[3] G. Domokos, Z. Lángi and T. Szabó, *On the equilibria on finely discretized curves and surfaces,* Monatsh. Math., **168** (2012), 321–345.

[4] Gnädig Péter, Honyek Gyula és Vígh Máté, *333 furfangos feladat fizikából,* Typotex Kiadó, Budapest, 2014.

[5] Lángi Zs. *Konvex poliéderek stabil lapjai*, Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok, **69**(5) (2019), 258–264.

[6] E. Steinitz,*Über die Eulersche Polyderrelationen,* Arch. Math. Phys., **11** (1906), 86–88.

Domokos Gábor
domokos@iit.bme.hu

Kovács Flórián
kovacs.florian@epito.bme.hu

Lángi Zsolt
zlangi@math.bme.hu

Regős Krisztina
regoskriszti@gmail.com

Varga Péter Tamás
petercobbler@gmail.com

Megoldásvázlatok a 2020/4. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a* $\sqrt{2x+6} = 9 - x$ *egyenletet a valós számok halmazán.* (*5 pont*)

b) *Oldjuk meg a* $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3} \frac{4}{9}$ *egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.* (*3 pont*)

c) *Oldjuk meg a* $\sin^2 4x + \sin 4x + \cos^2 4x = 2$ *egyenletet a* $[0; \pi]$ *halmazon.* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $x \geqslant -3$, értékkészlete miatt $x \leqslant 9$, tehát $-3 \leqslant x \leqslant 9$. Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát: $2x+6 = 81 - 18x + x^2$. Az egyenletet rendezve: $x^2 - 20x + 75 = 0$, melynek gyökei: $x_1 = 15$ és $x_2 = 5$.

A $[-3; 9]$ intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, így csak $x_2 = 5$ megoldása az egyenletnek.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > 0$. A 0,3-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton csökkenése miatt: $x \leqslant \frac{4}{9}$, melyet az értelmezési tartománnyal összevetve a megoldáshalmaz: $\left]0; \frac{4}{9}\right]$.

c) Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin^2 4x + \cos^2 4x = 1$, ezért a megoldandó egyenlet: $\sin 4x = 1$, ahonnan $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ebből az egyenlet megoldásai a keresett halmazon: $x = \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ebből következik, hogy a kapott gyökök jók.

2. *Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az* $y+2x=x^2$ *egyenletű parabola.*

a) Írjuk fel a parabola $E(2;0)$ *pontjában húzott érintő egyenletét.* (*3 pont*)

b) Számítsuk ki a parabola tengelypontjának koordinátáit és határozzuk meg a parabola paraméterét. (*4 pont*)

A koordináta-rendszerben a $(-4;0)$, $(4;0)$, $(4;8)$ *és* $(-4;8)$ *csúcspontokkal megadott téglalapot a fenti parabola három részre vágja.*

c) Mekkora a középső rész területe? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Az E-ben húzott érintő meredekségét a parabola deriváltfüggvényének az $x=2$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg. $f'(x)=2x-2$, így az érintő meredeksége $f'(2)=2$.

Az érintő egyenlete: $y=2x-4$.

b) Teljes négyzetté alakítással: $y=(x-1)^2-1$, ahonnan a parabola tengelypontja $T(1;-1)$. A parabola paraméterére: $\frac{1}{2p}=1$, így $p=\frac{1}{2}$.

c) A megadott parabola a téglalapot a $(0;0)$, $(2;0)$, $(4;8)$ és $(-2;8)$ pontokban metszi. A $[-2;0]$ intervallumon az x tengely és a parabolaív közötti terület nagysága:

$$\int_{-2}^{0}(x^2-2x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-2}^{0}=-\left(-\frac{8}{3}-4\right)=\frac{20}{3}.$$

A parabola tengelyes szimmetriája miatt a $[-2;0]$ és a $[2;4]$ intervallumokon a parabola alatti terület megegyezik, így a középső táblarész területét megkapjuk, ha egy 48 egység területű téglalapból kivonjuk a $[-2;0]$ és a $[2;4]$ intervallumhoz tartozó parabola alatti területet. Tehát a keresett terület:

$$T=48-2\cdot\frac{20}{3}=\frac{104}{3}.$$

3. *a*) *Egy mértani sorozat* 1011*-edik tagja megegyezik a sorozat nullától különböző hányadosával. Számítsuk ki a sorozat első* 2019 *tagjának a szorzatát.* (*6 pont*)

b) Jelölje x *és* y *ebben a sorrendben egy mértani sorozat két egymást követő tagját. Tudjuk, hogy* $x\neq 0$ *és az* $(x;y)$ *számpár megoldása a*

$$100^x-2\cdot 10^x\cdot 10^{2y}+10^{4y}\leqslant 0$$

egyenlőtlenségnek. Számítsuk ki a sorozat hányadosát. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Jelölje a mértani sorozat hányadosát q $(q\neq 0)$. Ekkor a feladat szövege alapján: $a_{1012}=q^2$, $a_{1013}=q^3$, $\ldots$, $a_{2019}=q^{1009}$ adódik.

Hasonlóan az indexek csökkentésével: $a_{1010}=1$, $a_{1009}=\frac{1}{q}$, $a_{1008}=\frac{1}{q^2}$, $\ldots$, $a_1=\frac{1}{q^{1009}}$.

Az előzőeket felhasználva a keresett szorzat:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_{1009} \cdot a_{1010} \cdot a_{1011} \cdot \ldots \cdot a_{2018} \cdot a_{2019} =$$

$$= \frac{1}{q^{1009}} \cdot \frac{1}{q^{1008}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{q} \cdot 1 \cdot q \cdot \ldots \cdot q^{1008} \cdot q^{1009} = 1.$$

II. megoldás. Jelölje a mértani sorozat első tagját a_1, hányadosát q ($q \neq 0$). Ekkor a sorozat tagjait felírva: $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2, \ldots, a_{2019} = a_1 \cdot q^{2018}$. Az első 2019 tagot összeszorozva a szorzat értéke:

$$a_1^{2019} \cdot q^{1+2+3+4+\ldots+2018} = a_1^{2019} \cdot q^{2\,037\,171}.$$

A feladat feltétele szerint: $a_1 \cdot q^{1010} = q$, ahonnan ($q \neq 0$ miatt) $a_1 = \frac{1}{q^{1009}}$. A keresett szorzat:

$$\left(\frac{1}{q^{1009}}\right)^{2019} \cdot q^{2\,037\,171} = \frac{1^{2019}}{q^{2\,037\,171}} \cdot q^{2\,037\,171} = 1.$$

b) Mivel $100^x = (10^x)^2$ és $10^{4y} = (10^{2y})^2$, így $100^x - 2 \cdot 10^x \cdot 10^{2y} + 10^{4y} = (10^x - 10^{2y})^2 \leqslant 0$. $(10^x - 10^{2y})^2 \leqslant 0$ pontosan akkor teljesül, ha $10^x - 10^{2y} = 0$, vagyis $10^x = 10^{2y}$, azaz (a 10-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x = 2y$. (Mivel $x \neq 0$, ezért) $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

4. *A VONALAZÓ nevű játékot két ember játszhatja.*

A játék menete

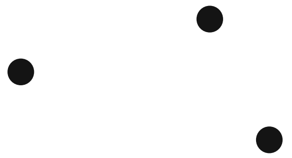
Egy papírlapra a játékosok néhány pontot rajzolnak. A kezdő játékos húz egy vonalat valamelyik pontból egy másik pontig, és a vonalra egy újabb pontot rajzol. Így ebből az új pontból két vonal indul ki. A két játékos felváltva húzza a vonalakat a pontok között és a játékos a megrajzolt vonalra mindig egy új pontot rajzol a következő szabályok betartásával:

1. *Mindegyik vonal alakja tetszőleges lehet, de nem metszheti önmagát és nem metszhet egyetlen korábban megrajzolt vonalat sem.*
2. *Az összekötő vonal két pontot köt össze és nem mehet át más korábban megrajzolt ponton.*
3. *Két pontot csak egyetlen vonal köthet össze.*
4. *Egyetlen pontból sem indulhat ki háromnál több vonal.*

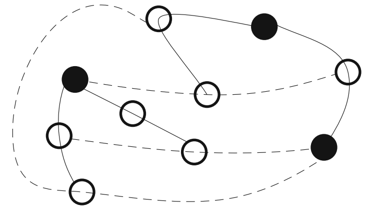
Az veszít, aki már nem tud húzni egy vonalat sem.

a) *A* 4.1. ábrán 3 *pont látható. Rajzoljuk bele az ábrába – a fenti feltételek figyelembevételével – annak a játéknak az egyes lépéseit, amelyben pontosan* 4 *új pont szerepel. A kezdő játékos vonala legyen folytonos, az ellenfélé pedig szaggatott. Az új pontokat üres karikával jelölje.* (*3 pont*)

A 4.2. ábrán *egy játszma lépéseit lehet nyomon követni. A kezdő játékos vonalait a folytonos, az ellenfél lépéseit pedig a szaggatott vonalak jelzik.*



4.1. ábra



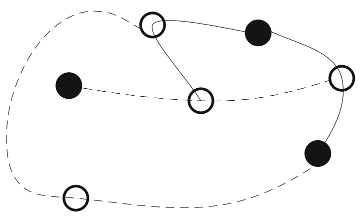
4.2. ábra

b) Számozzuk be az üres karikával jelzett új pontokat a keletkezésük sorrendjében és döntsük el, melyik játékos nyerte a játszmát. (*4 pont*)

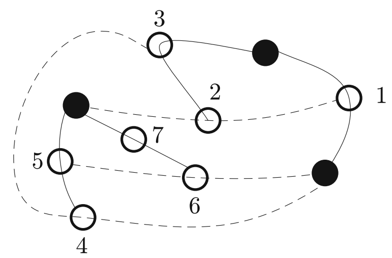
Levente Csabával már nagyon sokszor játszotta a VONALAZÓ nevű játékot. Annak a valószínűsége, hogy Levente 10 *játékból legalább* 8*-at megnyer kétszer akkora, mint annak, hogy pontosan* 8*-at nyer meg. (Tételezzük fel, hogy Levente mindegyik játszmában ugyanakkora valószínűséggel nyer.)*

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Levente megnyer egy játszmát? (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Egy lehetséges megoldás van a *4.3. ábrán.*



4.3. ábra



4.4. ábra

b) A *4.4. ábrán* látható sorrend miatt a kezdő játékos nyerte a játszmát.

c) Jelölje p annak a valószínűségét, hogy Levente megnyer egy játszmát. Ekkor annak a valószínűsége, hogy Csaba nyer $1-p$.

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 8-szor nyer:

$$\binom{10}{8}\cdot p^8\cdot(1-p)^2.$$

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 9-szer nyer:

$$\binom{10}{9}\cdot p^9\cdot(1-p)^1.$$

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 10-szer nyer:

$$\binom{10}{10}\cdot p^{10}\cdot(1-p)^0.$$

A feladat szerint:

$$\binom{10}{8}\cdot p^8\cdot(1-p)^2+\binom{10}{9}\cdot p^9\cdot(1-p)^1+\binom{10}{10}\cdot p^{10}\cdot(1-p)^0=$$

$$=2\cdot\binom{10}{8}\cdot p^8\cdot(1-p)^2.$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva p^8-nal, és kiszámolva a binomiális együtthatókat:

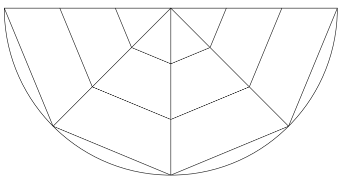
$$45\cdot(1-p)^2+10p\cdot(1-p)+p^2=90\cdot(1-p)^2.$$

Ebből: $54p^2-100p+45=0$, melynek gyökei $p_1\approx 1{,}081$ és $p_2\approx 0{,}771$.

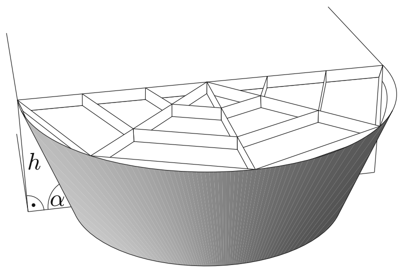
Mivel a valószínűség legfeljebb 1, így Levente kb. 0,771 valószínűséggel nyer meg egy játszmát.

II. rész

5. *Egy zöldségárus a friss áruját a pulton félkörívben helyezi el. Az egyes tartományokat falécek határolják. A félkör az* 5.1. ábrán *látható módon négy egybevágó körcikkre van osztva. Az ábrán látható összes egyenes szakasz és a félkörív is falécből készült. A szomszédos sugarakat összekötő elválasztó lécek párhuzamosak és három egyenlő részre osztják a sugarakat. A félkör sugara* 1,5 *méter.*



5.1. ábra



5.2. ábra

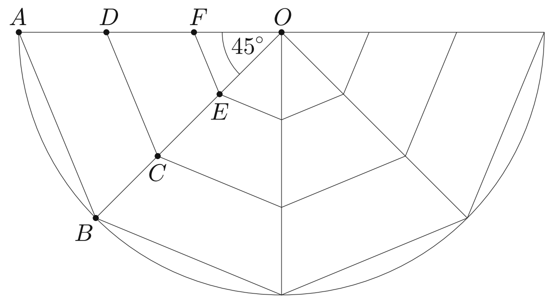
a) Hány méter falécre van szükség a pult kialakításához? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

Egy másik zöldségesnek megtetszett az ötlet és bódéjához egy félbevágott csonkakúp alakú bővítményt tervezett az ábra *szerint, ahol h a bővítmény magasságát, α pedig a félbevágott csonkakúp bódéval érintkező alkotójának a bódé alsó, vízszintes élével bezárt szögét jelöli. A bővítmény méretei: $h=100$ cm, $\alpha=70°$, a felső kör sugara pedig* 1,5 m (5.2. ábra).

c) Mennyi anyag szükséges a szürkével jelölt palástrész beborításához, ha az illesztések miatt plusz 4% anyaggal kell számolni? Válaszunkat tized négyzetméterre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Az *5.3. ábrán* látható félkörív hossza $1{,}5\cdot\pi\approx 4{,}712$ (m).

Mivel a körcikkek egybevágók, ezért az $AOB\sphericalangle=45°$.



5.3. ábra

Az AB szakasz hosszát koszinusztétellel számolva:

$$AB^2 = 1{,}5^2 + 1{,}5^2 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}5 \cdot \cos 45^\circ,$$

ahonnan $AB \approx 1{,}148$ (m). Az OAB és OFE, valamint az ODC és OFE háromszögek hasonlósága miatt a hasonlóság arányának felhasználásával

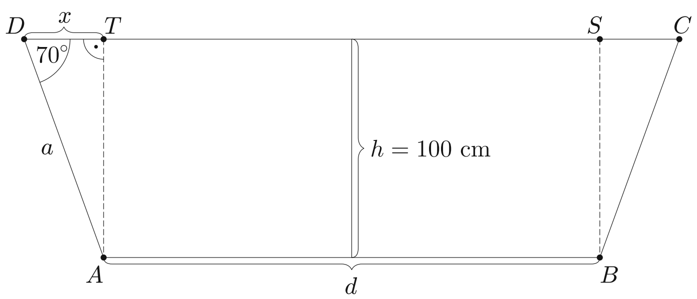
$$CD = \frac{2 \cdot AB}{3} \approx 0{,}765 \text{ (m)} \quad \text{és} \quad EF = \frac{AB}{3} \approx 0{,}383 \text{ (m)}.$$

Mindegyik keresztlécből 4 db van, a sugárból pedig öt, így a keresett hosszúság:

$$4{,}712 + 5 \cdot 1{,}5 + 4 \cdot (1{,}148 + 0{,}765 + 0{,}383) = 21{,}396 \text{ (m)}.$$

Tehát 22 méter falécre van szükség.

b) Az *5.4. ábra* jelöléseit használva az ATD derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{100}{x}$, ahonnan $x \approx 36{,}40$ (cm), és $\sin 70^\circ = \frac{100}{a}$, melyből $a \approx 106{,}42$ (cm).



5.4. ábra

Az előbbiek miatt $d = 300 - 2x \approx 227{,}20$ (cm), így $r = \frac{d}{2} \approx 113{,}60$ (cm).

A félbevágott csonkakúp alakú palást felszíne:

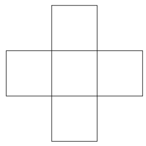
$$A = \frac{(r + R) \cdot a \cdot \pi}{2} \approx 44\,064{,}5 \text{ (cm}^2\text{)},$$

így a szükséges anyagmennyiség: 4,6 m^2.

6. *Egy* 8×8*-as sakktábla mezőire* 1*-től* 64*-ig beírtuk a természetes számokat a* 6.1. ábra *szerint. Ezután készítettünk egy olyan alakzatot, amely* 5 *darab, a sakktábla mezőivel egybevágó négyzetből áll* (6.2. ábra). *Az így elkészített alakzatot véletlenszerűen ráhelyezzük a sakktáblára úgy, hogy annak mind az öt négyzete lefedjen egy-egy mezőt a táblán.*

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

6.1. ábra



6.2. ábra

a) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lefedett számok összege osztható* 3*-mal?* (*6 pont*)

Egy másik alkalommal a sakktábla mezőire 64 *pozitív egész számot írtunk. Közülük az egyik egyjegyű, a többi kétjegyű szám. Tudjuk, hogy a felírt számok mediánja és egyetlen módusza a* 68*, ami kétszer szerepel a táblán. Tudjuk továbbá, hogy a számok átlaga* 67,5*, a terjedelmük pedig* 93.

b) *Mely számok szerepelnek a táblán?* (*10 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A „kereszt" összesen $6 \cdot 6 = 36$-féleképpen helyezhető rá a sakktáblára (összes eset száma). Ha a bal felső sarokba rakjuk a keresztet, akkor a 2; 9; 10; 11 és 18 számokat fedi le, melyek összege 50, aminek a hármas maradéka 2.

Bárhová is rakjuk le a keresztet (a szabálynak megfelelően), ha eggyel jobbra csúsztatjuk az összeg mindig 5-tel, a hármas maradék pedig 2-vel nő. Ha a keresztet eggyel lefelé csúsztatjuk, akkor az összeg mindig 40-nel, a hármas maradék pedig 1-gyel nő. Az előbbiek miatt a maradékok alapján összesen 12 olyan elhelyezés van, amikor a lefedett számok összege osztható 3-mal (kedvező esetek száma).

Így a keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

II. megoldás. A „kereszt" alakzatot csak a belső négyzetekre tudjuk ráhelyezni. Ezt $6 \cdot 6 = 36$-féleképpen tudjuk megtenni (összes eset száma).

Ha a lefedett számok közül a középsőt x-szel jelöljük, akkor a tőle balra lévőt $x-1$, jobbra lévőt $x+1$, felette lévőt $x-8$, alatta lévőt $x+8$ jelöli. Ezek összege $5x$. Az összeg pontosan akkor osztható 3-mal, ha x osztható 3-mal. A 6×6-os belső négyzetben 12 db 3-mal osztható szám van (kedvező esetek száma).

Így a keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

b) Mivel 69; 70; 71; ...; 99 összesen 31 darab szám, és a módusz valamint a medián is 68, a 64 számot sorbarendezve a két középső $x_{32} = x_{33} = 68$. A terjedelem miatt $x_1 = 6$. A 64 szám átlaga 67,5, ezért a táblára írt számok összege 4320.

A második 32 szám összege $\frac{68+99}{2} \cdot 32 = 2672$. Így

$$s = 6 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{31} + 68 = 4320 - 2672 = 1648,$$

vagyis $x_2 + x_3 + \ldots + x_{31} = 1574$.

A legnagyobb összeg, ami az x_2; x_3; ...; x_{31} helyén álló számokkal elérhető lenne: $38 + 39 + \ldots + 67 = 1575$. Ez csak 1-gyel több a valóságos összegnél, tehát valamelyik számot 1-gyel csökkenteni kell. Ez a szám csak a 38 lehet, különben két módusza lenne az táblára írt számoknak.

A keresett számok tehát: 6; 37; 39; 40; ...; 67; 68; 68; 69; 70; ...; 98; 99.

7. *Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(11; -2)$ és a $B(2; 1)$ pontokat összekötő szakasz, továbbá az $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 20$ egyenletű kör. Az AB szakaszt a koordináta-rendszer origója körül $+90°$-kal elforgatjuk.*

a) Számítással igazoljuk, hogy a forgatással kapott szakasz *egy pontban metszi a megadott kört.* (*4 pont*)

Egy r és R sugarú kör kívülről érinti egymást. A körök középpontjain áthaladó egyenes ezeket a köröket az érintési ponton kívül az A és B pontokban metszi. Az egyik közös külső érintő érintési pontjai E és F.

b) Igazoljuk, hogy az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. (*6 pont*)

c) Számítsuk ki a közös külső érintőszakasz hosszát. (*6 pont*)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* Az A pont elforgatottjának koordinátái $A'(2; 11)$, a B ponté pedig $B'(-1; 2)$. Mivel $36 + 64 = 100 > 20$, ezért A' a kör külső pontja. Mivel $9 + 1 = 10 < 20$, ezért B' a kör belső pontja.

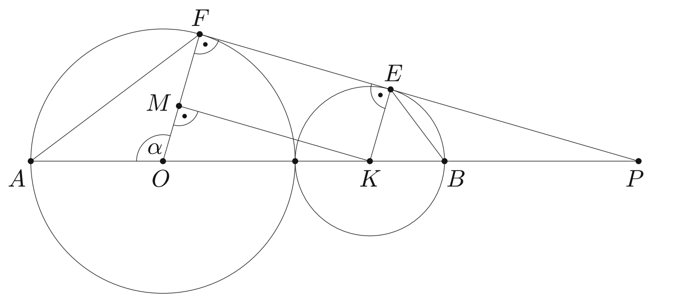
Tehát az $A'B'$ szakasz egy pontban metszi a megadott kört.

II. megoldás. Az A pont elforgatottjának koordinátái $A'(2; 11)$, a B ponté pedig $B'(-1; 2)$, ezért az elforgatott pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = 3x + 5$. Az előbbi egyenes metszéspontjai a megadott körrel $P(0; 5)$ és $Q(-2; -1)$.

A metszéspont akkor van az elforgatott szakaszon, ha a pontok koordinátáira teljesül, hogy $-1 < x < 2$ és $2 < y < 11$, ami csak a P pontra igaz, így az $A'B'$ szakasz valóban egy pontban metszi a megadott kört.

b) Az $ABEF$ négyszög akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögeinek összege $180°$. Az *ábra* jelöléseit használva legyen az $AOF\sphericalangle = \alpha$, ekkor $OAF\sphericalangle = OFA\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

Hasonló meggondolással megmutatható, hogy $KBE\sphericalangle = BEK\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, így az $ABEF$ négyszög A, B, E és F csúcsánál lévő belső szögek rendre $90° - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, $90° + \frac{\alpha}{2}$ és $180° - \frac{\alpha}{2}$. A szemközti szögek összege tehát $180°$, így a négyszög valóban húrnégyszög.



c) A K pontból párhuzamost húzva az EF közös érintővel a megrajzolt szakasz és OF metszéspontja legyen M. Ekkor az OMK derékszögű háromszögben

$$MK^2 = EF^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2,$$

ahonnan $EF = 2\sqrt{Rr}$.

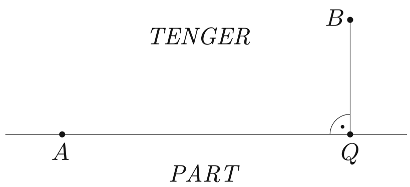
8. *Egy szabadulószobának három bejárata van. Egy* 6 *fős társaság tagjai bármelyik ajtón, de csak kettesével léphetnek be. A belépés sorrendje nem számít.*

a) Hányféle módon juthatnak be a szobába a társaság tagjai? (*4 pont*)

A szabadulószoba egyik feladata így szólt: adott tíz látszólag egyforma lakat illetve tíz kulcs. Mindegyik lakatra igaz, hogy pontosan egy kulcs nyitja. A játékszabály szerint a játékosnak mind a 10 *lakatot ki kell nyitnia. Nevezzük próbálkozásnak egy kulcs és egy lakat összeillesztését, akár nyitja a kulcs a lakatot, akár nem.*

b) Módszeresen dolgozva legfeljebb hány próbálkozás kell a feladat megoldásához? (*3 pont*)

Egy „túlélő" műsorban az egyik feladat az volt, hogy a lehető leggyorsabban jussanak el a versenyzők a tengerparton lévő A pontból a tengeren lévő B pontba, mert akkor védettséget szereznek a következő megmérettetésre. Tudjuk, hogy a parton csak futhatnak, a tengerben csak úszhatnak, segédeszközöket (farönk, evező stb.) nem használhatnak. Az ábra szerint a pálya méretei: $AQ = 4$ km, $BQ = 1$ km, *valamint* $AQB\sphericalangle = 90°$. *(A partvonalat az egyszerűség kedvéért tekintsük egyenesnek.) Az egyik versenyző* 8 km/óra *sebességgel képes futni a homokban és* 2 km/óra *sebességgel úszni a tengerben.*



c) Hány km *futás után ugorjon a versenyző a tengerbe, ha a lehető legrövidebb időn belül szeretne eljutni A-ból B-be?* (*9 pont*)

Megoldás. a) A 6 fős társaság tagjai közül a három pár $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} (= 90)$-féleképpen választható ki úgy, hogy azok sorrendje is figyelembe van véve. Mivel egy adott 3 pár ebben éppen $3!(= 6)$-szor szerepel, így összesen $90 : 6 = 15$-féleképpen választható ki a 3 pár. Ezek bármelyike a 3 ajtón $3^3 = 27$-féleképpen mehet be, tehát a keresett sorrendek száma $15 \cdot 27 = 405$.

b) Az első lakat kulcsa legfeljebb 9 próbálkozással, a másodiké legfeljebb 8, a harmadiké legfeljebb 7, és így tovább, a kilencedik lakaté 1 próbálkozás után megtalálható. A tizediknél már nem kell próbálkozni, mert a megmaradt kulcs ahhoz tartozik. Tehát legfeljebb

$$9+8+7+6+\ldots+2+1=45$$

próbálkozással megoldható a feladat.

c) *I. megoldás.* Jelölje U azt a pontot, ahol a versenyzőnek a vízbe kell vetnie magát (*8.1. ábra*). Ekkor az $UQ=x$ jelöléssel a BUQ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $BU=\sqrt{x^2+1}$. Az út megtételéhez szükséges idő:

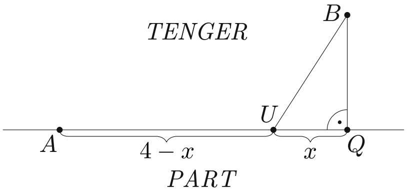
$$t(x)=\frac{4-x}{8}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{2}, \quad \text{ahol} \quad 0\leqslant x\leqslant 4.$$

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $t'(x)=0$.

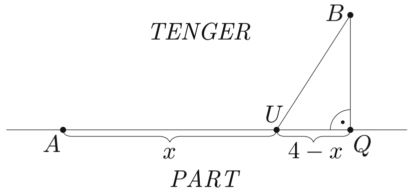
$$t'(x)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x, \quad \text{ebből} \quad \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{8},$$

ahonnan $60x^2-4=0$, melynek gyökei $x_1\approx 0{,}258$ és $x_2\approx -0{,}258$ (m). ($x_2\approx -0{,}258$ nem lehetséges, $x_1\approx 0{,}258$ megfelel.) Az x_1 helyen a t' függvény negatívból pozitívba megy át, ezért itt t-nek minimuma van.

Tehát a versenyzőnek kb. 3,742 km-t kell futnia, mielőtt a tengerbe veti magát.



8.1. ábra



8.2. ábra

II. megoldás. Jelölje U azt a pontot, ahol a versenyzőnek a vízbe kell vetnie magát (*8.2. ábra*). Ekkor az $UQ=4-x$ jelöléssel a BUQ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$BU=\sqrt{x^2-8x+17}\,.$$

Az út megtételéhez szükséges idő:

$$t(x)=\frac{x}{8}+\frac{\sqrt{x^2-8x+17}}{2}, \quad \text{ahol} \quad 0\leqslant x\leqslant 4.$$

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $t'(x)=0$.

$$t'(x)=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2-8x+17)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x-8), \quad \text{ebből}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-8x+17}+4x-16}{8\sqrt{x^2-8x+17}}=0,$$

ahonnan $15x^2-120x+239=0$, melynek gyökei $x_1\approx 4{,}258$ és $x_2\approx 3{,}742$ (m). ($x_1\approx 4{,}258$ nem lehetséges, $x_2\approx 3{,}742$ megfelel.) Az $x_2\approx 3{,}742$ helyen a t' függvény negatívból pozitívba megy át, ezért itt t-nek minimuma van.

Tehát a versenyzőnek kb. 3,742 km-t kell futnia, mielőtt a tengerbe veti magát.

9. *Egy öttagú család (apa, anya és a három gyerek) életkorának összege ebben az évben 100 év. Az anya 6 évvel fiatalabb a férjénél. 6 év múlva a középső gyerek kétszerannyi idős lesz, mint most. Amikor a legkisebb gyerek született, abban az évben (a kicsi megszületése előtt) a négytagú család átlagéletkora 22,5 év volt. Az anya az első gyermekét 22 éves korában szülte.*

a) Hány éves most az anyuka? (*7 pont*)

Vasárnap délután a családtagok egy új társasjátékot próbálnak ki. A társasjáték játéktábláján 100 mező kapcsolódik egymás után, melyeket a tervezők 1-től 100-ig megszámoztak. A táblán a második mezőtől kezdve minden 2. mező zöld színű (a többi fehér), a harmadik mezőtől kezdve minden 3. mezőn egy állat képe, a negyedik mezőtől kezdve minden 4. mezőn egy fa képe, és az ötödik mezőtől kezdve minden 5. mezőn egy vadászház képe látható. A játékszabály szerint, ha egy mezőn két figura szerepel, akkor az erre a mezőre lépő játékos egyszer kimarad a játékból.

b) Hány olyan fehér színű mező van a táblán, amelyre lépve a játékos egyszer kimarad a játékból? (*3 pont*)

A társasjáték játékszabálya szerint a játékosok egy fehér és egy sárga színű szabályos dobókockával dobnak egyszerre, és a lépésük száma a dobott számok összege. Ha a dobás összege 6, akkor a játékosok újra dobhatnak, és a lépések száma a játékos által dobott négy szám összege lesz. (Például: Ha a játékos első dobása 2 és 5 volt, akkor a 7-es mezőre lép. Ha viszont a játékos első dobása 2 és 4, az új dobása 3 és 5 volt, akkor a játékos a 14-es mezőre léphet.) Ha egy mező sorszáma 10-zel osztható, akkor erre rálépve, a játékos a bábujával visszalép a legközelebbi, fát ábrázoló mezőre.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos bábuja kezdéskor a 10-es mezőre lép? (Kezdéskor a játékosok bábui az 1-es mező előtt állnak.) (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje az apa életkorát most x, a középső gyerekét y. Ekkor a szöveg alapján az anya $x-6$, a középső gyerek pedig az $y+6=2y$ egyenletből 6 éves.

A legkisebb gyerek születésének évében a két nagyobb gyerek és a két szülő életkorának összege $22{,}5\cdot 4=90$ év. A legkisebb gyerek születése óta az öttagú család életkorának összege 10 évvel nőtt, tehát a legkisebb gyerek most 2 éves.

Ha az anya most $x-6$ éves, akkor a legidősebb gyerek $x-6-22=x-28$ éves. Mivel az életkorok összege 100 év, ezért $2+6+(x-28)+x+(x-6)=100$, ahonnan $x=42$, így az anyuka 36 éves.

b) 1-től 100-ig a 3 és az 5 páratlan közös többszöröseit keressük. Mivel $[3;5]=$ $=15$, így a 15., 45. és 75. mező ilyen, azaz a keresett mezők száma 3.

c) A játékos csak úgy léphet a 10-es mezőre, ha az első két dobás összege 10, vagy az első két dobás összege 6 és az utána következő két dobás összege 4.

Az első két dobás összege úgy lehet 10, ha a játékos a $(4;6)$, $(6;4)$, vagy $(5;5)$ párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

Az első két dobás összege úgy lehet 6, ha a játékos az $(1;5)$, $(5;1)$, $(2;4)$, $(4;2)$ vagy $(3;3)$ párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{5}{36}$.

Az első két dobást követő dobás összege úgy lehet 4, ha a játékos az $(1;3)$, $(3;1)$ vagy $(2;2)$ párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

(A két egymás utáni dobás egymástól független esemény), így ennek a valószínűsége $\frac{5}{36}\cdot\frac{3}{36}$. A keresett valószínűség:

$$\frac{3}{36}+\frac{5}{36}\cdot\frac{3}{36}=\frac{41}{432}\approx 0{,}095.$$

Varga Péter
Budapest

C gyakorlat megoldása

C. 1552. *Bizonyítsuk be, hogy ha* $0<a<1$ *és* $0<b<1$, *akkor*

$$\log_a\frac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\frac{2ab}{a+b}\geqslant 1.$$

Javasolta: *Róka Sándor* (Nyíregyháza)

Megoldás. Vegyük a és b harmonikus közepét:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{2}{\frac{a+b}{ab}}=\frac{2ab}{a+b}.$$

Látható, hogy a feladatban a logaritmusok argumentumaként szereplő értékeket kapjuk.

Legyen c egy valós szám, melyre teljesül, hogy $0<c<1$. Ekkor az $f(x)=\log_c(x)$ függvény szigorúan monoton csökkenő, de helyettesítési értéke a $]0,1[$ tartományon végig pozitív marad, hiszen $x=1$-re $f(x)=f(1)=\log_c(1)=0$. Mivel a függvény szigorúan monoton csökken, ezért ha $x_1\leqslant x_2$, akkor $f(x_1)\geqslant f(x_2)$, és egyenlőség csak akkor állhat fenn, ha $x_1=x_2$.

A nevezetes közepekre való össszefüggés szerint két pozitív szám mértani közepe nem kisebb azok harmonikus közepénél. Ez a-ra és b-re a következőt jelenti: $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2ab}{a+b}$. Mivel a és b 1-nél kisebb pozitív számok, ez (a fentiek alapján) azt jelenti, hogy

$$\log_a\left(\sqrt{ab}\right)\leqslant\log_a\left(\frac{2ab}{a+b}\right)\quad\text{és}\quad\log_b\left(\sqrt{ab}\right)\leqslant\log_b\left(\frac{2ab}{a+b}\right).$$