelelő gyorsulásokat pedig a_1-gyel és a_2-vel (*2. ábra*).



2. ábra

A rúdra ható eredő forgatónyomaték (a rúd elhanyagolhatóan kicsi tehetetlenségi nyomatéka miatt) *nulla:*

$$F_1 L = F_2(2L).$$

Határozzuk meg a rendszer β szöggyorsulását!

$$\Theta\beta = 2mg(2L)\cos\alpha - mgL\cos\alpha,$$

$$9mL^2\beta = 3mgL\cos\alpha,$$

ahonnan

$$\beta = \frac{g}{3L}\cos\alpha.$$

A testek tangenciális gyorsulása

$$a_1 = L\beta = \frac{1}{3}g\cos\alpha,$$

illetve

$$a_2 = 2L\beta = \frac{2}{3}g\cos\alpha.$$

A dinamika alapegyenletét a rúdra merőleges irányra felírva:

$$\frac{1}{3}mg\cos\alpha = F_1 - mg\cos\alpha, \qquad \text{vagyis} \qquad F_1 = \frac{4}{3}mg\cos\alpha,$$

$$(2m)\frac{2}{3}g\cos\alpha = 2mg\cos\alpha - F_2, \qquad \text{azaz} \qquad F_2 = \frac{2}{3}mg\cos\alpha.$$

A rúd által a tengelyre kifejtett eredő erő tangenciális komponensének nagysága

$$F_{\text{tan}} = F_1 + F_2 = 2mg\cos\alpha.$$

A megadott feltétel szerint

$$\sqrt{F_{\text{rad}}^2 + F_{\text{tan}}^2} = 4mg,$$

$$16\,m^2g^2 = 25\,m^2g^2\sin^2\alpha + 4\,m^2g^2\cos^2\alpha,$$

$$16 = 25\sin^2\alpha + 4\left(1 - \sin^2\alpha\right),$$

azaz

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{4}{7}} = 49{,}1^\circ.$$

Somlán Gellért (Pécsi Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

46 dolgozat érkezett. Helyes 8 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 30, hibás 4, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5282. *Légpárnás asztalon mágneskorong mozog egy fémlap felett. Az örvényáramok hatására a sebességgel arányos fékezőerő hat a korongra. Egy alumíniumlap felett haladva a korong* 30 cm *út megtétele után áll meg, egy rézlap felett ugyanez a távolság csak* 20 cm. *Mekkora út megtétele után áll meg a mágneskorong, ha először egy* 15 cm *széles rézlap felett halad el, majd egy alumíniumlap felett folytatja mozgását? (A korong kezdősebessége mindhárom esetben ugyanakkora.)*

(*6 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

Megoldás. Legyen a korongra ható erő nagysága F, a sebesség és az erő közötti arányossági tényező C, vagyis

$$F = C \cdot v.$$

Az erőlökés definíciója szerint a lendületváltozást okozó erő nagysága

$$F = \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad \text{ebből} \quad Cv\Delta t = m\Delta v.$$

Összegezzük a kicsiny Δt időtartamokhoz tartozó sebességváltozásokat:

$$C\sum v\Delta t = m\sum \Delta v.$$

A bal oldalon szereplő összeg a megtett úttal, a jobb oldali összeg pedig ezen út során bekövetkező teljes sebességváltozással egyenlő:

$$C \cdot s = m(v_0 - v_{\text{végső}}).$$

Az aluminiumlapnál valamekkora $C_{\text{alu.}}$, a rézlapnál pedig egy $C_{\text{réz}}$ arányossági tényezővel határozza meg a fékezőerő és a sebesség kapcsolatát. A megállásig befutott utak ismeretében:

