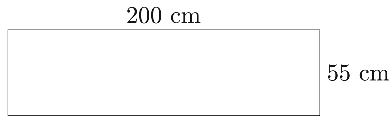
lál egy körgyűrűt vagy a belső kört, akkor annyi pontot szerez, amekkora szám van arra a részre írva. Ha valaki a körvonalat találja el, akkor a nagyobb pontszám jár neki.

a) Mennyi a szerzett pontszámok várható értéke, ha nagyon sok dobást hajtanak végre? (*5 pont*)

Kati lemásolta a céltábla koncentrikus köreit egy papírra. Hatféle színezője volt. A középső kis körlapot és a négy körgyűrűt úgy színezte ki, hogy a kis körlap és a külső körgyűrű azonos színű, de bármelyik két szomszédos rész különböző színű lett.

b) Határozzuk meg a különböző színezések számát, ha egy színezéshez legalább 3 színt használt. (*7 pont*)

Az óvodában a 29 ballagó gyerek mindegyike kapott egy 10 cm sugarú körlapot, amire búcsúajándékként tetszőleges rajzot készíthettek. Az óvodapedagógusok úgy rakták ki az alkotásokat egy 200 cm széles és 55 cm magas parafalemezre, hogy bármelyik két körlap még részben sem fedte egymást, és egyetlen körlap se nyúlt túl az alábbi lemezen.



c) Adjuk meg a körlapok egy ilyen lehetséges elhelyezését. (*4 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.*

a) $x-1 \leqslant \dfrac{x^2-x+6}{x^2+x-6}$. (*6 pont*)

b) $\log_{0,5}(-x^2+6x-8) \leqslant 2+\log_{0,5} 3$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A tört nevezője nem lehet zérus, emiatt $x \neq 2$ és $x \neq -3$. Közös nevezőre hozzuk és nullára rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+x-6} \leqslant 0.$$

Szorzattá alakítjuk a bal oldalt:

$$\frac{x(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+3)} \leqslant 0.$$

A hányados értéke pontosan akkor nulla, ha a számlálója 0. A hányados értéke pontosan akkor negatív, ha a tényezők között nincs 0, és páratlan sok tényezője negatív, vagyis $x < -3$ vagy $-2 \leqslant x \leqslant 0$ vagy $2 < x \leqslant 3$.

b) A logaritmus értelmezése alapján $-x^2 + 6x - 8 > 0$, amely akkor teljesül, ha $2 < x < 4$. Az egyenlőtlenség jobb oldalát átalakítjuk a logaritmus definíciójának segítségével:

$$\log_{0,5}(-x^2 + 6x - 8) \leqslant \log_{0,5} 0{,}25 + \log_{0,5} 3.$$

A logaritmus azonosságát felhasználva összevonjuk a jobb oldalon álló kifejezést:

$$\log_{0,5}(-x^2 + 6x - 8) \leqslant \log_{0,5} 0{,}75.$$

A 0,5 alapú logaritmus függvény szigorú monoton csökkenését figyelembe véve, a relációs jel megfordításával elhagyjuk a logaritmusokat, így a következő másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk:

$$-x^2 + 6x - 8 \geqslant 0{,}75.$$

A másodfokú egyenlőtlenség megoldása $2{,}5 \leqslant x \leqslant 3{,}5$, amely megfelel a kikötésnek.

2. *A* 688, 1204 *és a* 2021 *számok ugyanannak a természetes számokból álló,* 1*-nél nagyobb differenciájú* a_n *számtani sorozatnak a tagjai.*

a) Határozzuk meg az a_n *sorozat differenciáját.* (*4 pont*)

b) Mennyi az a_n *sorozat négyjegyű tagjainak összege?* (*6 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a 688, 1204 *és a* 2021 *számok nem lehetnek ebben a sorrendben egy mértani sorozat egymást követő tagjai.* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel a sorozat tagjainak különbsége a differencia többszöröse, ezért az $1204 - 688 = 516$ és a $2021 - 1204 = 817$ 1-nél nagyobb közös osztóit keressük. Az $516 = 2^2 \cdot 3 \cdot 43$ és a $817 = 19 \cdot 43$. A két számnak a 43 az egyetlen 1-nél nagyobb közös osztója, tehát a sorozat differenciája a 43.

