változatos megoldás készíthető, melyek a geometria számos szépségét felvonultatják. A javítási útmutatóba ezek közül akkor is csak néhány kerülhetett bele, ezért aztán az a feladat is a KöMaL-ban élt tovább[5].

A matematika érettségi tételkészítő bizottság

Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta-rendszerben $A(-1;4)$, $B(7;-2)$ és $C(5;8)$.

a) Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a C ponton és a háromszöget két egyenlő területű részre osztja. (*4 pont*)

b) Számítsuk ki, hogy az y tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz. (*6 pont*)

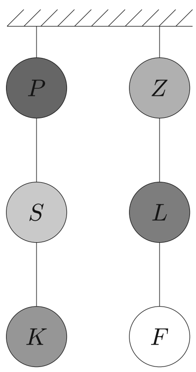
2. *a*) Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$|x-2|^{2x^2-11x+14}=1. \qquad (6\ pont)$$

b) Oldjuk meg az 1-nél nagyobb egész számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$7\cdot\binom{n}{2}=2\cdot\binom{n+2}{3}. \qquad (7\ pont)$$

3. Egy céllövöldében az *ábrán* látható módon felfüggesztettek hat különböző színű lufit. Azt a szabályt vezették be, hogy csak arra a lufira szabad lőni, amelyik a két felfüggesztés bármelyikében éppen legalul van.



a) Hány különböző sorrendben lőhető le a fenti szabály szerint a hat lufi? (*5 pont*)

Ebben a céllövöldében egy nyolcfős társaság szórakozott, ahol az első öt személy 3, 1, 5, 2 és 3 lufit talált el.

b) Hány lufit talált el a maradék három személy külön-külön, ha a társaság találatainak átlaga 3, mediánja 2,5 lett? (*5 pont*)

Nagyszámú megfigyelés alapján megállapították, hogy 0,4 annak a valószínűsége, hogy egy céllövő elsőre eltalálja a kiszemelt lufit.

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a céllövő 6 lövésből legalább 5 lufit eltalál? (*4 pont*)

[5] `http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=201959` (KöMaL, 2017. november)

4. Egy mértani sorozat első három tagja ebben a sorrendben $\sin\alpha$, $\sin 2\alpha$ és $2\cos^2\alpha$. Ennek a sorozatnak nem tagja a nulla és hányadosa negatív szám.

a) Számítsuk ki a sorozat második tagjának pontos értékét. (*6 pont*)

Az $\{a_n\}$ sorozatot a következőképpen adtuk meg:

$$a_n = \begin{cases} 3n-2, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 0{,}1\cdot(-1{,}1)^n, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$$

b) Számítsuk ki a sorozat első 101 tagjának összegét. Az eredményt egész számra kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

II. rész

5. Az a és b pozitív számok számtani közepe 4, mértani (geometriai) közepe 2.

a) Számítsuk ki a két szám négyzetes közepének pontos értékét. (*5 pont*)

Az x tengely, az $x=p$, az $x=q$ és az $y=\frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területe megegyezik az x tengely, az $x=q$, az $x=r$ és az $y=\frac{1}{x^2}$ egyenletű görbe által határolt síkidom területével, ahol $p,q,r>0$ és $p<q<r$.

b) Igazoljuk, hogy a q szám a p és r számok harmonikus közepe. (*5 pont*)

Az ABC háromszög A csúcsánál lévő belső szögének nagysága $70°$, B csúcsánál lévő belső szögének nagysága pedig $35°$. Jelölje D a BC oldal C-n túli meghosszabbításának azt a pontját, amelyre a $DAC\sphericalangle = 35°$.

c) Igazoljuk, hogy az AD szakasz hossza a BD és CD szakaszok hosszának mértani (geometriai) közepe. (*6 pont*)

6. Egy n pontú egyszerű gráf minden pontjának 15 a fokszáma. Komplementer (kiegészítő) gráfjának 18 éle van. (A G gráf komplementere az a gráf, amelynek pontjai megegyeznek G pontjaival, és amelyben két pont pontosan akkor van összekötve éllel, ha G-ben nincs összekötve.)

a) Hány pontú ez a gráf? (*6 pont*)

Egy 18 pontú teljes gráf éleit a piros, fehér és zöld színekkel színeztük ki úgy, hogy a fehér élek száma kétszerese a piros élek számának, és a három különböző színű él számának a szorzata a legnagyobb.

b) Hány zöld éle van az így kiszínezett gráfnak? (*6 pont*)

Internetes ismeretségi hálózatokban, mint például a Facebook vagy a LinkedIn, két személy között akkor jön létre a kapcsolat, ha azt mindkét fél visszaigazolta. Ilyen módon bármely két személy között vagy egyáltalán nincs kapcsolat, vagy pontosan egy kapcsolat létezik.

