A két test térfogatának aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{10\pi}{\frac{37}{2}\pi} = \frac{20}{37}.$$

Csányi Tibor
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5100. *Mutassuk meg, hogy n szomszédos egész szám közül mindig kiválasztható néhány (legalább egy), melynek összege osztható $(1+2+\ldots+n)$-nel.*

(*6 pont*) *Kovács Benedek* és *Várkonyi Zsombor* ötletéből

Megoldás.

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

n darab egymást követő egész szám teljes maradékrendszert alkot modulo n, az $(n+1)$-gyel osztva pedig egy kivételével (legyen ez a kivétel d) minden maradékot felvesz. Az n darab egymást követő egész szám közül kössünk össze kék színű éllel két számot, ha az összegük osztható n-nel, illetve pirossal, ha $(n+1)$-gyel osztható az összegük. Így egy n csúcsú gráfot kapunk, amiben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2, és minden csúcsból legfeljebb egy piros és egy kék él indul ki. Tekintsük a gráf összefüggő komponenseit. Mivel minden csúcs legfeljebb másodfokú, egy ilyen komponens csak kör, *alternáló* (váltakozó színű egymáshoz csatlakozó élekből álló) út, vagy izolált pont lehet. Minden számból kiindul egy piros és egy kék él, kivéve az n-nel osztva 0 és – páros n esetén – $\frac{n}{2}$ maradékot adó (A és B), valamint az $(n+1)$-gyel osztva 0 és (páratlan n esetén) $\frac{n+1}{2}$ maradékot adó (C és E), illetve esetleg az $n+1-d$ maradékot adó D számokból.

Tekintsük az A csúcsot tartalmazó komponenst, ami – mivel A-ból nem indul kék él – csakis alternáló út lehet. Ha ennek az alternáló útnak a másik végpontja nem a D csúcs, akkor ezen alternáló út csúcsainak megfelelő számok összege osztható $n(n+1)/2$-vel:

1. Ha a másik végpont B, akkor n páros, és $A+B \equiv 0+\frac{n}{2} \pmod{n}$ osztható $\frac{n}{2}$-vel, a többi szám a kék élek mentén párokba állítható, ezért összegük osztható n-nel. Az út valamennyi csúcsát a piros élek mentén párokba állítva adódik, hogy a megfelelő számok összege osztható $(n+1)$-gyel. Az egymáshoz relatív prím $\frac{n}{2}$ és $n+1$ számokkal való oszthatóságból következik, hogy az összeg $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$-gyel is osztható.

2. Ha a másik végpont C, akkor a kék élek mentén történő párokba állításból csak az (n-nel osztható) A marad ki, a többiek összege osztható n-nel. A piros élek mentén párokba állításból csak a C marad ki, ami viszont osztható $(n+1)$-gyel, ezért ekkor az útba eső számok összege még $n(n+1)$-gyel is osztható.

3. Ha a másik végpont E, akkor a helyzet az előbbihez hasonló, mindössze E csupán $\frac{n+1}{2}$-vel osztható, amiből pontosan a kívánt állítást kapjuk.

Ha viszont a D csúcs a másik végpont, akkor C is csúcsa a gráfnak, és a C-t tartalmazó alternáló út komponens másik végpontja – n párosságától, illetve páratlanságától függően – B vagy E. Ekkor – a fenti esetekhez hasonlóan – ez utóbbi alternáló úthoz tartozó összeg lesz $n(n+1)/2$ többszöröse, tehát készen vagyunk.

Nádor Benedek (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) megoldása alapján

23 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 6 versenyző: Baski Bence, Füredi Erik Benjámin, Kovács Tamás, Nádor Benedek, Németh Márton, Sztranyák Gabriella. 5 pontos 4, 4 pontos 1, 3 pontos 1, 2 pontos 3, 1 pontos 4, 0 pontos 3 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

B. 5112. *Egy kártyapakliban p darab piros és k darab kék kártya van. Hányféleképpen választhatunk ki a pakliból kártyákat úgy, hogy a piros kártyák száma n-nel több legyen, mint a kék kártyák száma?*

(*4 pont*)

I. megoldás. Először a következő segédtételt igazoljuk: ha a, b és m adott pozitív egészek, melyekre $a+b \geqslant m$, akkor

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{a}{i}\binom{b}{m-i} = \binom{a+b}{m}.$$

Bizonyítás: Ha egy társaságban a nő és b férfi van, akkor közülük $\binom{a+b}{m}$-féleképpen választhatunk ki m főt – ez éppen a bizonyítandó azonosság jobb oldala. Másrészt összeszámlálhatjuk úgy is az eseteket, hogy 0 nőt és m férfit, vagy 1 nőt és $m-1$ férfit, vagy 2 nőt és $m-2$ férfit, …, vagy i nőt és $m-i$ férfit, …, vagy m nőt és 0 férfit választunk ki. Ezeknek a lehetőségeknek a száma nyilván az azonosság bal oldala.