b) A sorozat első négyjegyű tagja az 1032, az utolsó a 9976. A sorozatnak 209 négyjegyű tagja van, hiszen $1032 + (n - 1) \cdot 43 = 9976$, amelyből $n = 209$. Így a négyjegyű tagok összege:

$$S_{209} = \frac{1032 + 9976}{2} \cdot 209 = 1\,150\,336.$$

c) A mértani sorozat definíciója alapján az egymást követő tagok hányadosa állandó. A megadott 3 számra ez nem teljesül, ugyanis $\frac{1204}{688} \neq \frac{2021}{1204}$.

3. *Az óceánon egy kutatócsoportnak elromlott a hajója. Két mentőcsapat siet segítségükre. A kutatók épp derékszögben látják a két mentőhajót, amikor az egyik az* $A(4; 5)$ *és a másik a* $B(5; -3)$ *pontban láthatók a radaron. A koordinátarendszer egysége a valóságban* 1 km.

a) A koordinátarendszer mely pontjában van a kutatóhajó, ha a három hajó által közrefogott háromszög területe a valóságban 15 km^2*, és a kutatócsoport helyének abszcisszája* 1. (*7 pont*)

A radaron véletlenszerűen felbukkan egy tengeralattjáró a hajók által közrefogott háromszögön belül.

b) Mennyi a valószínűsége, hogy a tengeralattjáró az abszcissza-tengely alatt bukkan fel? (*6 pont*)

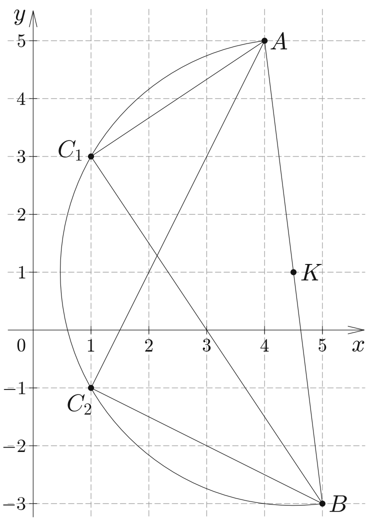
Megoldás. *a*) Mivel a kutatók a két mentőhajót derékszög alatt látják, ezért az AB átmérőjű Thalész-körön vannak (*1. ábra*). A kör átmérője

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(5-4)^2 + (-3-5)^2} = \sqrt{65}\,,$$

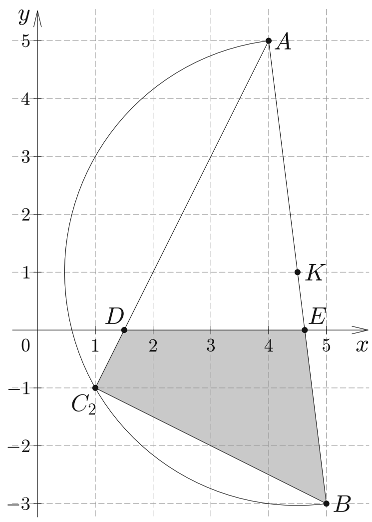
a kör középpontja az AB szakasz $K\left(\frac{9}{2};1\right)$ felezőpontja, így a kör egyenlete:

$$\left(x-\frac{9}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{65}{4}.$$

A kutatócsoport helyének első koordinátája 1, emiatt a kutatók a $C_1(1;3)$ vagy $C_2(1;-1)$ pontban lehetnek. Az ABC_1 háromszög területe 13 területegység, az ABC_2 háromszög területe 15 területegység. Tehát a kutatóhajó a $C_2(1;-1)$ pontban van.



