egyenesen helyezkedhet el. A harmadik csúcs (R) ezen kívül rajta van az adott szakasz egyik végpontja mint középpont körül rajzolt, a másik adott oldal hosszúságával megegyező sugarú körvonalon. A párhuzamos egyenes és a körvonal egymást legfeljebb két pontban metszi (R_1, R_2) a *2. ábra* szerint. (A másik párhuzamos egyenes berajzolása, a végpontok és a körüljárás felcserélése nem vezet ezektől eltérő megoldásra.)

A kör középpontjában a PQ egyenesre állított merőleges egyenesre szimmetrikusan helyezkednek el az R_1Q és R_2Q szakaszok, ezért $PQR_1\sphericalangle = VQR_2\sphericalangle$, tehát a PQR_1 és PQR_2 szögek, ha nem egyenlők, akkor $180°$-ra egészítik ki egymást.

Most térjünk vissza az AMD és BCM háromszögek vizsgálatához. Előfordulhat-e itt, hogy az első ábrán α-val és γ-val jelölt szögek kiegészítő szögek? A szögek elhelyezkedése alapján $\alpha = ACD\sphericalangle < BCD\sphericalangle$ és $\gamma = DBC\sphericalangle < ABC\sphericalangle$, így ekkor

$$180° = \alpha + \gamma < BCD\sphericalangle + ABC\sphericalangle$$

lenne, ez pedig ellentmondás, mert az $ABCD$ trapéz B-hez és C-hez tartozó szögei $180°$-ra egészítik ki egymást. Az α és γ szögek tehát ugyanakkorák.

Innen a megoldás már néhány lépésben befejezhető. Beláttuk tehát, hogy $DAM\triangle \cong MBC\triangle$. Az AMD és BMC szögek csúcsszögek, ezek is egyenlők, vagyis $ADM\sphericalangle = BMC\sphericalangle = AMD\sphericalangle = BCM\sphericalangle$. Ez a két háromszög tehát egyenlő szárú is. A DMC háromszög is egyenlő szárú, ennek a háromszögnek külső szöge a $DMA\sphericalangle$, amely ezek szerint 2α nagyságú. Az AMD egyenlő szárú háromszög szögeire

$$MAD\sphericalangle + AMD\sphericalangle + MDA\sphericalangle = \alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°.$$

Innen $\alpha = 36°$, végül az $ABCD$ trapéz szögei $72°$, $72°$, $108°$, $108°$.

Fleiner Zsigmond (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 9. évf.) dolgozata alapján

Összesen 67 dolgozat érkezett. 4 pontot kapott 46, 3 pontot 11 tanuló. 2 pontos 3, 1 pontos 7 tanuló dolgozata.

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1609–1615.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1609. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán:

$$x + y + \frac{x}{y} = 19,$$

$$\frac{x(x+y)}{y} = 60.$$

C. 1610. Egy egységsugarú kör AB átmérője és AC húrja 30°-os szöget zárnak be egymással. Jelölje B tükörképét a C pontra B'. Határozzuk meg a B' pontból a körhöz húzott érintők AB egyenessel való metszéspontjának B-től való távolságát.

Feladatok mindenkinek

C. 1611. Az első 21 pozitív egész szám közül néhányat kiválasztunk úgy, hogy bármely kettő különbségének az abszolút értékét véve ezen értékek között ne legyen két egyforma. Legfeljebb hány különböző érték jöhet létre? Adjunk konkrét példát is erre az esetre.

C. 1612. Az $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ konvex hétszög egy olyan körbe írható bele, amelynek középpontja a hétszög belsejében van. Bizonyítsuk be, hogy az A_1, A_3 és A_5 csúcsoknál lévő belső szögek összege kisebb 450°-nál.

C. 1613. Egy kosárlabda-bajnokságon n csapat vett részt. Bármelyik két csapat pontosan egyszer játszott egymással, döntetlen nem volt. A bajnokság végén az i-edik csapatnak x_i győzelme és y_i veresége volt ($i=1,2,\ldots,n$). Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2.$$

(*Horvát feladat*)

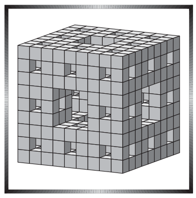
Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1614. Egy 30 cm sugarú kör alakú tálca szélén elhelyezünk 12 darab 9 cm átmérőjű, felülről kör alakú muffint úgy, hogy a tálca szélét érintik, és a szomszédosak egyenlő távolságra helyezkednek el egymástól. Mekkora ez a távolság?

C. 1615. Juliska nagymamája minden hétfőn sütit süt. Mindig véletlenszerűen választ az általa ismert végtelen sok recept közül, amiknek a 60%-a csokis. Juliska elég válogatós: nagymama csokis sütijeinek csak a 90%-át szereti, a többi sütijének viszont csak 30%-át. Egy különleges hétfőn kétféle sütit is süt a nagymama. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy Juliska a két süti közül pontosan egyet szeret.

Beküldési határidő: 2020. június 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5102–5109.)



B. 5102. Adott a síkban n különböző pont, nem esik mind egy egyenesre. Mutassuk meg, hogy van olyan önmagát nem metsző, zárt töröttvonal, amelynek az adott pontok a csúcsai. (Egy töröttvonal csúcsánál lehet 180°-os szög is.)

(*3 pont*)