(1) $$C_{\text{alu.}}(0{,}3\ \text{m}) = mv_0,$$

illetve

(2) $$C_{\text{réz}}(0{,}2\ \text{m}) = mv_0.$$

A harmadik esetben bontsuk két részre a mozgást. A rézlap felett mozgó mágneskorong sebessége v_0-ról valamekkora $v_{\text{köztes}}$-re csökken, majd az alumíniumlap felett mozogva x út megtétele után megáll. Felírhatjuk, hogy

$$C_{\text{réz}}(0{,}15\ \text{m}) = m(v_0 - v_{\text{köztes}}),$$

valamint

$$C_{\text{alu.}}x = mv_{\text{köztes}}.$$

A fenti két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

(3) $$C_{\text{alu.}}x + C_{\text{réz}}(0{,}15\ \text{m}) = mv_0.$$

Fejezzük ki az (1) és (2) egyenletből az ismeretlen fékezési tényezőket, majd helyettesítsük be azokat (3)-ba:

$$\frac{mv_0}{0{,}3\ \text{m}}\,x + \frac{mv_0}{0{,}2\ \text{m}}\,0{,}15\ \text{m} = mv_0,$$

tehát

$$\frac{x}{0{,}3\ \text{m}} = 1 - \frac{0{,}15\ \text{m}}{0{,}2\ \text{m}},$$

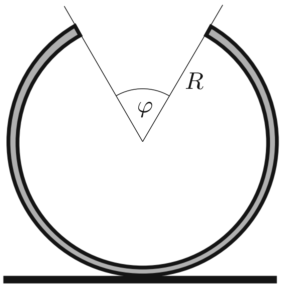
ahonnan

$$x = 0{,}3\ \text{m} - 0{,}3\ \text{m} \cdot \frac{0{,}15}{0{,}2} = 0{,}075\ \text{m} = 7{,}5\ \text{cm}.$$

Tehát a harmadik mozgás során a mágneskorong 15 cm-t halad rézlapon, és 7,5 cm-t alumíniumlapon, így összesen 22,5 cm út megtétele után áll meg.

Fekete András Albert (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

31 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 4 dolgozat.



P. 5286. *Egy R sugarú, homogén tömegeloszlású, φ szöggel „hiányos” vékony hengerpalástot vízszintes asztalra fektetünk az* ábrán *látható módon. A hengerpalástot kissé kimozdítjuk egyensúlyi helyzetéből, majd elengedjük. Határozzuk meg a hengerpalást rezgőmozgásának periódusidejét! Feltételezhetjük, hogy súrlódás elegendően nagy, így a hengerpalást a rezgőmozgás közben nem csúszik meg.*

Adatok: $R=0{,}2$ m; $\varphi=\pi/3$.

(*5 pont*)

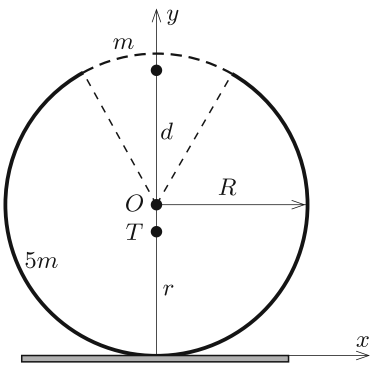
Közli: *Takács Árpád,* Budapesti Berzsenyi D. Gimn.

Megoldás. Legyen a hengerpalást hiányzó részének tömege m, ekkor a hiányos hengerpalást tényleges tömege $5m$. Első lépésben határozzuk meg az $5m$ tömegű test T tömegközéppontjának helyét, annak a talajtól mért r távolságát (*1. ábra*). A hiányzó rész tömegközéppontja (ha ott lenne anyag) a henger tengelyétől