1. ábra



2. ábra

b) A valószínűséget a $BEDC_2$ négyszög és az AC_2B háromszög területének hányadosaként számoljuk ki (*2. ábra*). A $BEDC_2$ négyszög területét megkapjuk, ha az AC_2B háromszög területéből kivonjuk az ADE háromszög területét. A C_2A egyenes meredeksége 2, ezért az x-tengelyt a $D\left(\frac{3}{2};0\right)$ pontban metszi. Az AB egyenes meredeksége -8, így az x-tengelyt az $E\left(\frac{37}{8};0\right)$ pontban metszi. A DE szakasz hossza $\frac{37}{8}-\frac{3}{2}=\frac{25}{8}$.

$$T_{BEDC_2} = 15 - \frac{\frac{25}{8}\cdot 5}{2} = \frac{115}{16}.$$

A kérdezett valószínűség:

$$P = \frac{\frac{115}{16}}{15} = \frac{23}{48}.$$

4. *Az $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + d$ harmadfokú függvény lokális minimumhelye egyben zérushelye is.*

a) Határozzuk meg d értékét. *(7 pont)*

Legyen az f függvény lokális minimumhelye m, maximumhelye n.

b) Mekkora területet zár közre az x-tengely, az $x = m$, az $x = n$ egyenesek és az $y = f(x)$ egyenletű görbe? *(6 pont)*

Megoldás. *a)* Ahol a függvénynek lokális szélsőértéke van, ott

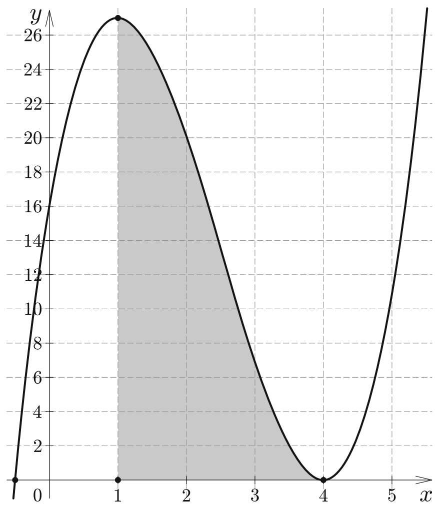
$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldásai $x_1 = 1$ és $x_2 = 4$.

A függvény második deriváltja $f''(x) = 12x - 30$. $f''(1) = 12 - 30 = -18 < 0$, emiatt $x = 1$-ben a függvénynek lokális maximuma van.

$$f''(4) = 48 - 30 = 18 > 0,$$

emiatt $x = 4$ a függvény lokális minimumhelye, egyben zérushelye is. Ebből következően



$$f(4) = 2 \cdot 4^3 - 15 \cdot 4^2 + 24 \cdot 4 + d = 0,$$

amelyből $d = 16$.

b) Az *a)* feladat megoldása alapján $m = 4$ és $n = 1$. A függvény az $[1; 4]$ intervallumon az x-tengely fölött helyezkedik el. A görbe alatti terület:

$$T = \int_1^4 (2x^3 - 15x^2 + 24x + 16) =$$

$$= \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{15x^3}{3} + \frac{24x^2}{2} + 16x\right]_1^4 = \frac{81}{2}.$$

II. rész

5. *A MathCoffie Rt.* 6 *féle kávékeveréket gyárt (Arcusa, Binoma, Ciklona, Dodeka, Expona és Faktora). Pepi ki szeretné próbálni mindegyiket, ezért* 2 *dobozzal vett mindegyik fajtából. A kávékeverékek* 3 *különböző árkategóriában kaphatók. Az Arcusa és a Binoma I. árkategóriájú, a Ciklona és a Dodeka II. árkategóriájú,* *az Expona és a Faktora III. árkategóriába tartozik. A II. kategóriájú kávé ára az I. és III. kategóriájú kávék árának az átlaga. A II. és I. kategóriák árának aránya* $\frac{10}{33}$*-dal kisebb, mint a III. és I. kategóriák árának aránya.*

a) Milyen árban vannak az egyes kávéfajták, ha Pepi a kávékért 15 480 Ft*-ot fizetett?* (*8 pont*)

