Térbe kilépő bizonyítások, ráadás[1]

Gergonne megoldása az Apollóniusz-feladatra

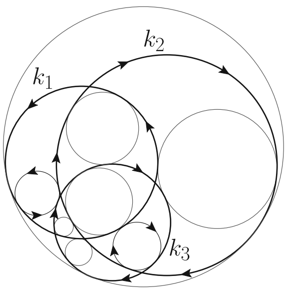
Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A pergai Apollóniusztól[2] származtatják a következő klasszikus feladatot.

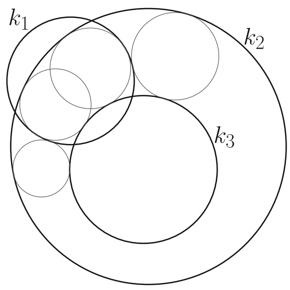
Apollóniusz-feladat: *Adott három kör, k_1, k_2 és k_3. Szerkesszük meg az összes olyan m kört, amely k_1, k_2 és k_3 mindegyikét érinti.*

A feladatnak sokféle speciális és elfajuló esete létezik: valamelyik kör helyett egyenes (végtelen sugarú kör) is lehet, illetve a kör egy ponttá fajulhat (nulla sugarú kör), ilyenkor az érintés helyett azt követeljük meg, hogy m átmenjen az illető ponton. Néhány nagyon speciális esettel már általános iskolában találkoztunk, mint például három adott ponton átmenő, vagy a három adott egyenest érintő körök megszerkesztése.

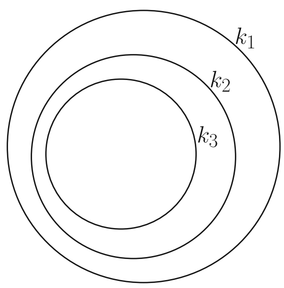
Szeretjük kikötni, hogy k_1, k_2 és k_3 *általános helyzetű* legyen, vagyis a középpontjaik ne essenek egy egyenesre, ne menjenek át egy ponton, ne érintsék egymást, a sugaraik különbözőek legyenek, és a három körnek ne legyen közös érintője. Ismert, hogy általános helyzetű körök esetén az m kör nyolc- vagy négyféle lehet, és az is elfordulhat, hogy nincs ilyen érintő kör; egy-egy ilyen elrendezést lerajzoltam az *1a.–1c. ábrákon.*



1a. ábra



1b. ábra



1c. ábra

A megoldásokat (az érintő köröket) csoportokba rendezhetjük úgy, hogy a köröket és egyeneseket irányítjuk, és csak olyan érintést engedünk meg, amikor az egymást érintő köröknek és egyeneseknek az iránya is megegyezik. Az *1.a* ábrán a nyilacskák jelzik az egyik lehetséges irányítást; a nyolc érintő kör közül kettő felel meg

[1] A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

[2] Pergai Apollóniusz (Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος) görög matematikus és csillagász, Kr.e. 2–3. század.

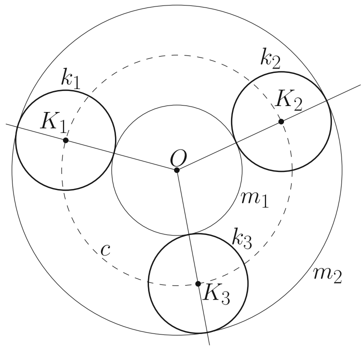
ennek a szigorúbb feltételnek. Világos, hogy csak annak van jelentősége, hogy k_1, k_2, k_3 közül mely párok azonos vagy ellentétes irányításúak, tehát a megoldásokat négy (esetleg üres) csoportba osztottuk. Érdemes a feladatot így is megfogalmazni:

> **Irányított Apollóniusz-feladat:** *Adott három irányított kör, k_1, k_2 és k_3. Szerkesszük meg az összes olyan m irányított kört, amely k_1, k_2 és k_3 mindegyikét érinti úgy, hogy az érintési pontokban a körök iránya azonos.*

Az Apollóniusz-feladatra sokféle megoldás ismert; talán a legszebb Gergonne[3] szerkesztése. A cikksorozatnak ebben az utolsó utáni részében az ő szerkesztését szeretném bemutatni.