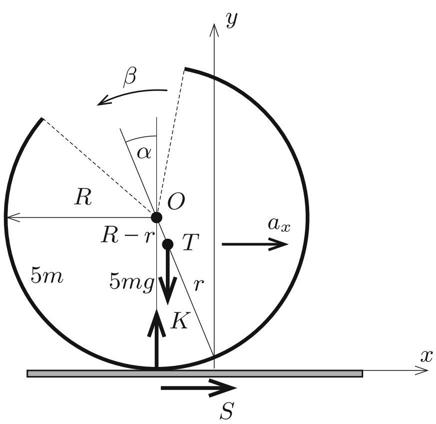
$$d=\frac{\sin\varphi/2}{\varphi/2}R=\frac{3R}{\pi}$$

távolságra van. Ha az m tömegű és az $5m$ tömegű részeket egy teljes hengerré illesztenénk össze, annak tömegközéppontja éppen a henger tengelyére, vagyis az O pontba kerülne:

$$\frac{5m\,r+m(R+d)}{6m}=R,\quad \text{ahonnan}\quad r=\frac{5R-d}{5}=\left(1-\frac{3}{5\pi}\right)R.$$



1. ábra



2. ábra

Határozzuk meg ezután a hiányos hengerpalásnak a T tömegközépponton átmenő tengelyre vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékát. Felhasználva a Steiner-tételt:

$$\Theta_O=\Theta_T+5m(R-r)^2=5mR^2,$$

ahonnan

$$\Theta_T = 5mR^2\left(1 - \frac{9}{25\pi^2}\right).$$

Vizsgáljuk meg a hiányos hengerpalást mozgásának dinamikai egyenleteit! Vegyük fel a test kicsiny α szögű elfordulásakor fellépő erőket, az elmozdulást és a gyorsulást, valamint a szöggyorsulást a *2. ábrán* látható módon. Mivel kis szögekre $\sin\alpha \approx \alpha$ és $\cos\alpha \approx 1$, a tömegközéppont vízszintes elmozdulása:

$$x = -R\alpha + (R-r)\sin\alpha \approx -r\alpha,$$

a függőleges elmozdulás pedig α^2-tel arányos nagyságú, tehát másodrendűen (elhanyagolhatóan) kicsi. Ennek megfelelően a tömegközéppont gyorsulásának komponensei:

$$a_x = -r\beta \qquad \text{és} \qquad a_y = 0,$$

ahol β a test szöggyorsulása.

A Newton-féle mozgásegyenletek:

$$5ma_x = S, \qquad \text{vagyis} \qquad S = -5mr\beta,$$

illetve

$$0 = K - 5mg,$$

a tömegközéppont körüli forgás dinamikai egyenlete pedig

$$\Theta_T\beta = S\big[R - (R-r)\cos\alpha\big] - K(R-r)\sin\alpha.$$

Ismét alkalmazva a kis szögek szögfüggvényeire érvényes közelítő képleteket, valamint S és K fentebb kiszámított kifejezéseit behelyettesítve kapjuk, hogy

$$(\Theta_T + 5mr^2)\beta = -5mg(R-r)\alpha.$$

Ebből látható, hogy

$$\beta = -\frac{5mg(R-r)}{\Theta_T + 5mr^2}\,\alpha \equiv -\omega^2\alpha,$$

vagyis az α szög időbeli változása egy ω körfrekvenciájú harmonikus rezgőmozgás. A mozgás periódusideje (Θ_T és r korábban kiszámított értékének behelyettesítése után):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(10\pi-6)R}{3g}} \approx 2{,}6\ \text{s}.$$

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 11. évf.)

19 dolgozat érkezett. Helyes Somlán Gellért, Toronyi András és Téglás Panna megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1–3 pont) 14 dolgozat.