Pepi mindegyik típusú kávéból az egyik dobozt megnyitotta, hogy megkóstolja a kávékat, majd visszazárta, így kívülről nem állapítható meg, hogy melyeket nyitotta ki. Pepi testvérei Pipi és Pepe szemet vetettek Pepi kávéjára, és véletlenszerűen elvettek a 12 *dobozból két-két dobozzal.*

b) Hányféleképp vihettek el két-két különböző típusú dobozt, ha számít, hogy a doboz bontott volt vagy sem? (*5 pont*)

c) Feltéve, hogy mindkét testvér két különböző típusú kávét vitt el, mi a valószínűsége, hogy a 6 *bontatlan doboz mindegyike otthon maradt?* (*3 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen az A és B kávé ára x, a C és D kávé ára y, az E és F kávé ára pedig z. A feltételek alapján felírható a következő egyenletrendszer:

$$\frac{x+z}{2}=y,$$

$$\frac{y}{x}+\frac{10}{33}=\frac{z}{x},$$

$$4x+4y+4z=15\,480.$$

Az egyenleteket rendezzük:

$$x-2y+z=0,$$

$$10x+33y-33z=0,$$

$$x+y+z=3870.$$

A harmadik egyenletből kivonva az első egyenletet $3y=3870$ adódik, amelyből $y=1290$. Ezt visszahelyettesítve az első két egyenletbe, majd rendezve azokat:

$$x+z=2580,$$

$$10x-33z=-42\,570.$$

Ebből $x=990$ és $z=1590$. Tehát az A és B típusú kávé ára 990 Ft, a C és D ára 1290 Ft és az E és F típusú kávé ára 1590 Ft.

b) 3 esetet különböztetünk meg aszerint, hogy hány olyan kávétípus van, amelyet mindketten választottak:

1. eset: Ha nem választottak egyforma kávéfajtát, akkor Pipi 6 kávéfajtából választott kettőt, és abból a kettőből 4-féleképp vihetett haza aszerint, hogy bontottakat vitt vagy sem. Pepe pedig 4 kávéfajtából választott kettőt, azokból szintén négyféleképp vihetett haza. Ezek alapján az első esetben $\binom{6}{2}\cdot 4\cdot\binom{4}{2}\cdot 4=1440$-féleképp választhattak.

2. eset: Ha egy kávéfajtából mindketten vittek, akkor a közös fajta 6-féle lehet, és ezt kétféleképp vehették el aszerint, hogy ki választotta a bontottat. A maradék 10 kávéból Pipi $5 \cdot 2 = 10$-féleképp választhatott, Pepe már csak $4 \cdot 2 = 8$-féleképp, mert nem választhatta ugyanazt a fajtát, mint Pipi. Ez $6 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 8 = 960$ lehetőség.

3. eset: Ha mindketten ugyanazt a kétfajta kávét választották, akkor a 6 kávéfajtából először kiválasztották a két közöset, majd azokból 4-féleképp vehettek el aszerint, hogy ki melyiket választotta. Ez $\binom{6}{2} \cdot 4 = 60$ lehetőség.

Tehát összesen $1440 + 960 + 60 = 2460$-féleképp vehetnek el a kávékból.

c) Legyen az A esemény az, hogy a hat bontatlan doboz otthon maradt, a B esemény pedig, hogy mindkét testvér különböző típusút vitt el. Ekkor

$$P(AB) = P(A) = \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{12}{2} \cdot \binom{10}{2}} = \frac{90}{2970} = \frac{1}{33},$$

hiszen ha minden bontatlan doboz otthon maradt, akkor a két testvér biztosan különböző fajtákat választott, és azokból is csak a bontottat. $P(B) = \frac{2460}{2970} = \frac{82}{99}$, mert ez a *b)* feladat valószínűsége.

A fentiek alapján a kérdéses feltételes valószínűség:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{33}}{\frac{82}{99}} = \frac{3}{82}.$$

6. *Egy egység oldalú szabályos kilencszög csúcsai $A_1; A_2; \ldots; A_9$. Szerkesszünk félköröket $A_1A_3; A_2A_4; \ldots; A_7A_9; A_8A_1; A_9A_2$ szakaszokra, mint átmérőre a kilencszögön belül.*

a) Igazoljuk, hogy a félköröket érintő kör átmérőjének hossza

$$\frac{\cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ}. \qquad (9\ pont)$$