A feladatra térve jelöljük t-vel a kiválasztott kék kártyák számát, ekkor a kiválasztott piros kártyák száma $n+t$; t értéke 0-tól k-ig mehet. Ezeket

$$\binom{p}{n+t}\binom{k}{t} = \binom{p}{n+t}\binom{k}{k-t}\text{-féleképpen}$$

választhatjuk ki. A feladat kérdésére a válasz ezek összege. Használjuk fel a segédtételt $a := p$, $b := k$, $m := n+k$, $i := n+t$ helyettesítéssel. Ekkor a szummából látszólag kimarad néhány tag, ám azokra a t értékekre (mikor t értéke $-n$ és -1 között lenne) $\binom{k}{k-t}$ értéke 0. Ezt kapjuk:

$$\sum_{t=0}^{k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{k-t}=\sum_{n+t=n}^{n+k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}=$$

$$=\sum_{n+t=0}^{n-1}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}+\sum_{n+t=n}^{n+k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}=$$

$$=\sum_{n+t=0}^{n+k}\binom{p}{n+t}\binom{k}{n+k-(n+t)}=\binom{p+k}{n+k}.$$

Csonka Illés (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimn., 9. évf.)

II. megoldás. Ha $n>p$, akkor a pakliban nincs elég piros kártya ahhoz, hogy létezzen megfelelő kiválasztás, tehát ebben az esetben a válasz 0. Így a továbbiakban $n\leqslant p$.

Állítsuk párba az $n+k$ elemszámú kártyarészhalmazokat, és a feladat feltételeinek megfelelő halmazokat. Minden H részhalmaz egyértelműen felírható, mint $H=H_k\cup H_p$, ahol H_k csak kék, H_p csak piros kártyákat tartalmaz. Jelölje továbbá K a kék kártyák halmazát. Legyen $f(H)=(K\backslash H_k)\cup H_p$. Mivel $K\backslash\{K\backslash H_k\}=H_k$, f egy involúció, vagyis olyan (X,Y) párokba rendezi a részhalmazokat, melyekben $f(X)=Y$ és $f(Y)=X$. Most megmutatjuk, hogy ha X egy, a feladat feltételeinek megfelelő részhalmaz, akkor $f(X)$ elemszáma $n+k$. A feladat szerint $|X_k|+n=|X_p|$. Így (felhasználva, hogy $\{K\backslash X_k\}\cap X_p=\emptyset$):

$$\big|f(X)\big|=\big|(K\backslash X_k)\cup X_p\big|=|K\backslash X_k|+|X_p|=|K|-|X_k|+|X_p|=k+n.$$

Megfordítva, ha X elemszáma $n+k$, vagyis $|X_k|+|X_p|=n+k$, akkor $f(X)=$ $=(K\backslash X_k)\cup X_p$, így $f(X)$-ben $\big|f(X)_k\big|=k-|X_k|$ kék és $\big|f(X)_p\big|=|X_p|$ piros kártya van, és $\big|f(X)_p\big|=|X_p|=n+k-|X_k|=n+\big|f(X)_k\big|$. Vagyis ha X elemszáma $n+k$, akkor $f(X)$ megfelel a feladat feltételeinek.

Ebből (illetve f kölcsönösen egyértelmű voltából) következik, hogy f párokba rendezi az $n+k$ elemszámú, és a feladatnak megfelelő halmazokat, vagyis az utóbbiból annyi van, mint az előbbiből, ami $\binom{p+k}{n+k}$.

Lovas Márton (Budapest, Békásmegyeri Veres Péter Gimn., 10. évf.)

80 dolgozat érkezett. 4 pontos 26, 3 pontos 8, 2 pontos 11, 1 pontos 8, 0 pontos 24 dolgozat. Nem versenyszerű 2 dolgozat. Nem számítjuk a versenybe a születési dátum vagy a szülői nyilatkozat hiánya miatt: 1 dolgozat.

B. 5140. *Egy szigeten* 10 *ország található, ezek közül némelyek szomszédosak egymással, mások nem. Mindegyik ország egy saját valutát használ. Mindegyik országban egyetlen pénzváltó működik, a következő szabályok szerint: aki az adott ország valutájából* 10 *darabot befizet, az kap az összes szomszédos ország valutájából* 1-1 *darabot. Arisztid és Tasziló fejenként* 100-100 *egységgel rendelkeznek mindegyik ország valutájából. Ezután mindketten a nekik tetsző sorrendben váltogatják a pénzüket a különböző országok pénváltóiban, amíg csak van olyan valutájuk, amit tudnak váltani (tehát legalább* 10 *darab van belőle). Bizonyítsuk be, hogy a végén pontosan ugyanannyi bergengóc tallérja lesz Arisztidnek és Taszilónak (a bergengóc tallér a sziget egyik országának valutája).*

(*6 pont*) *Mészáros Gábor* (Budapest) ötletéből

Megoldás. Azt látjuk be, hogy mindketten minden egyes országban ugyanannyiszor váltottak pénzt – csak a váltások sorrendje különbözhet. Ebből következik, hogy a végén mindkettőjüknek ugyanannyi lesz minden valutából, hiszen egy országban elvégzett tranzakció ugyanolyan hatással van egy szereplő vagyonára, függetlenül attól, hogy azt mikor végzi el.

(Indirekt bizonyítás.) Tegyük fel, hogy van olyan ország, amelyben Tasziló többször váltott pénzt, mint Arisztid. Nézzük meg, hogy milyen sorrendben váltott Tasziló. Tekintsük azt a valutát, amiből leghamarabb váltott többet, mint Arisztid összesen abból a valutából. Legyen ez a valuta a C országban, és keressük Tasziló első olyan váltását, amikor azzal együtt már többször váltott a C ország valutájából, mint Arisztid összesen. Ezen váltás előtti pillanatot nevezzük a *kritikus helyzetnek.*

Amikor Arisztid már nem tud többet váltani, a C országgal szomszédos országokban biztosan legalább annyiszor váltott már, mint Tasziló a kritikus helyzetig. Mivel

1. Arisztid a C ország valutáját pontosan annyiszor váltotta fel, mint Tasziló a kritikus helyzetig;
2. és a szomszédos országokban történő váltásokból Arisztidnak legalább ugyanannyi bevétele volt a C ország valutájából, mint Taszilónak a kritikus helyzetig;

ezért Arisztidnak a végén legalább annyi C-beli valutája van, mint Taszilónak a kritikus helyzetben. Arisztid (a pénzváltásai végén) nem tud többet váltani, Tasziló pedig még biztosan tudott legalább egyet a C országéból, ez ellentmondás.

Tehát Arisztid és Tasziló tényleg minden egyes országban ugyanannyiszor váltottak pénzt.

Fülöp Csilla (Szegedi Radnóti M. Kísérleti Gimn., 10. évf.)

Egyéb megoldási kísérletek. Több versenyző próbált a következő módon érvelni.

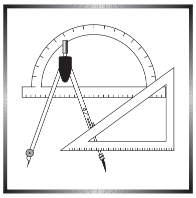
Ha valamelyik ország pénzéből összegyűlik legalább 10 darab, akkor azt előbb-utóbb be kell majd váltani. Mivel mindig pontosan ugyanolyan szomszédos valutákat kapunk a pénzünkért cserébe, ezért *mindegy, hogy mikor* váltjuk be. Tehát tekinthetjük a következő váltássort:

1. Váltsunk be 10-szer minden egyes országban, a váltások után az egyes országok valutájából lesz: $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ darabunk.
2. Ezután váltsunk be minden i-re az i-edik országban $\left\lfloor \frac{a_i}{10} \right\rfloor$ alkalommal. A váltások után az egyes országok valutájából lesz: $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{10}$.
3. Ismételjük az előző lépést, ameddig nem csökken minden valutánk darabszáma 10 alá.

Az így gondolkodó megoldóknak abban igaza van, hogy ezeket a váltásokat előbb-utóbb tényleg el fogjuk tudni végezni. Arra azonban senki nem írt kellően meggyőző érvet, hogy egy másféle váltássorozattal miért nem lehet esetleg elérni, hogy valamelyik országban ennél is többször tudjunk váltani. Az így érvelő dolgozatok általában 4 pontot kaptak.

44 dolgozat érkezett. 6 pontos 20 versenyző: Bán-Szabó Áron, Csonka Illés, Duchon Márton, Fülöp Csilla, Hegedűs Dániel, Jánosik Máté, Kercsó-Molnár Anita, Kovács Tamás, Kökényesi Márk Péter, Mezey Dorottya, Móra Márton Barnabás, Móricz Benjámin, Nádor Benedek, Németh Márton, Simon László Bence, Sztranyák Gabriella, Terjék András József, Tóth Bálint, Török Ágoston, Varga Boldizsár. 5 pontos 2, 4 pontos 13, 3 pontos 1, 2 pontos 5, 1 pontos 1, 0 pontos 2 dolgozat.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1665–1671.)



Feladatok 10. évfolyamig

C. 1665. A *KÖMAL* szó minden betűje egy-egy tízes számrendszerbeli számjegyet jelöl. Határozzuk meg a $\overline{KÖMAL}$ ötjegyű számot, ha fennállnak a következő egyenlőségek:

(1) $$M + Ö + L = \overline{KA},$$

(2) $$Ö + L = \overline{KK},$$

(3) $$K + Ö + M = 10,$$

(4) $$A \cdot L = 42.$$

C. 1666. Az ABC hegyesszögű háromszög A pontból induló belső szögfelezőjének metszéspontja a B-ből induló belső szögfelezővel, valamint a BC oldallal K, illetve D. Az A pontból induló belső szögfelező metszéspontja a B-ből induló belső szögfelezővel, valamint a BC oldallal K, illetve D. Az AD szögfelezőre a K pontban állított merőleges az AB oldalt az E pontban metszi. Az E pontból a BC-re állított merőleges talppontja F. Bocsássunk merőlegest a D pontból az AB egyenesre, a merőleges talppontja T. Bizonyítsuk be, hogy T pont illeszkedik a KEF háromszög körülírt körére.