P. 5289. *Egy transzmissziós, nagy felbontású optikai rácsra, melynek rései függőlegesen állnak, párhuzamos, monokromatikus fénynyalábot bocsátunk. Kísérletünkben a fénynyaláb merőleges az optikai rácsra, és a rácson való áthaladás után első rendben* 30°*-kal térül el jobbra is és balra is. Ezután a rácsot a középső rés mint tengely körül* 30°*-kal elforgatjuk. Milyen irányokban lép ki most fénynyaláb a rácsból?*

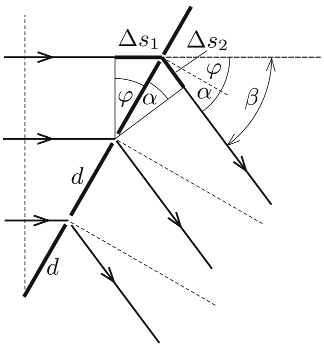
(*5 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Ha a fénynyaláb merőleges az optikai rácsra és a nyaláb első rendben 30°-os szögben térül el, akkor a rácson két szomszédos résen elhajló fénysugár útkülönbsége:

$$\Delta s = d\sin 30^\circ,$$

ahol d a rácsállandó. Legyen a használt fény hullámhossza λ. A nyaláb első rendben térül el 30°-kal, vagyis ekkor két szomszédos résen elhajló fénysugár útkülönbsége éppen λ. Innen kifejezhetjük a rácsállandót:

$$\lambda = d\sin 30^\circ \qquad \Rightarrow \qquad d = \frac{\lambda}{\sin 30^\circ} = 2\lambda.$$



A kísérletben a rácsot $\varphi = 30^\circ$-kal elforgatjuk. Ekkor a fénysugarak már eleve valamekkora útkülönbséggel érkeznek a rácshoz. Két szomszédos résen elhajló fénysugár kezdeti útkülönbsége legyen Δs_1. Tegyük fel, hogy a rácsot az óramutató járásával egyező irányba forgattuk el, ekkor az *ábrán* látható elrendezést kapjuk.

Az ábra alapján a kezdeti útkülönbség:

$$\Delta s_1 = d\sin\varphi = 2\lambda\sin 30^\circ = \lambda.$$

A fénysugarak a réseken elhajlanak, ezzel megváltozik az útkülönbségük. A rácsra merőleges egyeneshez képest α szögben elhajló szomszédos fénysugarak rács által létrehozott útkülönbsége legyen Δs_2. Legyen $\alpha > 0$, ha a fénysugarak a rácson jobbra hajlanak el (az ábra alja felé), és legyen $\alpha < 0$, ha a fénysugarak a rácson balra hajlanak el (az ábra teteje felé). A kezdeti irányhoz képest a fénysugarak elhajlása $\beta = \varphi + \alpha$ nagyságú. (β-ra is ugyanazt az előjelkonvenciót alkalmazzuk, amit α-ra.) Ahhoz, hogy a fénysugarak erősítsék egymást, az összes útkülönbségüknek a hullámhossz egész számú többszörösével kell megegyeznie:

$$\Delta s_1 + \Delta s_2 = n\lambda \qquad \Rightarrow \qquad \Delta s_2 = n\lambda - \Delta s_1 = (n-1)\lambda.$$

A rés által létrehozott útkülönbség így írható fel:

$$\Delta s_2 = d\sin\alpha = (n-1)\lambda.$$

Innen kapjuk, hogy

$$\sin\alpha = (n-1)\frac{\lambda}{d} = (n-1)\frac{\lambda}{2\lambda}, \quad \text{vagyis} \quad \sin\alpha = \frac{n-1}{2}.$$

Mivel $0<\alpha<90°$, ezért a fenti kifejezésnek csak akkor van megoldása α-ra, ha n a 0, 1 és 2 értékek valamelyikét veszi fel. Ekkor a megoldások:

$$\alpha=-30°,\ 0°,\ 30°;$$

vagyis az eltérülés a kezdeti irányhoz képest:

$$\beta=\alpha+\varphi=0°,\ 30°,\ 60°.$$

Az elhajlási rendeket úgy számozzuk, hogy az útkülönbség $n\lambda$-val legyen egyenlő. Ennek megfelelően a fénynyaláb nulladrendben $\beta=0°$-kal, első rendben jobbra 30°-kal, másodrendben pedig jobbra 60°-kal térül el, ha a rácsot az óramutató járásával megegyező irányban forgattuk el.