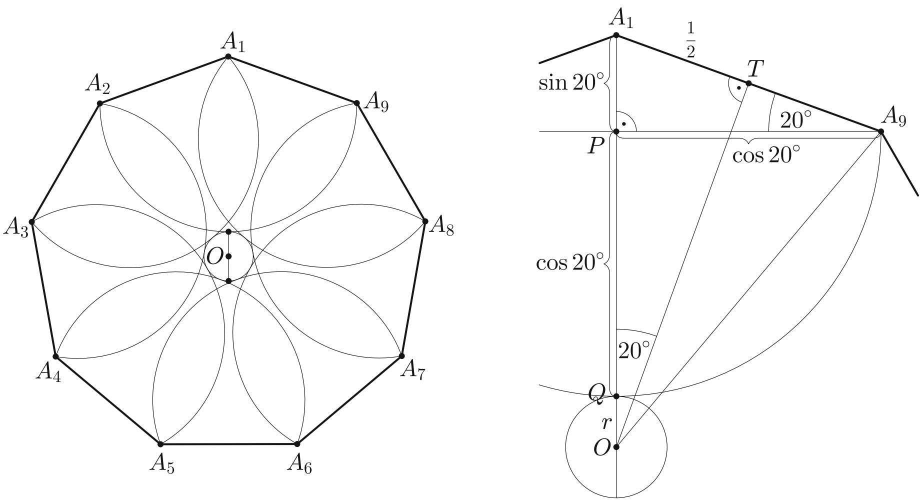
Húzzuk be a szabályos kilencszög összes átlóját, majd színezzük pirosra azokat a szakaszokat (átlókat, oldalakat), amelyek a csúcsok indexeit tekintve különböző paritásúakat kötnek össze, a többi szakaszt pedig fessük kék színűre.

b) Hányféle úton lehet eljutni az A_1 csúcsból az A_9 csúcsba piros szakaszokon úgy, hogy minden csúcsot pontosan egyszer érinthetünk? (*3 pont*)

c) Mennyi a valószínűsége, hogy ha véletlenszerűen kiválasztunk a szakaszok közül kettőt, akkor azok különböző színűek? (*4 pont*)

Megoldás. *a) Ábrát* készítünk a feladathoz, és használjuk annak jelöléseit.

A keresett érintő kör O középpontja egyben a szabályos kilencszög középpontja is, sugara legyen r. Az A_9A_2 átmérőjű félkör középpontja P. A félkör az A_1O szakaszt az Q pontban metszi. A szabályos kilencszög belső szöge 140°, ezért $A_1OT\sphericalangle = A_1A_9P\sphericalangle = 20^\circ$. $A_1A_9 = 1$, ezért $A_1P = \sin 20^\circ$ és $A_9P = \cos 20^\circ$. Mivel A_9 és Q is az A_9A_2 átmérőjű félkörre illeszkedik, ezért $PA_9 = PQ = \cos 20^\circ$.



Az A_1OT háromszögben felírjuk $\sin 20°$-ot a háromszög oldalainak segítségével:

$$\sin 20° = \frac{1}{2 \cdot (r + \cos 20° + \sin 20°)}.$$

Ebből kifejezzük az érintő kör átmérőjét, $2r$-t:

$$2r = \frac{1}{\sin 20°} - 2\cos 20° - 2\sin 20°.$$

A jobb oldali kifejezést közös nevezőre hozzuk, majd alkalmazzuk a kétszeres szögek szögfüggvényeire vonatkozó összefüggéseket:

$$2r = \frac{1 - 2\sin^2 20° - 2\sin 20° \cos 20°}{\sin 20°} = \frac{\cos 40° - \sin 40°}{\sin 20°}.$$

Ezzel az állítást bizonyítottuk.

b) Az A_1 csúcsból csak páros indexű csúcsba léphetünk (ez 4 lehetőség), onnan páratlanba (ez 3 lehetőség), majd újra párosba (ez szintén 3 lehetőség), és így minden csúcson végighaladva az A_9 csúcsban fejeződik be az út. Ez összesen

$$4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 144$$

lehetőség.

c) A kilencszöget egy kilenccsúcsú gráfnak tekinthetjük, és megadjuk a piros szakaszokból álló részgráf éleinek számát. Ebben az öt páratlan indexű csúcs fokszámának mindegyike 4, a négy páros indexűé pedig 5. A fokszámok összege ezek alapján $5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 40$, tehát 20 piros él van a gráfban. A gráfnak összesen $\binom{9}{2} = 36$ éle van, ebből következően $36 - 20 = 16$ kék színű él van. A klasszikus valószínűségi modell (hipergeometrikus eloszlás) alapján a valószínűség:

$$P = \frac{20 \cdot 16}{\binom{36}{2}} = \frac{320}{630} \approx 0{,}508.$$

7. *a) Jellemezzük az*

$$a_n = \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n}$$

sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából. *(9 pont)*

b) Mutassuk meg, hogy minden n pozitív egész számra

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4n}{3^n} = 3 - \frac{2n+3}{3^n}. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a)*

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3^{n+2} - 2n - 5}{3^{n+1}} - \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n} = \frac{4n+4}{3^{n+1}} > 0$$

minden n pozitív egész számra, ezért a sorozat szigorúan monoton nő.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1} - 2n - 3}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3 \cdot 3^n}{3^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3^n} - \lim_{n\to\infty} \frac{3}{3^n} = 3 - 0 - 0 = 3,$$

tehát a sorozat konvergens, és a határértéke 3.

A sorozat konvergens, tehát korlátos. A sorozat monoton növekvő, ezért a legnagyobb alsó korlátja megegyezik a sorozat első elemével, tehát $\inf(a_n) = \frac{4}{3}$. A legkisebb felső korlátja pedig a sorozat határértékével egyezik meg, tehát $\sup(a_n) = 3$.

b) A bizonyítást teljes indukcióval végezzük.

$n = 1$-re $\frac{4}{3} = 3 - \frac{2+3}{3}$ teljesül.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4k}{3^k} = 3 - \frac{2k+3}{3^k}.$$

Igazoljuk az „öröklődést” $n = (k+1)$-re, vagyis

$$\frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \ldots + \frac{4k}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} = 3 - \frac{2(k+1)+3}{3^{k+1}}.$$

Használjuk fel az indukciós feltételt az egyenlet bal oldalán:

$$3 - \frac{2k+3}{3^k} + \frac{4(k+1)}{3^{k+1}} = 3 - \frac{2(k+1)+3}{3^{k+1}}.$$

Az egyenlet mindkét oldalából kivonva 3-at, majd szorozva a közös nevezővel azt kapjuk, hogy $-(6k+9) + 4k + 4 = -(2k+5)$, amelyből a zárójelek felbontása és összevonás után $-2k - 5 = -2k - 5$.

Az öröklődést igazoltuk, tehát az állítás igaz.

8. *a) Igazoljuk, hogy minden pozitív valós számpárra ha $x^2 + 4y^2 = 12xy$, akkor*

$$\lg(x+2y) - 2\lg 2 = \frac{\lg x + \lg y}{2}. \qquad (6\ pont)$$

b) Van-e megoldása az $x^2 + 4y^2 = 12xy$ egyenletnek a pozitív egész számok halmazán? Válaszunkat indokoljuk. *(10 pont)*

Megoldás. *a*) Alakítsuk át az elérni kívánt alakot 2-vel való szorzás után a logaritmus azonosságainak alkalmazásával:

$$\lg(x+2y)^2 - \lg 2^4 = \lg x + \lg y,$$
$$\lg(x+2y)^2 = \lg(16xy).$$

A logaritmusok elhagyhatók, mert a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű.

A kapott $(x+2y)^2 = 16xy$ egyenletben a zárójel felbontása és rendezés után az $x^2 + 4y^2 = 12xy$ alakhoz jutunk. Minden átalakítás ekvivalens volt a pozitív számok halmazán, ezért azok visszafelé is elvégezhetők, így az állítást igazoltuk.

b) Az egyenlet x-re nézve másodfokú, ezért rendezzük 0-ra: $x^2 - 12xy + 4y^2 = 0$. Írjuk fel a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$x_{1,2} = \frac{12y \pm \sqrt{144y^2 - 16y^2}}{2} = 6y \pm 4\sqrt{2}y.$$

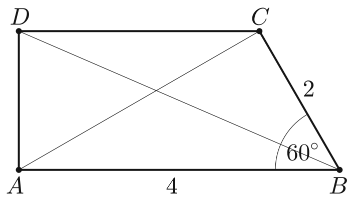
Ha y pozitív egész szám, akkor x-re irracionális számot kapunk, tehát az egyenletnek nincs megoldása a pozitív egész számok halmazán.

9. *Egy derékszögű trapéz hegyesszöge* $60°$*-os, hosszabbik alapjának és hosszabbik szárának aránya* $2:1$.

a) *Határozzuk meg a trapéz átlóinak arányát.* (*6 pont*)

A trapézt megforgatjuk a hosszabbik alapja, majd a hosszabbik szára körül.

b) *Határozzuk meg a kapott testek térfogatának arányát.* (*10 pont*)



Megoldás. *a*) *Ábrát* készítünk a feladathoz, és használjuk a jelöléseit.

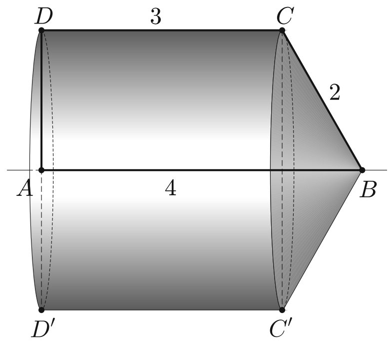
A megoldás során többször felhasználjuk, hogy a félszabályos háromszög szögei $30°$, $60°$ és $90°$, oldalainak aránya $1 : \sqrt{3} : 2$. Mivel az átlók arányát kell meghatározni, ezért a hasonlóságot kihasználva rögzíthetjük a hosszabbik alap hosszát az egyszerűség kedvéért 4 egységnek. Ekkor a hosszabbik szár hossza 2 egység. Az ABC háromszög félszabályos, mivel a $60°$-os szöget közrefogó két oldal aránya $1:2$. Emiatt az $ACB\sphericalangle = 90°$, $BAC\sphericalangle = 30°$ és az AC szakasz hossza $2\sqrt{3}$. A $CAD\sphericalangle = 60°$, mert a $BAC\sphericalangle$ pótszöge. Ebből következően az ACD derékszögű háromszög szintén egy félszabályos háromszög, így az AD oldal hossza $\sqrt{3}$ és a CD oldal hossza 3 egység. Ezek után a BD átló hosszát az ABD derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel alkalmazásával kiszámoljuk:

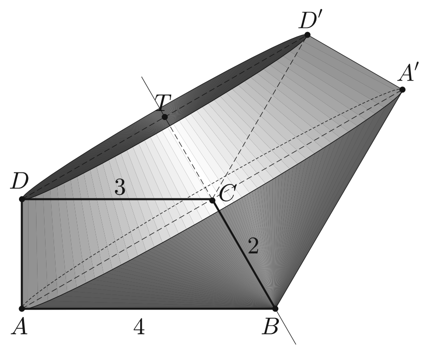
$$BD = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{19}\,.$$

A fentiek alapján az átlók aránya

$$\frac{AC}{BD} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{2\sqrt{57}}{19}.$$

b) *Ábrát* készítünk a feladathoz, és használjuk a jelöléseit.





Az első ábrán látható a hosszabbik alap körüli forgatással nyert test. A test térfogatát egy azonos alapkörű henger és kúp térfogatának összegeként kapjuk meg. Az alapkör sugara a trapéz AD magasságával egyenlő, tehát $r_h = r_k = \sqrt{3}$ egység hosszú, a henger magassága $m_h = CD = 3$, a kúp magassága $m_k = AB - CD = 1$ egység. A fentiek alapján az első test térfogata

$$V_1 = r_h^2 \pi m_h + \frac{r_k^2 \pi m_k}{3} = \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 3 + \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \pi \cdot 1}{3} = 10\pi.$$

A második ábrán látható a hosszabbik szár körüli forgatással nyert test. A test térfogatát úgy kapjuk meg, ha egy kúp és egy csonkakúp térfogatának összegéből kivonjuk egy kisebb kúp térfogatát. A kis kúp csúcsa egybeesik a nagy kúp alapkörének középpontjával, mivel az AC átló merőleges a BC szárra. A nagy kúp sugara megegyezik a csonkakúp alapkörének sugarával: $r_{\mathrm{nk}} = R_{\mathrm{csk}} = AC = 2\sqrt{3}$. A csonkakúp fedőkörének sugara megegyezik a kisebbik kúp alapkörének sugarával. A DCT háromszög hasonló az ABC háromszöghöz, mert oldalaik páronként párhuzamosak. A hasonlóság aránya

$$\frac{DC}{AB} = \frac{3}{4}, \quad \text{így} \quad r_{\mathrm{csk}} = r_{kk} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

A nagy kúp magassága $m_{\mathrm{nk}} = CB = 2$, a csonkakúp és a kis kúp magassága $m_{\mathrm{csk}} = m_{kk} = TC = \frac{3}{2}$. A fentiek alapján a második test térfogata:

$$V_2 = \frac{r_{\mathrm{nk}}^2 \pi m_{\mathrm{nk}}}{3} + \frac{\pi m_{\mathrm{csk}}}{3}\left(R_{\mathrm{csk}}^2 + R_{\mathrm{csk}} r_{\mathrm{csk}} + r_{\mathrm{csk}}^2\right) - \frac{r_{kk}^2 \pi m_{kk}}{3} =$$

$$= 8\pi + \frac{111\pi}{8} - \frac{27\pi}{8} = \frac{37\pi}{2}.$$

A két test térfogatának aránya:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{10\pi}{\frac{37}{2}\pi} = \frac{20}{37}.$$

Csányi Tibor
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 5100. *Mutassuk meg, hogy n szomszédos egész szám közül mindig kiválasztható néhány (legalább egy), melynek összege osztható $(1+2+\ldots+n)$-nel.*

(*6 pont*) *Kovács Benedek* és *Várkonyi Zsombor* ötletéből

Megoldás.

$$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

n darab egymást követő egész szám teljes maradékrendszert alkot modulo n, az $(n+1)$-gyel osztva pedig egy kivételével (legyen ez a kivétel d) minden maradékot felvesz. Az n darab egymást követő egész szám közül kössünk össze kék színű éllel két számot, ha az összegük osztható n-nel, illetve pirossal, ha $(n+1)$-gyel osztható az összegük. Így egy n csúcsú gráfot kapunk, amiben minden csúcs fokszáma legfeljebb 2, és minden csúcsból legfeljebb egy piros és egy kék él indul ki. Tekintsük a gráf összefüggő komponenseit. Mivel minden csúcs legfeljebb másodfokú, egy ilyen komponens csak kör, *alternáló* (váltakozó színű egymáshoz csatlakozó élekből álló) út, vagy izolált pont lehet. Minden számból kiindul egy piros és egy kék él, kivéve az n-nel osztva 0 és – páros n esetén – $\frac{n}{2}$ maradékot adó (A és B), valamint az $(n+1)$-gyel osztva 0 és (páratlan n esetén) $\frac{n+1}{2}$ maradékot adó (C és E), illetve esetleg az $n+1-d$ maradékot adó D számokból.

Tekintsük az A csúcsot tartalmazó komponenst, ami – mivel A-ból nem indul kék él – csakis alternáló út lehet. Ha ennek az alternáló útnak a másik végpontja nem a D csúcs, akkor ezen alternáló út csúcsainak megfelelő számok összege osztható $n(n+1)/2$-vel:

1. Ha a másik végpont B, akkor n páros, és $A+B \equiv 0+\frac{n}{2} \pmod{n}$ osztható $\frac{n}{2}$-vel, a többi szám a kék élek mentén párokba állítható, ezért összegük osztható n-nel. Az út valamennyi csúcsát a piros élek mentén párokba állítva adódik, hogy a megfelelő számok összege osztható $(n+1)$-gyel. Az egymáshoz relatív prím $\frac{n}{2}$ és $n+1$ számokkal való oszthatóságból következik, hogy az összeg $\frac{n}{2}\cdot(n+1)$-gyel is osztható.