Egy 18 főből álló mintában 16 résztvevőnek 2, a többi 2 résztvevőnek pedig 1 egymás közötti kapcsolata van. Azt is tudjuk továbbá, hogy jelenleg bármely két személy között létezik közvetlen vagy közvetett kapcsolat, azaz az ismeretségeket követve bármelyik résztvevőtől bármelyik másikig el tudunk jutni a hálózaton belül.

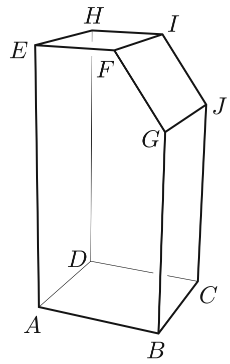
c) Mutassuk meg, hogy a már létező kapcsolatok közül bármelyiket megszüntetve a hálózat szétesik, azaz biztosan lesz legalább két olyan személy, akik között sem közvetlen, sem közvetett kapcsolat nem marad. (*4 pont*)

7. Az *1. ábrán* látható kézfertőtlenítőt tartalmazó flakon azon részét modelleztük a *2. ábrán,* ameddig megtöltik fertőtlenítőszerrel. Ez a töltési rész úgy keletkezett, hogy az $ABCD$ négyzet alapú egyenes hasábból a megadott módon levágtunk egy testet. Az így keletkezett flakon belső méretei: $AB = 6{,}5$ cm, $AE = 13{,}5$ cm, $EF = 4$ cm és $BG = 10$ cm. (A flakonban lévő adagoló pumpa által elfoglalt térrészt nem vesszük figyelembe.)

a) Számítsuk ki a töltési rész térfogatát. A választ egész ml-re kerekítve adjuk meg. (*5 pont*)

A fertőtlenítő 96% hatóanyagot tartalmaz, azaz 96%-os töménységű. Egy felhasználó elhasználja a flakonban lévő mennyiség 1%-át, majd az elhasznált mennyiség helyére ugyanannyi vizet önt. (Feltételezzük, hogy a hatóanyag és a víz egyenletesen keveredik.) Tudjuk, hogy a fertőtlenítőszer még 50%-os töménységben is elfogadható hatásfokkal véd.

1. ábra



2. ábra

b) Legfeljebb hányszor lehet a fenti műveletet megismételni, ha azt szeretnénk, hogy a fertőtlenítőszer továbbra is elfogadhatóan hatásos legyen? (*5 pont*)

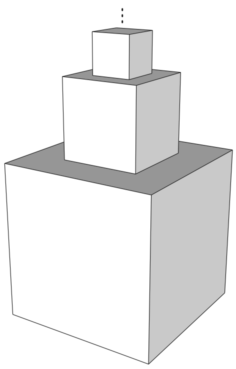
Az alábbi táblázat egy vállalkozásban dolgozók koreloszlását mutatja, valamint az adott korcsoportra vonatkozó *tünetmentesen fertőző* tulajdonság előfordulási valószínűségét a járvány egy adott szakaszában.

Korcsoport	**20–30 éves**	**31–40 éves**	**41–50 éves**	**51–65 éves**
Dolgozók száma	20	40	30	10
Tünetmentesen fertőző valószínűség	0,4	0,3	0,2	0,1

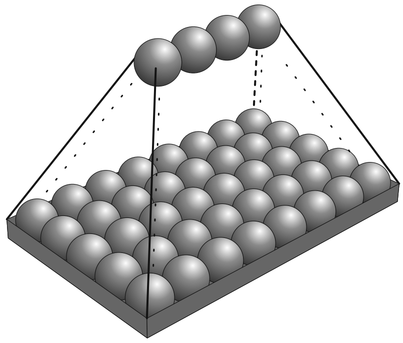
c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy ha találkozunk két dolgozóval, akkor lesz köztük legalább egy fertőző? A választ egy tizedesjegyre kerekítve adjuk meg. (*6 pont*)

8. Egy társasjátékban a játékosok különböző méretű kockákból „tornyot” építenek (lásd *3. ábra*). A legalsó kocka éle 16 cm, a rárakott kockáké 8 cm és 4 cm. Az építést tovább folytatva minden újonnan felrakott kocka élhossza a közvetlenül előtte felrakott kocka élhosszának a fele.

a) Mekkora lenne a keletkező „torony” felszíne, ha az építést végtelen sokáig lehetne folytatni? (A felszínhez a legalsó szint alaplapjának területét is vegyük figyelembe.) (*6 pont*)



3. ábra



4. ábra

Egy másik játékban egyforma méretű gömböket rakunk az ábrán látható átlátszó műanyag tartóba. A tartó legalján, annak oldalaival párhuzamosan, 5 sorban soronként 8 gömb érintkezik egymással, a vízszintes talajjal és a szélsők a tartóval is. Az így elhelyezett gömbök közötti „gödrökbe" újabb gömböket teszünk, ezáltal egy újabb szint jön létre. Ezt az eljárást folytatva újabb és újabb szintek keletkeznek, majd kialakul egy háztető alakú „prizma" (lásd *4. ábra*). Tekintsük az így keletkezett legfelső szintet elsőnek, és lefelé haladva sorrendben a többit második, harmadik, ..., és n. szintnek. Ekkor megfigyelhető, hogy az n. szinten n^2+3n darab gömb lesz.

b) Számítsuk ki, hogy hányadik szinten fejeződik be az eljárás, ha a „prizma" építését képzeletben lefelé csak addig folytatjuk, amíg a legalsó szinten legalább 2021 darab gömb lesz. (*4 pont*)

c) Igazoljuk, hogy ha az n. szinten pontosan n^2+3n darab gömb van, akkor az n szintű prizmában összesen $\frac{n(n+1)(n+5)}{3}$ gömb van. (*6 pont*)

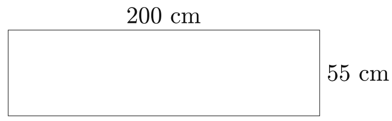
9. Nyári szünetben a 4 éves Peti és a 10 éves Kati nem járt óvodába, illetve iskolába. Napközben sokféle játékot játszottak, de a legnépszerűbb a céltáblára dobálás volt. A céltábla előtt bizonyos távolságra egy csíkot ragasztottak a padlóra, ezzel jelölve meg azt a helyet, ahonnan dobni lehet. Napközben, ha a család bármelyik tagja arra jár, véletlenszerűen dob a táblára egy „dobónyíllal". A céltáblájukon mind a négy körgyűrű szélessége a középen elhelyezkedő kis kör sugarával egyezik meg, és azonos nagyságú területet ugyanakkora valószínűséggel találnak el. Ha valaki eltalál egy körgyűrűt vagy a belső kört, akkor annyi pontot szerez, amekkora szám van arra a részre írva. Ha valaki a körvonalat találja el, akkor a nagyobb pontszám jár neki.

a) Mennyi a szerzett pontszámok várható értéke, ha nagyon sok dobást hajtanak végre? (*5 pont*)

Kati lemásolta a céltábla koncentrikus köreit egy papírra. Hatféle színezője volt. A középső kis körlapot és a négy körgyűrűt úgy színezte ki, hogy a kis körlap és a külső körgyűrű azonos színű, de bármelyik két szomszédos rész különböző színű lett.

b) Határozzuk meg a különböző színezések számát, ha egy színezéshez legalább 3 színt használt. (*7 pont*)

Az óvodában a 29 ballagó gyerek mindegyike kapott egy 10 cm sugarú körlapot, amire búcsúajándékként tetszőleges rajzot készíthettek. Az óvodapedagógusok úgy rakták ki az alkotásokat egy 200 cm széles és 55 cm magas parafalemezre, hogy bármelyik két körlap még részben sem fedte egymást, és egyetlen körlap se nyúlt túl az alábbi lemezen.



c) Adjuk meg a körlapok egy ilyen lehetséges elhelyezését. (*4 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2021/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán.*

a) $x-1\leqslant \dfrac{x^2-x+6}{x^2+x-6}$. (*6 pont*)

b) $\log_{0,5}(-x^2+6x-8)\leqslant 2+\log_{0,5}3$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) A tört nevezője nem lehet zérus, emiatt $x\neq 2$ és $x\neq -3$. Közös nevezőre hozzuk és nullára rendezzük az egyenlőtlenséget:

$$\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+x-6}\leqslant 0.$$

Szorzattá alakítjuk a bal oldalt:

$$\frac{x(x-3)(x+2)}{(x-2)(x+3)}\leqslant 0.$$