Toronyi András (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 11. évf.)

18 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 2, hiányos (1 pont) 2, hibás 1, nem versenyszerű 2 dolgozat.

P. 5291. *Egy szénmonoxid-érzékelő berendezés akkor ad riasztó jelzést, ha a* CO-*gáz sűrűsége a levegőben eléri a* $4\cdot10^{-6}$ kg/m^3 *értéket.*

a) Hány CO-*molekulát lélegzik be ilyenkor az ember egyetlen* 500 cm^3-*es lélegzetvétellel?*

b) Mekkora egy CO-*molekula átlagos energiája a tüdőben* 37 °C-*on?*

c) Mekkora a sebessége egy átlagos energiával rendelkező CO-*molekulának?*

(*4 pont*) *Egyetemi felvételi feladat nyomán*

Megoldás. *a*) 500 cm^3 levegőben lévő CO-molekulák össztömege:

$$m=\left(4\cdot10^{-6}\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\cdot(5\cdot10^{-4}\ \text{m}^3)=2\cdot10^{-9}\ \text{kg}.$$

Egyetlen CO-molekula tömege:

$$m_0=\frac{0{,}028\ \text{kg/mol}}{6{,}022\cdot10^{23}\ (1/\text{mol})}=4{,}65\ \cdot10^{-26}\ \text{kg}.$$

Ezek szerint 500 cm^3 levegőben lévő CO-molekulák száma:

$$N=\frac{m}{m_0}=\frac{2\cdot10^{-9}\ \text{kg}}{4{,}65\ \cdot10^{-26}\ \text{kg}}=4{,}3\cdot10^{16}.$$

b) Egyetlen ($f=5$ szabadsági fokú) CO-molekula átlagos energiája:

$$E=\frac{f}{2}kT=\frac{5}{2}\cdot\left(1{,}38\cdot10^{-23}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}\right)\cdot310\ \text{K}=1{,}07\cdot10^{-20}\ \text{J}.$$

c) A mozgási energia 3 szabadsági fokára átlagosan

$$E_\text{m}=\frac{3}{5}\,E=6{,}42\cdot10^{-20}\ \text{J}$$

energia jut. Eszerint a molekulák átlagos sebessége (pontosabban fogalmazva a sebességnégyzet átlagának négyzetgyöke):

$$v=\sqrt{\frac{2E_\mathrm{m}}{m_0}}=\sqrt{\frac{2\cdot 6{,}42\cdot 10^{-21}\ \mathrm{J}}{4{,}65\ \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}}}\approx 525\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Dóra Márton (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 11. évf.)

84 dolgozat érkezett. Helyes 34 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 26, hiányos (1–2 pont) 17, hibás 6, nem versenyszerű 1 dolgozat.

P. 5301. *Pontszerű Q töltés elektromos erőterében, tőle R távolságban szabadon forgó, p momentumú, pontszerű elektromos dipólus van. Mekkora munkát kell végeznünk, ha a dipólust a rögzített töltéstől nagyon messzire (a „végtelenbe") távolítjuk?*

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest

I. megoldás. A dipólus szabadon foroghat, ezért a mozgás során a dipólus Q-val ellentétes előjelű töltése a lehető legközelebb lesz Q-hoz, a vele azonos előjelű pedig a lehető legtávolabb. Ez akkor teljesül, ha a három töltés (Q, $-q$, q sorrendben) egy egyenesen fekszik.

Mekkora a potenciális energiája a rendszernek, ha a dipólus R távolságra van Q-tól? Legyen q a dipólus azon töltésének nagysága, amely azonos előjelű Q-val, valamint legyen a dipólus két töltésének távolsága ℓ. A dipólus erőssége (momentuma) $p=q\ell$. A dipólust akkor nevezzük pontszerűnek, ha az ℓ távolság 0-hoz, q pedig előjelétől függően $\pm\infty$-hez tart. Véges töltéstávolság esetén

$$E_\mathrm{pot}=k\frac{(-q)Q}{R-\ell/2}+k\frac{qQ}{R+\ell/2}=kqQ\left(\frac{1}{R+\ell/2}-\frac{1}{R-\ell/2}\right)=$$

$$=-kQ\frac{q\ell}{R^2-\ell^2/4}=-kQ\frac{p}{R^2-\ell^2/4},$$

pontszerű dipólusra ($\ell\ll R$) pedig $E_\mathrm{pot}=-k\frac{Qp}{R^2}$. Mivel q és Q azonos előjelűek, ezért Q és p is azonos előjelű. Eszerint a pQ szorzat biztosan pozitív, tehát a potenciális energia mindig negatív. A „végtelenben" ez a kifejezés nulla értéket vesz fel.

Ahhoz, hogy végtelen messzire vigyük a dipólust,

$$W=\Delta E_\mathrm{pot}=0-\left(\frac{-kQp}{R^2}\right)=k\frac{pQ}{R^2}>0$$

munkát kell végeznünk.

Gurzó József (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

II. megoldás. A szabadon forgó dipólus úgy áll be, hogy a pozitív fele Q-tól legtávolabb, a negatív fele pedig Q-hoz a lehető legközelebb legyen. (Feltételeztük, hogy $Q>0$. Amennyiben $Q<0$, a megoldás ugyanúgy érvényes marad, ha valamennyi töltés előjelét megfordítjuk.)

Mivel az elektrosztatikus erőtér *konzervatív,* bármilyen módon eltávolíthatjuk a dipólust a ponttöltéstől, a munkavégzés csak a kezdeti- és a végállapottól függ. Forgassuk el a dipólust először 90°-kal úgy, hogy a momentumának iránya a dipólust a ponttöltéssel összekötő egyenesre merőlegessé váljék. Az elforgatás során $W=pE$ munkát kell végeznünk, ahol E a ponttöltés térerőssége a dipólus helyén:

$$W=pE=k\frac{pQ}{R^2}.$$

(Ezt a képletet úgy láthatjuk be, hogy meggondoljuk, mennyi munkát kell végezzünk, ha a dipólus $+q$ töltését elforgatással az ottani elektromos térerősséggel ellentétes irányában ℓ távolsággal odébb helyezzük.)

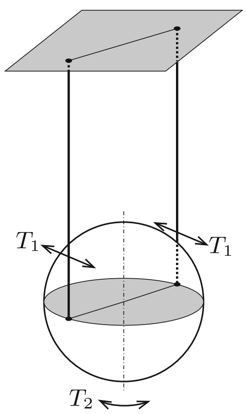
Az elforgatott helyzetben a dipólusra forgatónyomaték és az $\boldsymbol{E}$ térerősségre merőleges irányban erő hat, de az $\boldsymbol{E}$ irányú erő *nulla,* bármekkora is R. (A $\pm q$ töltésre az elektromos tér egyforma nagyságú, de majdnem ellentétes irányú erőt fejt ki.) Az elforgatott dipólust tehát a rajta áthaladó erővonal mentén tetszés szerinti távolságra elmozdíthatjuk anélkül, hogy munkát végeznénk. Így a folyamat során végzett teljes munka

$$W=k\frac{pQ}{R^2}.$$

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) dolgozata alapján

22 dolgozat érkezett. Helyes 12 megoldás. Kicsit hiányos (2–3 pont) 2, hibás 3, nem versenyszerű 5 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok



M. 404. Az *ábra* szerint felfüggesztett vékony falú labdát kis kitéréssel lendítsük ki a fonalak síkjára merőlegesen, majd mérjük meg a lengésidőt (T_1). Ezután a nyugalomban lévő labdát forgassuk el kissé a függőleges tengelye körül, és mérjük meg a torziós lengésidőt (T_2). A mért értékekből számítsuk ki a $\frac{T_1}{T_2}$ arányt!

(*6 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód