C. 1610. Egy egységsugarú kör AB átmérője és AC húrja 30°-os szöget zárnak be egymással. Jelölje B tükörképét a C pontra B'. Határozzuk meg a B' pontból a körhöz húzott érintők AB egyenessel való metszéspontjának B-től való távolságát.

Feladatok mindenkinek

C. 1611. Az első 21 pozitív egész szám közül néhányat kiválasztunk úgy, hogy bármely kettő különbségének az abszolút értékét véve ezen értékek között ne legyen két egyforma. Legfeljebb hány különböző érték jöhet létre? Adjunk konkrét példát is erre az esetre.

C. 1612. Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ konvex hétszög egy olyan körbe írható bele, amelynek középpontja a hétszög belsejében van. Bizonyítsuk be, hogy az A_1, A_3 és A_5 csúcsoknál lévő belső szögek összege kisebb 450°-nál.

C. 1613. Egy kosárlabda-bajnokságon n csapat vett részt. Bármelyik két csapat pontosan egyszer játszott egymással, döntetlen nem volt. A bajnokság végén az i-edik csapatnak x_i győzelme és y_i veresége volt ($i=1,2,\ldots,n$). Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2.$$

(*Horvát feladat*)

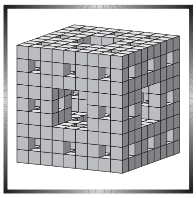
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1614. Egy 30 cm sugarú kör alakú tálca szélén elhelyezünk 12 darab 9 cm átmérőjű, felülről kör alakú muffint úgy, hogy a tálca szélét érintik, és a szomszédosak egyenlő távolságra helyezkednek el egymástól. Mekkora ez a távolság?

C. 1615. Juliska nagymamája minden hétfőn sütit süt. Mindig véletlenszerűen választ az általa ismert végtelen sok recept közül, amiknek a 60%-a csokis. Juliska elég válogatós: nagymama csokis sütijeinek csak a 90%-át szereti, a többi sütijének viszont csak 30%-át. Egy különleges hétfőn kétféle sütit is süt a nagymama. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy Juliska a két süti közül pontosan egyet szeret.

Beküldési határidő: 2020. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5102–5109.)



B. 5102. Adott a síkban n különböző pont, nem esik mind egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy van olyan önmagát nem metsző, zárt töröttvonal, amelynek az adott pontok a csúcsai. (Egy töröttvonal csúcsánál lehet 180°-os szög is.)

(*3 pont*)

B. 5103. Tegyük fel, hogy a, b, c, x, y és z olyan pozitív számok, amelyekre az $a^2+b^2=c^2$ és az $x^2+y^2=z^2$ egyenlőségek teljesülnek. Igazoljuk, hogy $(a+x)^2+(b+y)^2 \leqslant (c+z)^2$, és határozzuk meg, hogy mikor áll fenn az egyenlőség.

(*3 pont*) Javasolta: *Kiss Sándor* (Nyíregyháza)

B. 5104. Legyenek az ABC háromszög beírt körének érintési pontjai az oldalakon A_1, B_1 és C_1, a háromszög köréírt, illetve beírt körének sugara R és r. Mutassuk meg, hogy az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek területének aránya $r:2R$.

(*4 pont*)

B. 5105. Legyen n pozitív egész. Határozzuk meg azt a legkisebb k számot, ahány színnel bármilyen n csúcsú irányított egyszerű gráf élei színezhetők úgy, hogy ne legyen benne egyszínű kör.

(*4 pont*) Javasolta: *Szabó Kornél* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

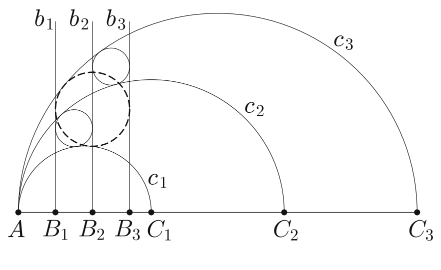
B. 5106. Felírjuk a táblára az $n+1, n+2, \ldots, 2n$ számokat ($n \geqslant 2$), majd a következő lépést ismételgetjük: kiválasztunk két számot (x és y) a táblán, letöröljük őket, és helyettük felírjuk az $x+y+\sqrt{x^2+y^2}$ és $x+y-\sqrt{x^2+y^2}$ számokat. Igazoljuk, hogy soha nem írhatunk a táblára 1,442-nél kisebb számot.

(*5 pont*)

B. 5107. Az $ABCD$ húrnégyszögben az átlók metszéspontja F, az AB és CD oldalegyenesek metszéspontja E, az EF szakasz felezőpontja G, a BF szakasz felezőpontja H, a BC oldal felezőpontja pedig I. Mutassuk meg, hogy $GFD\sphericalangle = GIH\sphericalangle$.

(*6 pont*)

B. 5108. Az A, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 pontok ebben a sorrendben egy egyenesen vannak. Az egyenes egyik oldalán, az egyenesre merőlegesen rajzoljuk meg a B_i pontból induló b_i félegyeneseket és az AC_i átmérőjű c_i félköröket ($i=1,2,3$). Igazoljuk, hogy ha a b_1, c_1, b_2, c_2 görbék által határolt tartományba és a b_2, c_2, b_3, c_3 által határolt tartományba egy-egy kört lehet írni, akkor a b_1, c_1, b_3, c_3 által határolt tartományba is kört lehet írni.



(*5 pont*)

B. 5109. Legyen

$$x_1 = 2, \quad x_2 = 7, \quad x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Van-e négyzetszám ebben a sorozatban?

(*6 pont*)

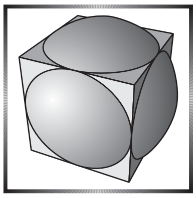
Javasolta: *George Stoica* (Saint John, Canada)

❄

Beküldési határidő: 2020. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (777–779.)



A. 777. Egy n pontú, síkbarajzolt véges $G(V, E)$ gráfra jelölje $x(e)$ azon élek számát, melyek keresztezik az e élt. Bizonyítandó, hogy

$$\sum_{e \in E} \frac{1}{x(e) + 1} \leqslant 3n - 6.$$

Javasolta: *Pálvölgyi Dömötör* (Budapest)

A. 778. Keressük meg az összes olyan d négyzetmentes pozitív egész számot, melyre megoldható az $x^2 + dy^2 = 2^n$ egyenlet a pozitív egész számok körében.

Javasolta: *Williams Kada* (Cambridge)

A. 779. Adott két rögzített kör, Ω és a belsejében ω. Az ω középpontja I. Az Ω körön mozog egy P pont. A P-ből ω-hoz húzott érintők második metszéspontja Ω-val Q, illetve R. Az IQR kör második metszéspontjai a PI, PQ és PR egyenesekkel rendre J, S, illetve T. A J tükörképe az ST egyenesre K. Mutassuk meg, hogy a különböző PK egyenesek egy ponton mennek át.

❄

Beküldési határidő: 2020. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