Az azonos sugarú körök esete

Ha k_1, k_2 és k_3 irányítása azonos (mondjuk pozitív), és a sugaruk ugyanakkora, akkor könnyű dolgunk van. Legyen a három kör középpontja K_1, K_2, illetve K_3, a közös sugár r. Rajzoljuk meg a K_1, K_2, K_3 pontokon átmenő c kört; ennek középpontja legyen O, sugara r_0. (Előfordulhat, hogy $r_0 < r$.) Könnyű meggondolni, hogy a feladatnak két megoldása van, az O középpontú, $|r_0 - r|$ sugarú m_1 kör és az $r_0 + r$ sugarú m_2 kör (*2. ábra*).



2. ábra

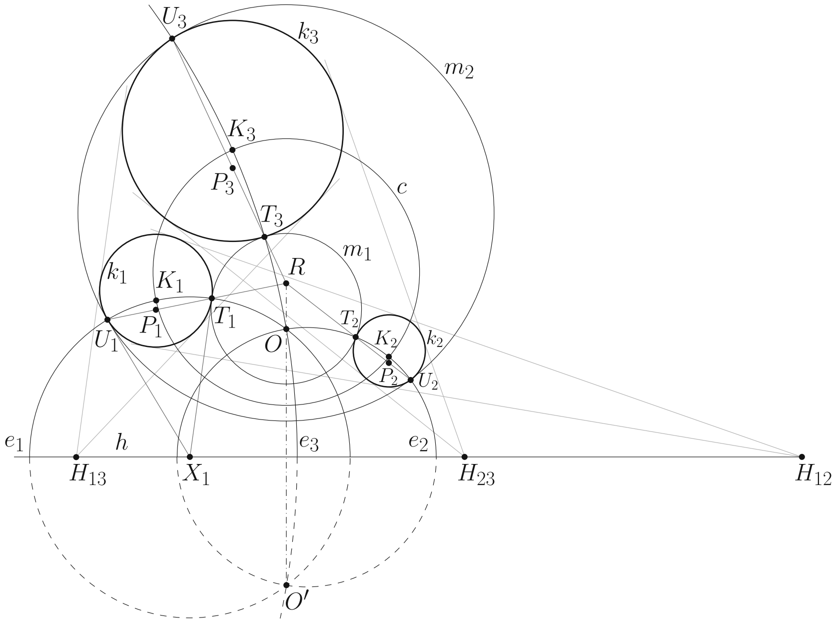
Az általános esetet megpróbálhatjuk visszavezetni az egyenlő sugarú esetre, ehhez hasznos és kézenfekvő eszköz az inverzió: kereshetünk egy olyan inverziót, vagy inverziók egymás utánját, amely előbb két, majd végül mindhárom kört ugyanakkora sugarú, és azonos irányítású körbe képezi. Helyette inkább egy másik irányt szeretnék mutatni, amely nem fog minden esetben működni, de jól bemutatja a Gergonne-féle szerkesztést, és hogy milyen matematikai érdekességek vannak mögötte.

Azonos sugarú körök a félsíkmodellben

A cikksorozat 6. részében már láttunk példákat arra, hogy a Poincaré-féle félsíkmodellben különböző méretűnek *látszó* körvonalak mégis lehetnek „ugyanakkorák”: két körvonal akkor „ugyanakkora”, ha a külső hasonlósági pontjuk a félsíkmodell határára esik. Nosza, szerkesszük meg az irányított k_1, k_2 és k_3 köreink párjainak hasonlósági pontjait; legyen k_i és k_j hasonlósági pontja H_{ij}. A Monge-tételből tudjuk, hogy a három hasonlósági pont egy h egyenesre esik; ha szerencsénk van, akkor a h-nak ugyanazon az oldalán van k_1, k_2 és k_3; ezt a félsíkot fogjuk a félsíkmodellnek tekinteni. A k_i kör „középpontja” a modellben legyen K_i, és legyen r a közös „sugár”. Rajzoljuk meg ismét a K_1, K_2, K_3 pontokon átmenő c körvonalat; ismét csak ha szerencsénk van, akkor c teljes egészében a félsík belsejébe esik, vagyis egy hiperbolikus „kör”. Legyen c modellbeli „középpontja” az O pont. A feladat

[3] Joseph Diez Gergonne francia matematikus, 1771–1859.

két megoldását, az m_1 és m_2 köröket úgy kapjuk, hogy ugyanezzel a középponttal rajzolunk egy r-rel kisebb, és egy r-rel nagyobb sugarú kört (*3. ábra*).



3. ábra

Azt gondolhatnánk, hogy ezzel vége, megszerkesztettük a két érintő kört, de inkább tanulmányozzuk tovább az ábrát; a lényeg csak ezután következik. Jelöljük T_i-vel, illetve U_i-vel a k_i érintési pontját az m_1, illetve az m_2 körrel. A T_i pont a k_i és az m_1 külső hasonlósági pontja, az U_i pedig k_i és m_2 külső hasonlósági pontja; a Monge-tétel miatt a T_iU_i egyenes átmegy m_1 és m_2 belső hasonlósági pontján; jelöljük ezt R-rel.

Rajzoljuk meg az O és K_i pontokat összekötő e_i „egyeneseket” is, amelyek a határra merőleges félkörnek látszanak. (Ezzel már kilenc kört zsúfoltunk össze az ábrán.) A félkörök meghosszabbításai átmennek az O pont h-ra vonatkozó tükörképén, az O' ponton. A c, m_1, m_2 körök közös „középpontja” az O pont, ezért a látszólagos középpontjaik az OO' egyenesre esnek, így az R pont is az OO' egyenesen van.

Az első fontos észrevételünk, hogy az R pontnak a k_1, k_2, k_3 és e_1, e_2, e_3 körökre vonatkozó hatványa ugyanaz: az ROO' egyenes az e_1, e_2, e_3 körök közös hatványvonala, k_i és e_i hatványvonala pedig az RT_iU_i egyenes. Tehát: *az R pont a k_1, k_2, k_3 körök hatványpontja.*

Legyen most X_i az e_i félkör középpontja. Az e_i félkör átmegy k_i „középpontján”, ezért merőleges k_i-re; emiatt az X_iT_i és X_iU_i szakaszok a k_i érintői. A k_i körben a T_iU_i egyenes az X_i pont polárisa; mivel X_i a h egyenesen van, *az RT_iU_i egyenes átmegy a h egyenes k_i-re vonatkozó pólusán* (az ábrán P_i-vel jelöltem).

Gergonne szerkesztése az Apollóniusz-feladatra

Az előbbi okoskodásból elhagyhatjuk a félsíkmodellt, a c és az e_i köröket, és leolvashatjuk Gergonne módszerét.

> **Gergonne szerkesztése:** *Legyen k_1, k_2 és k_3 hatványpontja R, jelölje k_i és k_j hasonlósági pontját H_{ij}. A három hasonlósági pont egyenese legyen h, és a k_i körben legyen h pólusa a P_i pont. Az irányított Apollóniusz-feladatnak akkor létezik megoldása, mégpedig pontosan kettő, ha mindegyik k_i kört elmetszi a megfelelő RP_i egyenes, és a két metszéspont éppen a k_i két érintési pontja a két megoldás körrel.*

Egy igazán jó szerkesztési eljárástól elvárjuk, hogy az összes megoldást megtalálja, és lehetőleg ne produkáljon hamis megoldásokat, amelyeket tovább kell válogatnunk. A fenti szerkesztésben van egy kis bizonytalanság: a módszer mindegyik k_i körön megadja a két megoldás érintési pontjait, de azt még el kell döntenünk, hogy mely érintési pontok tartoznak ugyanahhoz a körhöz.

Gergonne eljárása megszerkeszti a megoldásokat

Előbb azt fogjuk ellenőrizni, hogy ha az irányított Apollóniusz-feladatnak létezik megoldása, akkor Gergonne módszere megszerkeszti ezt a megoldást, mégpedig két különböző kört, és a két megoldás érintési pontjainak megkülönböztetésére is mutatunk egy egyszerű módszert.

Tegyük fel, hogy valamilyen m_1 irányított kör megoldása az irányított Apollóniusz-feladatnak; m_1 és k_i érintési pontját jelölje T_i.

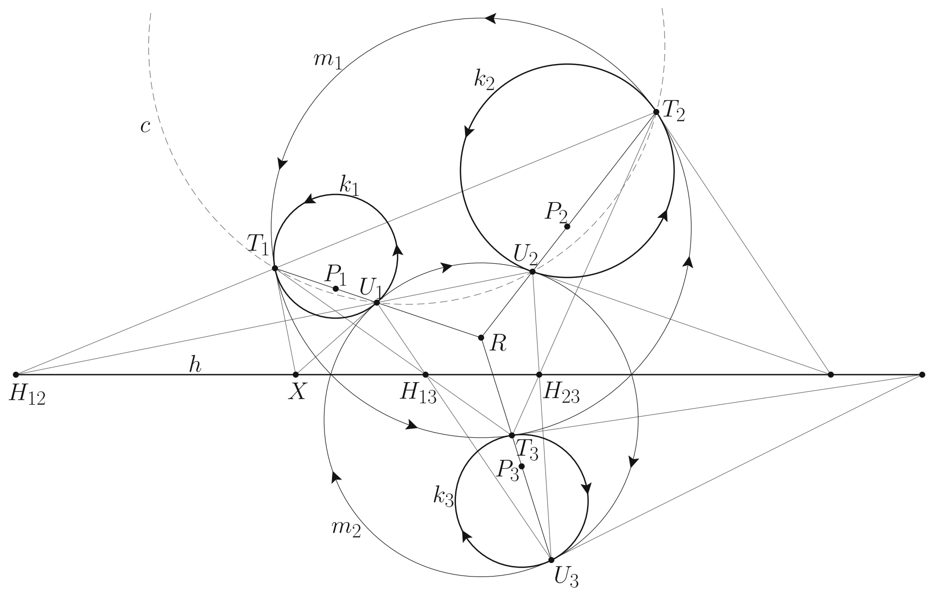
Először megszerkesztjük a másik megoldást. Legyen az R hatványpontnak a k_1, k_2, k_3 körökre vonatkozó közös hatványa λ. Az R középpontú, λ paraméterű inverzió[4] a k_1, k_2, k_3 köröket önmagukra képezi; $\lambda > 0$ esetén az irányításukat megfordítja. Jelöljük T_i inverzét U_i-vel, és m_1 inverzét m_2-vel; ha $\lambda > 0$, akkor m_2 legyen m_1-gyel ellentétes irányítású. Az inverzió érintéstartósága miatt az m_2 kör érinti mindegyik k_i kört az U_i pontban, és az irányításuk is megegyezik. Tehát m_2 egy másik megoldása a feladatnak.

Az m_1, k_i és k_j irányított körök páronként vett hasonlósági pontjai T_i, T_j és H_{ij}; ezek a Monge-tétel szerint egy egyenesen vannak; ugyanígy, az m_2, k_i és k_j körök páronként vett hasonlósági pontjai, az U_i, U_j és H_{ij} is egy egyenesen vannak (*4. ábra*).

Az m_2 szerkesztése miatt $RT_1 \cdot RU_1 = RT_2 \cdot RU_2 = \lambda$, ezért T_1, T_2, U_1, U_2 egy c körön van. A c és m_1 hatványvonala a T_1T_2 egyenes, a c és m_2 hatványvonala az U_1U_2 egyenes. A két hatványvonal metszéspontja a H_{12} pont, tehát H_{12} hatványa az m_1 és m_2 körökre ugyanakkora. Ugyanez igaz a H_{13} és a H_{23} pontokra is; ebből látjuk, hogy a h egyenes az m_1 és az m_2 hatványvonala.

Most húzzuk meg k_1 közös érintőit az m_1 és m_2 egyenesekkel; ezek metszéspontja legyen X. A T_1X egyenes a k_1 és m_1 hatványvonala, az U_1X egyenes pedig

[4]Pozitív λ esetén a $\sqrt{\lambda}$ sugarú körre vonatkozó inverzió, negatív λ esetén a $\sqrt{|\lambda|}$ sugarú körre vonatkozó inverzió tükörképe.



4. ábra

a k_1 és m_2 hatványvonala, tehát X rajta van az m_1 és m_2 hatványvonalán is, ami – mint láttuk – a h. Másrészt a T_1U_1 egyenes az X pont polárisa a k_1 körben; mivel h átmegy az X ponton, az X polárisa is átmegy a h pólusán, a P_1 ponton. Tehát a P_1 pont az RT_1U_1 egyenesen van. Ugyanígy láthatjuk, hogy az RT_2U_2 és az RT_3U_3 egyenes is átmegy P_2-n, illetve P_3-on.

Ezzel ellenőriztük, hogy Gergonne módszere tényleg megszerkeszti a megoldásokat. Az is látszik, hogy a hat érintési pontot hogyan kell két hármas csoportba osztanunk: ha már eldöntöttük, hogy mondjuk a k_1 kör és az RP_1 egyenes két metszéspontja közül melyik a T_1 és melyik az U_1, akkor a további négy metszéspont közül T_j az, amelyik a $H_{1j}T_1$ egyenesen, U_j pedig az, amelyik a $H_{1j}U_1$ egyenesen van ($j = 2, 3$).

Ha számítógéppel szeretnénk ábrát rajzolni a szerkesztéshez, akkor T_1 és U_1 kijelölése után a T_j és az U_j pontot az RP_j egyenes és a $H_{1j}T_1$, illetve RP_j és $H_{1j}U_1$ metszéspontjaként érdemes definiálnunk.

Gergonne eljárása csak a megoldásokat szerkeszti meg

A megfordítás is igaz: amit Gergonne módszere megszerkeszt, azok valóban megoldások.

A k_1 kör és az RP_1 egyenes két metszéspontját betűzzük meg T_1-gyel és U_1-gyel. A két megoldást úgy fogjuk megszerkeszteni, hogy a k_1 kört a T_1, illetve az U_1 pontból felnagyítjuk. A T_2, U_2, T_3, U_3 pontokat máshogy fogjuk definiálni, de végül ugyanazok a pontok lesznek.

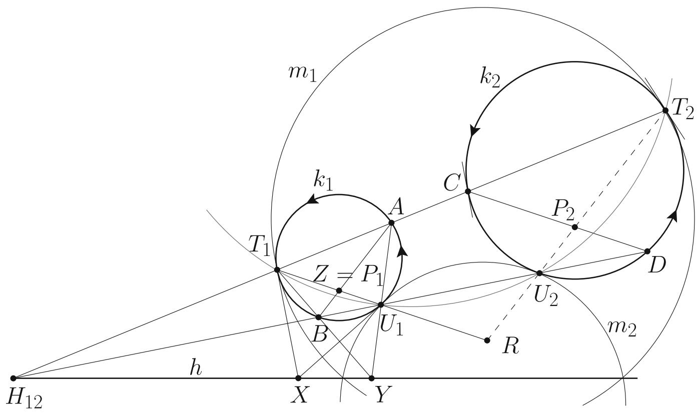
Legyen a k_1 kör második metszéspontja a $H_{12}T_1$ és a $H_{12}U_1$ egyenessel A, illetve B. Először megmutatjuk, hogy az AB egyenes átmegy a P_1 ponton. Vizsgáljuk a k_1 körbe írt T_1U_1AB négyszöget a k_1-re vonatkozó polaritás szerint. Legyen az AU_1 és BT_1 egyenesek metszéspontja Y, az AB és T_1U_1 egyenesek metszéspontja pedig Z.

A $H_{12}YZ$ háromszög autopoláris, ezért a Z pont polárisa a $H_{12}Y$ egyenes, és ezen rajta van a T_1U_1 egyenes pólusa, az X pont is. Tehát Z polárisa a h egyenes, és $Z = P_1$.

A k_1 kört középpontosan a k_2 körbe nagyíthatjuk a H_{12} pontból; az A, B, T_1, U_1 pontok képét jelöljük rendre T_2, U_2, C-vel, illetve D-vel; a P_1 pont képe P_2. Mivel

$$1 = \frac{H_{12}T_1 \cdot H_{12}A}{H_{12}U_1 \cdot H_{12}B} = \frac{H_{12}T_1 \cdot H_{12}T_2}{H_{12}U_1 \cdot H_{12}U_2},$$

a T_1, U_1, T_2, U_2 pontok egy körön vannak. A k_1, k_2 és a $T_1U_1T_2U_2$ körök hatványpontja R, emiatt a $T_2U_2P_2$ egyenes átmegy R-en is. Tehát T_2 és U_2 valóban a k_2 kör és az RP_2 egyenes két metszéspontja (*5. ábra*).



5. ábra

Vegyük észre, hogy a T_1P_1A és CP_2T_2 háromszögek hasonlók, mert a megfelelő oldalaik párhuzamosak; a két háromszöget ugyanaz a H_{12} középpontú nagyítás viszi egymásba, mint a k_1 és a k_2 kört; emiatt a k_1 kör T_1-ben és A-ban húzott érintői párhuzamosak a k_2 kör C-ben, illetve T_2-ben húzott érintőivel.

Nagyítsuk a T_1 pontból a k_1 kört $\frac{T_1R}{T_1P_1}$-szeresére; a k_1 képe legyen az m_1 irányított kör: az m_1 kör a T_1 pontban érinti k_1-et, és T_2-ben érinti k_2-t, és az irányuk is megegyezik.

Hasonlóan, nagyítsuk az U_1 pontból a k_1 kört $\frac{U_1R}{U_1P_1}$-szeresére, az így kapott kör legyen m_2. A T_i és U_i pontok felcserélésével ugyanígy kapjuk, hogy az m_2 kör az U_1 pontban érinti k_1-et, és U_2-ben érinti k_2-t.

Ugyanezt elmondhatjuk a k_2 helyett a k_3 körrel is, így definiáljuk a T_3 és U_3 pontokat. Mivel az m_1 és m_2 definíciójában csak a k_1 kör és az R, P_1, T_1 és U_1 pontok szerepelnek, azt kapjuk, hogy ugyanaz az m_1 és m_2 kör k_3-at érinti a T_3, illetve az U_3 pontban.

Feladatok

1. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyek átmennek két adott ponton, és érintenek egy adott egyenest.

2. Szerkesszük meg azokat a köröket, amelyek átmennek egy adott ponton, és érintenek két adott egyenest.

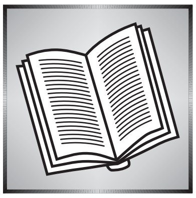
3. Az ABC háromszögbe írt kör a BC oldalt a D pontban érinti. A BC oldalhoz hozzáírt kör középpontját D-vel összekötő egyenes a beírt kört másodszor a T pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a BTC kör érinti a beírt kört.

4. A körökre illesztett kúpokkal igazoljuk, hogy az irányított Apollóniusz-feladatnak nulla vagy két megoldása van.

Fuss el véle

Ideje ezt a hosszúra nyúlt sorozatot befejezni, a tanévnek is a végére értünk. Mindenkinek köszönöm a figyelmet és a türelmet; különösen azoknak, akik végigolvasták, és a feladatokon is gondolkodtak.

Kós Géza



Konvex poliéderek egyensúlyi pontjai

1. Bevezetés

Jelen folyóirat egy korábbi számában megjelent cikkben [5] vízszintes síkra helyezett, saját tömeggel rendelkező konvex poliéderek stabil egyensúlyi helyzeteire vonatkozó eredményeket ismerhettünk meg. Ezen cikkben, az *egyensúlyi pont* fogalmának ismertetése után, többek között két állítás bizonyítását olvashatjuk:

- Minden homogén tömegeloszlású (röviden: homogén) tetraédernek legalább két stabil egyensúlyi pontja van (azaz van két olyan lapja, melyen a test elbillenés nélkül megáll), illetve
- létezik olyan homogén 19 lapú konvex poliéder, melynek pontosan egy stabil egyensúlyi pontja van.

Érdemes megjegyezni, hogy az első állítás megtalálható, mint a Gnädig Péter, Honyek Gyula és Vígh Máté szerkesztette, 333 furfangos feladat fizikából című feladatgyűjtemény F. 120-as feladata [4]. Az említett [5] cikk végén a szerző négy kérdést fogalmaz meg konvex poliéderek egyensúlyi pontjaira vonatkozóan. Ezek közül az első három kérdés stabil egyensúlyi pontokra vonatkozik, és a cikkben megtalálhatjuk a felvetett problémákkal kapcsolatos ismereteink összefoglalását is. Jelen írásunkban többek között azzal a (negyedikként közölt) kérdéssel kívánunk részletesen foglalkozni, amely csúcsán – tehát nem stabil módon – egyensúlyozott tetraéderre vonatkozik: