**Megoldás.** Az egyik pohár tele van vízzel, a másikban pedig pontosan annyival kevesebb víz van, amennyit a pingponglabda kiszorít. A kiszorított víz súlya megegyezik a pingponglabdára ható felhajtóerő ellenerejével, tehát a két pohár (vízzel és labdával együtt) egyforma súlyú. Ezek szerint a két pohár *ugyanakkora* erővel nyomja az asztalt.

*Cynolter Dorottya* (Budapest, Veres Pálné Gimn., 9. évf.)

76 dolgozat érkezett. Helyes 60 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 2, hiányos (1 pont) 9, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

**G. 694.** *Egy éppen* 100 kg *tömegű rakéta a világűrben másodpercenként* 100 g *égésterméket lövell ki. A gáz* 1 km/s *sebességgel hagyja el a rakéta fúvókáját. Mekkora a rakéta gyorsulása?*

(*3 pont*)

**Megoldás.** Az éppen $m=100$ kg tömegű, $v$ sebességű rakétát $\Delta t=1$ s alatt $\Delta m=0{,}1$ kg tömegű égéstermék hagyja el a rakétához képest $u=1$ km/s sebességgel, és ennek következtében a rakéta sebessége $\Delta v$ értékkel megváltozik. Az impulzusmegmaradás törvénye szerint

$$mv=(m-\Delta m)(v+\Delta v)-\Delta m(u-v),\quad \text{amiből}$$

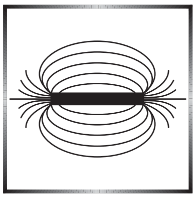
$$\Delta v=\frac{u}{m-\Delta m}\Delta m\approx\frac{u}{m}\Delta m.$$

A rakéta gyorsulása tehát

$$a=\frac{u}{m}\,\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{1000\ \mathrm{m/s}}{100\ \mathrm{kg}}\cdot\left(0{,}1\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}\right)=1\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

*Egyházi Hanna* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. és Koll., 10. évf.)

51 dolgozat érkezett. Helyes 33 megoldás. Kicsit hiányos (2 pont) 13, hiányos (1 pont) 2, hibás 3 dolgozat.



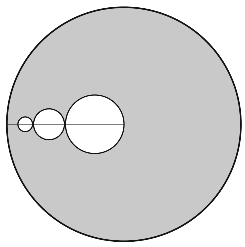
## Fizika feladatok megoldása

**P. 5165.** *Egységsugarú, homogén, kör alakú lemezből az* ábrán *látható módon kivágunk egymást kívülről érintő, rendre* $\frac14,\frac18,\frac1{16},\ldots$ *sugarú, középpontjukkal az egyik sugárra illeszkedő köröket. Hol lesz a maradék idom tömegközéppontja, ha*

*a) csak a legnagyobb kört vágjuk ki;*

*b) a két legnagyobb kört vágjuk ki;*

*c) nagyon sok kört vágunk ki?*



(*5 pont*) Közli: *Tupi Zoltán,* Budapest

**Megoldás.** A kis körök kivágása előtt az alakzat tömegközéppontja a nagy kör középpontjában volt. Egyre több kis kör kivágása után a maradék idom tömegközéppontja egyre inkább jobbra mozdul el.

Az eredeti kör sugara 1, területe $T=\pi$. Az $n$-edik kis kör sugara $x_n = (1/2)^{n+1}$, területe $T_n=(1/4)^{n+1}\pi$. A forgatónyomatékok egyensúlyából rendre kiszámolhatjuk, hogy mekkora $y_n$ távolsággal tolódik el $n$ darab kis kör kivágása után a maradék lemez tömegközéppontja. (A maradék rész forgatónyomatéka az eredeti lemez középpontjára vonatkoztatva nyilván ugyanakkora, mint amennyi a kivágott részek forgatónyomatéka volt.)

*a*) Ha csak a legnagyobb kört vágjuk ki, akkor (a lemez vastagságával, anyagának sűrűségével és $g$-vel egyszerűsítve) az alábbi összefüggéshez jutunk:

$$T_1x_1=(T-T_1)y_1,$$

ahonnan megkapjuk, hogy $y_1=\frac{1}{60}\approx 0{,}017$ egység.

*b*) Két kördarab eltávolítása után a maradékra felírható:

$$T_1x_1+T_2(2x_1+x_2)=(T-T_1-T_2)y_2,$$

ahonnan $y_2=\frac{13}{472}\approx 0{,}028$ egység eredmény adódik.

*c*) Ha nagyon sok (formálisan $n\to\infty$) kört távolítunk el a lemezből, akkor a maradék rész tömegközéppontjának $y$-nal jelölt elmozdulására az alábbi összefüggést írhatjuk fel:

$$T_1x_1+T_2(2x_1+x_2)+T_3(2x_1+2x_2+x_3)+\ldots=(T-T_1-T_2-T_3-\ldots)y.$$

A jobb oldalon szereplő összeg:

$$\left(\pi-\frac{\pi}{16}-\frac{\pi}{64}-\frac{\pi}{256}-\ldots\right)y=\left(1-\sum_{i=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}\right)\pi\,y=\frac{11}{12}\pi\,y.$$

A forgatónyomatéki egyenlet bal oldala:

$$\pi\left(\frac{1}{64}+\frac{5}{512}+\frac{13}{4095}+\frac{29}{32\,768}+\ldots\right)=\pi\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2^k-3}{8^k}=\frac{5}{168}\pi.$$

Innen már adódik, hogy a keresett távolság

$$y=\frac{5}{168}\cdot\frac{12}{11}=\frac{5}{154}\approx 0{,}032 \text{ egység.}$$

*Téglás Panna* (Révkomárom, Selye János Gimn., 10. évf.)

44 dolgozat érkezett. Helyes 20 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 3, hiányos (1–3 pont) 16, hibás 3, nem versenyszerű 2 dolgozat.

**P. 5174.** *Egy illegális laboratórium ólomkonténerében olyan sugárzó anyagot találtak, amelyből másodpercenként* $2\cdot 10^{14}$ *elektron lép ki. A rendőrségi jegyzőkönyvek szerint* 53 *évvel ezelőtt eltűnt* 221 g *cézium a közeli kutatóintézetből. Lehet-e a megtalált anyag az akkor eltűnt preparátum, ha azóta csak raktározták?* (*A cézium felezési ideje* 30,17 év.*)

(*4 pont*) *Tematikus feladatgyűjtemény,* Szeged

**Megoldás.** Ha abból a feltételezésből indulunk ki, hogy a megtalált radioaktív anyag tényleg az 53 éve eltulajdonított cézium-137 preparátum, akkor először ki kell számolnunk, hogy mára mennyi (hány atom) maradt belőle. Az eredeti mennyiség:

$$\frac{221\ \mathrm{g}}{136{,}9\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}}=1{,}614\ \mathrm{mol},$$

vagyis kezdetben a radioaktív atomok száma:

$$N_0=(1{,}614\ \mathrm{mol})\cdot\left(6{,}022\cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}}\right)=9{,}721\cdot 10^{23}.$$

Ebből a mennyiségből – ha valóban az ellopott, $T$ felezési idejű céziumról van szó – mára, $t$ idő elteltével

$$N(t)=N_0\,0{,}5^{t/T}=(9{,}721\cdot 10^{23})\cdot 0{,}5^{\frac{53\ \text{év}}{30{,}17\ \text{év}}}=2{,}88\cdot 10^{23}$$

atom maradt. Ennek a mennyiségnek az aktivitása:

$$A(t)=N(t)\,\frac{\ln 2}{T}=2{,}88\cdot 10^{23}\,\frac{\ln 2}{30{,}17\cdot 365{,}24\cdot 24\cdot 60\cdot 60\ \mathrm{s}}=2{,}1\cdot 10^{14}\ \mathrm{Bq},$$

ami (a kerekítésekből adódó pontossággal) éppen megegyezik a megtalált anyag aktivitásával.

Az ólomkonténerben tárolt radioaktív preparátum tehát *lehet* az 53 éve ellopott cézium, ennek lehetőségét nem zárhatjuk ki. Természetesen a számolt és a mért aktivitások egyenlősége *nem bizonyítja*, hogy a régen eltűnt preparátumot találták meg. Az is elképzelhető, hogy egy olyan – máshonnan származó – anyagot találtak, aminek az aktvitása éppen megegyezik a feladatban megadott értékkel.

A Cs-137-es izotópot mesterségesen állítják elő, a természetben csak olyan nagy katasztrófák után található meg, mint Csernobil és Fukusima.

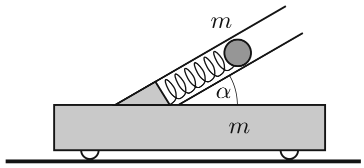
*Bagu Bálint* (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn. és Koll., 10. évf.)

52 dolgozat érkezett. Helyes 36 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 8, hibás 3 dolgozat.

---

*A kitűzött feladatban hibás adat jelent meg. Ugyancsak hibás a Négyjegyű függvénytáblázatokban a cézium-137 felezési ideje.

**P. 5178.** *Vízszintes talajon lévő, $m$ tömegű kiskocsira elhanyagolható tömegű, $\alpha = 30°$-os szögben beállított rugós puskát rögzítettünk, amely egy $m$ tömegű lövedéket lő ki két esetben. Az első esetben a kocsi rögzített, a második esetben szabadon mozoghat. A lövedék függőleges irányú emelkedési magassága az első esetben $h_1$, a második esetben $h_2$. Határozzuk meg a $h_2/h_1$ arányt!*




(*5 pont*) Közli: *Kotek László,* Pécs

**Megoldás.** Legyen az összenyomott rugó rugalmas energiája $E_0$! Ez először mozgási, majd helyzeti és mozgási energiává alakul.

*1. eset (rögzített kiskocsi)*

Legyen a kilövés pillanatában (amikor a rugó energiája már nullára csökkent) a lövedék sebessége $v_1$, ennek vízszintes irányú komponense $v_{1x}$, függőleges irányú komponense pedig $v_{1y}$ (tehát $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2$). Mivel a kocsihoz képest $\alpha = 30°$-os szögben lőttük ki a lövedéket, és a kocsi nem tud elmozdulni, a lövedék asztalhoz viszonyított sebességének a vízszintessel bezárt szöge is $\alpha$, tehát

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \text{azaz} \qquad v_{1x}^2 = 3 \cdot v_{1y}^2.$$

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$E_0 = \frac{1}{2} m\, v_1^2 = \frac{1}{2} m\, (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) = \frac{1}{2} m\, (3v_{1y}^2 + v_{1y}^2) = 2m\, v_{1y}^2.$$

Az emelkedési magasságot a lövedék függőleges irányú kezdősebessége határozza meg:

$$\frac{1}{2} m v_{1y}^2 = mgh_1,$$

vagyis

$$h_1 = \frac{v_{1y}^2}{2g} = \frac{E_0}{4mg}.$$

*2. eset (a kiskocsi szabadon elmozdulhat)*

Legyen a kilövés pillanatában (amikor a rugó energiája már nullára csökkent) a lövedék sebessége $v_2$, ennek vízszintes irányú komponense $v_{2x}$, függőleges irányú komponense $v_{2y}$ (tehát $v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$), a kocsi sebessége pedig $v$ (ez vízszintes irányú, a lövedékével ellentétes irányban).

A kiskocsi+lövedék rendszerre nem hat vízszintes irányú külső erő, így a lendületmegmaradás törvénye alapján

$$0 = mv_{2x} - mv, \qquad \text{vagyis} \qquad v = v_{2x}.$$

Ezek szerint a lövedék vízszintes irányú sebessége *a kiskocsihoz képest* $v_{2x} + v = 2v_{2x}$. Mivel a kocsihoz képest $\alpha = 30°$-os szögben lőttük ki a lövedéket, fennáll:

$$\frac{v_{2y}}{2v_{2x}} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{ahonnan} \quad v_{2x}^2 = \frac{3}{4}v_{2y}^2$$

következik.

Az energiamegmaradás törvénye alapján:

$$E_0 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_{2x}^2 + v_{2y}^2\right) + \frac{1}{2}mv_{2x}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}v_{2y}^2 + v_{2y}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\frac{3}{4}v_{2y}^2\right) = \frac{5}{4}mv_{2y}^2.$$

A lövedék emelkedési magasságát most is a lövedék függőleges irányú kezdősebessége határozza meg:

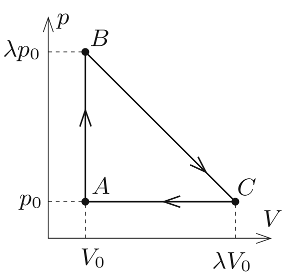
$$\frac{1}{2}mv_{2y}^2 = mgh_2, \quad \text{vagyis} \quad h_2 = \frac{v_{2y}^2}{2g} = \frac{2E_0}{5mg}.$$

A két esetet összevetve látjuk, hogy az emelkedési magasságok aránya:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{8}{5} = 1{,}6.$$

*Jánosik Áron* (Győr, Révai Miklós Gimn. és Koll., 12. évf.)

48 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 2, hiányos (1–2 pont) 29, hibás 3, nem versenyszerű 5 dolgozat.




**P. 5180.** *Egyatomos ideális gáz az* ábrán *látható ABCA körfolyamatot végzi. Mekkora a körfolyamat hatásfoka, ha a gáz (kelvinben mért) legmagasabb hőmérséklete kilencszer akkora, mint a legalacsonyabb hőmérséklet?*

*(Lásd még* Gálfi László: Hőfelvétel vagy hőleadás? *című cikkét a KöMaL 2009. évi 4. számában vagy a honlapunkon!)*

*(5 pont)* Közli: *Dezsőfi György,* Miskolc

**Megoldás.** A gáztörvény szerint $pV = nRT$, tehát a gáz hőmérséklete a $pV$ szorzattal arányos. A hőmérséklet az $A$ pontnak megfelelő állapotban a legalacsonyabb:

$$T_{\min} = \frac{p_0V_0}{nR}.$$

Az $ABC$ háromszög szimmetriája miatt a legmagasabb hőmérséklet a $BC$ szakasz felezőpontjához tartozik:

$$T_{\max} = \left(\frac{\lambda + 1}{2}\right)^2 \frac{p_0V_0}{nR}.$$

A feladat szövege szerint $T_{\max} = 9T_{\min}$, vagyis $\lambda = 5$.

A körfolyamat hatásfoka a gáz által végzett hasznos $W'$ munka és a felvett hő hányadosa. A gáz által végzett hasznos munka az $ABC$ háromszög területe:

$$W' = \frac{(\lambda - 1)^2 p_0 V_0}{2} = 8 p_0 V_0.$$

Az $A \to B$ folyamat izochor, amely során felvett hő:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{3}{2} nR(T_B - T_A) = \frac{3}{2}(p_B V_B - p_A V_A) = 6 p_0 V_0.$$

A $C \to A$ izobár folyamatban a gáz biztosan *hőt ad le*, így ez a folyamat a körfolyamat hatásfoka szempontjából érdektelen. Nehezebb eset a $B \to C$ folyamat, amely során hőfelvétel és hőleadás egyaránt előfordulhat.

Tekintsük az $AB$ szakasz valamely $D$ pontját, amelyhez tartozó nyomás $p$ és a térfogat $V$. (Nyilván $V_0 \leqslant V \leqslant 5V_0$.) Mivel $D$ rajta fekszik az egyenesen, teljesül, hogy

$$p = p_0 \left(6 - \frac{V}{V_0}\right),$$

ami az $x = \frac{V}{V_0}$ dimenziótlan arányszám bevezetésével így írható:

$$p = p_0(6 - x).$$

Számítsuk ki, mennyit hőt kell közöljünk a gázzal, hogy az a $B$ állapotból az egyenes mentén haladva a $D$ állapotba jusson. A folyamat során addig történik folyamatosan hőfelvétel, amíg a $Q_{BD} \equiv f(x)$ függvény monoton növekszik. Ha $f(x)$-nek valahol lokális maximuma van, majd onnan kezdve monoton csökken, akkor ott már hőleadás történik.

A belső energia megváltozása:

$$\Delta U_{BD} = \frac{3}{2}(p_D V_D - p_B V_B) = \frac{3}{2} p_0 V_0 (-x^2 + 6x - 5).$$

A gáz által eközben végzett munka (a $BD$ szakasz és a $V$ tengely közötti trapéz területe):

$$W'_{BD} = p_0 V_0 \frac{5 + (6 - x)}{2}(x - 1).$$

Az első főtétel szerint a gáz által a $B \to D$ állapotváltozás során felvett hő:

$$Q_{BD} = \Delta U_{BD} + W'_{BD} = (-2x^2 + 15x - 13) p_0 V_0,$$

amit

$$Q_{BD} = (x - 1)(13 - 2x) p_0 V_0$$

alakban is felírhatunk. Ez a függvény egy olyan parabolát ír le, amelynek zérushelyei: $x_1 = 1$ és $x_2 = \frac{13}{2}$. A parabola maximuma

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{15}{4}$$

értéknél van, és ezen a helyen

$$Q_{BD} = \frac{121}{8} p_0 V_0.$$

A teljes körfolyamatban a gáz az $A \to B \to D$ állapotváltozás során vesz fel hőt:

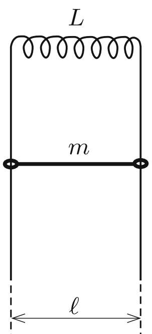
$$Q_{\mathrm{fel}} = Q_{AB} + Q_{BD} = \frac{169}{8} p_0 V_0.$$

Így a kérdéses hatásfok:

$$\eta = \frac{W'}{Q_{\mathrm{fel}}} = \frac{64}{169} \approx 0{,}38 = 38\%.$$

*Nguyễn Đức Anh Quân* (Hanoi, Tạ Quang Bửu, 12. évf.)
dolgozata alapján

31 dolgozat érkezett. Helyes 11 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 5, hiányos (1–2 pont) 4, hibás 11 dolgozat.




**P. 5183.** *Az ábrán látható függőleges sínpár felső végét $L$ induktivitású tekerccsel zártuk. A sínek távolsága $\ell$, rajtuk súrlódásmentesen mozoghat egy $m$ tömegű, elhanyagolható ellenállású rúd. A külső mágneses tér $\boldsymbol{B}$ indukcióvektora vízszintes és merőleges a sínek síkjára.*

*A rudat elengedve*

*a) legfeljebb mekkora feszültség indukálódik a tekercsben;*

*b) legfeljebb mekkora lesz az indukált áram erőssége?*

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

**Megoldás.** A rendszerre nem hat disszipatív erő, ezért alkalmazható az energiamegmaradás törvénye. A rendszer teljes energiája (a gravitációs helyzeti energia, a mágneses térenergia és a mozgási energia összege) a mozgás során nem változik, állandó marad. Ha a rúd függőleges elmozdulása $x$, a sebessége $v$ és az áramerősség $I$, akkor

$$-mgx + \frac{1}{2} L I^2 + \frac{1}{2} m v^2 = 0. \tag{1}$$

(Az elmozdulást és a sebességet lefelé tekintjük pozitívnak, és a helyzeti energiát az indulás helyén választottuk nullának. A kezdeti helyzetben $x = 0$, $v = 0$ és $I = 0$, tehát az összenergia is nulla.)

*a*) A rúd sebességének növekedtével egyre nagyobb feszültség indukálódik, ez egyre nagyobb áramot hoz létre, és emiatt a mágneses térben mozgó rúdra egyre nagyobb fékezőerő hat. Az indukált feszültség is, és az áramerősség is véges határok között marad, nem fognak idővel korlátlanul nőni.

*Megjegyzés.* A mozgás részletesebb vizsgálatával belátható, hogy a rúd harmonikus rezgőmozgást végez; ennek bizonyítása azonban nem tartozik a feladathoz.

Az indukált feszültség nagysága

$$U = v\ell B, \tag{2}$$

ami – a Faraday-féle indukciótörvény szerint – az áramerősség változási sebességével is kifejezhető:

$$U = L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \tag{3}$$

Ebből a két összefüggésből $U$-t kiküszöbölve, és kihasználva, hogy $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta(x\ell B - LI)}{\Delta t} = 0,$$

vagyis

$$B\ell x(t) - LI(t) = \text{állandó}.$$

Mivel induláskor $x = 0$ és $I = 0$, az állandó értéke nulla, tehát

$$I(t) = \frac{\ell B}{L}\,x(t). \tag{4}$$

Helyettesítsük be (4) és (2) felhasználásával $I$-t és $v$-t az energiamegmaradást kifejező (1) egyenletbe:

$$\frac{mU^2}{2\ell^2B^2} = mgx - \frac{\ell^2B^2}{2L}x^2,$$

majd alakítsuk a jobb oldalt teljes négyzetté:

$$\frac{mU^2}{2\ell^2B^2} = \frac{m^2g^2L}{2\ell^2B^2} - \frac{\ell^2B^2}{2L}\left(x - \frac{mgL}{\ell^2B^2}\right)^2 \leqslant \frac{m^2g^2L}{2\ell^2B^2}.$$

Innen leolvasható az indukált feszültség legnagyobb értéke:

$$U(t) \leqslant U_{\max} = g\sqrt{mL}.$$

*b*) A (4) összefüggésből látszik, hogy az indukált áram legnagyobb értékénél $x$ is a legnagyobb értékét veszi fel, és ott a rúd sebessége nulla. Ekkor (1) szerint

$$\frac{1}{2}LI^2 = mgx,$$

ami (4) felhasználásával így írható:

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{mgLI}{B\ell}.$$

Ez az összefüggés két esetben teljesül: $I = 0$, ami a legkisebb áramerősségnek felel meg, illetve amikor

$$I = I_{\max} = \frac{2mg}{B\ell}.$$

*Bokor Endre* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

8 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Bonifert Balázs, Horváth Anikó, Ludányi Levente, Nguyễn Đức Anh Quân és Tóth Ábel megoldása. Kicsit hiányos (4 pont) 1, hibás 1 dolgozat.

**P. 5185.** *Egy vízszintes lapon mozgó kis korongra a pillanatnyi sebességével arányos fékezőerő hat. Kétféle kísérletet végzünk vele:*

(*i*) *Ha meglökjük* $v_0$ *sebességgel, akkor a megállásáig* 50 cm *utat tesz meg.*

(*ii*) *Amikor a meglökött korong sebessége már* $v_0/2$*-re csökkent, nekiütközik egy másik, álló korongnak, amelyre ugyancsak a sebességével arányos fékezőerő hat. (Az arányossági tényező mindkét korongnál ugyanakkora.) Az ütközés egyenes és rugalmas. Meglepő módon a két korong egymás mellett áll meg.*

*a*) *Mekkora a két korong tömegének aránya?*

*b*) *Az ütközés helyétől milyen messze áll meg a két korong?*

(*6 pont*) A *Kvant* nyomán

**Megoldás.** *a*) A vízszintes lapon mozgó, kicsiny, $m$ tömegű korongra a pillanatnyi $v$ sebességével arányos (azzal ellentétes irányú)

$$F(v) = -\alpha v$$

fékezőerő hat, emiatt

$$a = -\frac{\alpha}{m}v \tag{1}$$

„gyorsulással" (ténylegesen lassulva) mozog.

Mivel a gyorsulás a sebesség, a sebesség pedig az $s$ megtett út időegységre eső megváltozása (precízen megfogalmazva: az idő szerinti első deriváltja),

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{m}\,\frac{\Delta s}{\Delta t}, \qquad \text{azaz} \qquad \Delta v = -\frac{\alpha}{m}\Delta s.$$

A kis változásokat összegezve (integrálva) megkapjuk a korong sebességét a megtett út függvényében:

$$v(s) = -\frac{\alpha}{m}\,s + \text{állandó}.$$

Ha a korong elmozdulását egy olyan ponttól mérjük, ahol a korong sebessége egy ismert $v_0$ érték, akkor a fenti egyenletben szereplő állandó nagysága éppen $v_0$, tehát a mozgást a

$$v(s) = v_0 - \frac{\alpha}{m}\, s$$

egyenlet írja le. Ebből leolvasható, hogy az $m$ tömegű korong a megállásáig

$$s_0 = \frac{m}{\alpha} v_0 \tag{2}$$

utat tesz meg. Mivel az első kísérletben $s_0 = 50$ cm, a fékezőerő együtthatója

$$\alpha = \frac{mv_0}{s_0} = \frac{mv_0}{50\ \text{cm}}.$$

Legyen a másik, kezdetben álló korong tömege $M$, a pillanatnyi sebességét és gyorsulását pedig jelöljük $V$-vel és $A$-val. Közvetlenül az ütközés előtt a korongok sebessége $v = v_0/2$ és $V = 0$, az ütközés után pedig $v = v_1$ és $V = V_1$. (Az ütközés utáni sebességeket nem ismerjük, ezeket később még meg kell határoznunk.)

A két korong ugyanott áll meg, tehát az ütközéstől a megállásig megtett $d$-vel jelölt útjuk ugyanakkora. A második korong mozgásegyenletét az (1) egyenlet mintájára írhatjuk fel:

$$F(V) = M\,A(V) = -\alpha V,$$

amiből – a (2)-nél leírtakhoz hasonló érveléssel – következik, hogy a megállásig megtett útja

$$d = \frac{M}{\alpha} V_1, \tag{3}$$

az $m$ tömegű korongra pedig ez érvényes:

$$d = \frac{m}{\alpha} v_1. \tag{4}$$

A fenti két egyenletből kapjuk, hogy

$$mv_1 = MV_1, \tag{5}$$

vagyis az ütközés után a két korong lendülete megegyezik egymással.

Az ütközés egyenes (a mozgások egy egyenesen történnek) és rugalmas. Az ütközés során mind az összimpulzus (összes lendület), mind pedig a mechanikai energiák összege *megmarad.* Az impulzusmegmaradást a következő módon írhatjuk fel:

$$m\frac{v_0}{2} = mv_1 + MV_1,$$

amiből (5) felhasználásával

$$m\frac{v_0}{2} = 2mv_1,$$

azaz

$$v_1 = \frac{1}{4} v_0 \tag{6}$$

következik

A mechanikai energia megmaradási törvénye szerint

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} M V_1^2,$$

tehát (5) és (6) ismeretében

$$\frac{1}{8} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{4}\right)^2 + \frac{1}{2} M \left(\frac{m}{M} \frac{v_0}{4}\right)^2,$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \frac{m}{M},$$

és végül a kérdezett tömegarányra $\frac{m}{M} = 3$ adódik.

*b*) A (4), (6) és (2) összefüggések szerint a korongok az ütközés helyétől

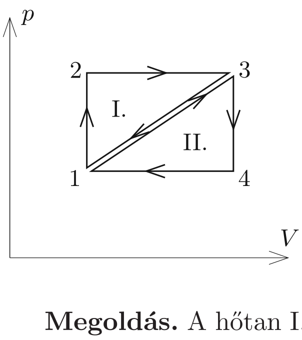
$$d = \frac{m}{\alpha} v_1 = \frac{m}{\alpha} \frac{v_0}{4} = \frac{s_0}{4} = 12{,}5\ \text{cm}$$

távolságban, éppen egymás mellett állnak meg.

*Varga Vázsony* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* Belátható, hogy mindkét korong sebessége az idő exponenciális függvénye szerint (nagyon gyorsan) tart nullához, tehát – ha valóban csak a feladatban szereplő fékezőerő hatna rájuk – véges idő alatt sohasem állhatnának meg. A fenti megoldásban kapott $d$ távolság úgy értendő, hogy ekkora út megtétele után csökken a korongok sebessége elhanyagolhatóan kicsiny értékre.

17 dolgozat érkezett. Helyes 10 megoldás. Kicsit hiányos (5 pont) 3, hiányos (1–4 pont) 4 dolgozat.




**P. 5191.** *Ugyanannyi ideális gázzal az* ábra *szerinti* $p-V$ *diagramon ábrázolt* $1 \to 2 \to 3 \to 1$, *illetve az* $1 \to 3 \to 4 \to 1$ *körfolyamatot végeztetjük. Melyik körfolyamatot végző gépnek nagyobb a hatásfoka, és milyen összefüggés áll fenn a két hatásfok között?*

(*5 pont*) *Varga István* (1952–2007) feladata

**Megoldás.** A hőtan I. főtétele szerint a körfolyamat egyes „szakaszaira" érvényes, hogy $Q = \Delta E + W'$. (A képletben $Q$ a felvett hőt, $\Delta E$ a gáz belső energiának megváltozását, $W'$ pedig a gáz által végzett tágulási munkát jelöli, és mindegyik mennyiség *előjelesen* értendő.)

Adjuk össze a hőfelvételeket az I. körfolyamat mentén:

$$Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}=(\Delta E_{12}+\Delta E_{23}+\Delta E_{31})+(W'_{12}+W'_{23}+W'_{31}).$$

A belső energia teljes változása *nulla,* a tágulási munkák előjeles összege pedig a körfolyamat hasznos munkavégzése. Ezek szerint

$$Q_{12}+Q_{23}+Q_{31}=W'_{\text{hasznos}},$$

amit $Q_{31}=-Q_{13}$ miatt így is felírhatunk:

$$Q_{12}+Q_{23}=W'_{\text{hasznos}}+Q_{13}. \tag{1}$$

Az I. körfolyamatban csak az $1\to 2$ és a $2\to 3$ változások során történik ténylegesen hőfelvétel ($Q_{12}>0$ és $Q_{23}>0$), tehát ennek a körfolyamatnak a hatásfoka:

$$\eta_1=\frac{W'_{\text{hasznos}}}{Q_{12}+Q_{23}}. \tag{2}$$

A II. körfolyamatban csak az $1\to 3$ állapotváltozáskor történik hőfelvétel, és a hatásfok

$$\eta_2=\frac{W'_{\text{hasznos}}}{Q_{13}}. \tag{3}$$

(Kihasználtuk, hogy mindkét folyamatban ugyanakkora a hasznos munka, mert a $p-V$ diagramon az I. és a II. háromszög területe megegyezik.) A hőfelvételeket (2) és (3)-ból kifejezve, majd (1)-be helyettesítve a hatásfokok között az

$$\frac{1}{\eta_1}=1+\frac{1}{\eta_2}$$

összefüggést kapjuk. Látható, hogy $\frac{1}{\eta_1}>\frac{1}{\eta_2}$, vagyis $\eta_1<\eta_2$.

*Fekete András Albert* (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 11. évf.) és
*Fülöp Sámuel Sihombing* (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

27 dolgozat érkezett. Helyes 9 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 11, hiányos (1–3 pont) 6, hibás 1 dolgozat.

**P. 5197.** *Micimackó kapott ajándékba egy* 20 cm *sugarú, gömb alakú lufit. A léggömb úgy volt megtöltve héliummal, hogy ha elengedte a fonalát, éppen lebegett a levegőben, nem emelkedett fel, de nem is süllyedt le.*

*Micimackó örömében elkezdett körbe szaladni a lufival úgy, hogy az egyik kezével fogta a lufi fonalának végét. Így a lufi egyenletes körmozgást végzett. Malacka megfigyelte, hogy bármekkora is Micimackó állandó szögsebessége, a lufi fonala mindig* $45^\circ$*-os szöget zár be a kör érintőjével.*

*Mekkora a lufi körpályájának sugara? (A fonál súlyától és a lufi alakjának esetleges megváltozásától eltekinthetünk.)*

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

**Megoldás.** Mivel a lufi álló helyzetben lebeg, az $mg$ nagyságú nehézségi erő, valamint a $\varrho_{\text{levegő}} Vg$ nagyságú felhajtóerő kiegyenlíti egymást:

$$mg = \varrho_{\text{levegő}} Vg.$$

Vizsgáljuk az $r$ sugarú körpályán mozgó lufira ható erőket. A fonalat feszítő, $F$ nagyságú erő vízszintes síkban hat, és mivel a körpálya érintőjével mindig 45°-os szöget zár be, a fonálerő érintőirányú (tangenciális) komponense és a sugár irányú komponense ugyanakkora, nevezetesen $F/\sqrt{2}$ nagyságú. Hat még a lufira a sebességével ellentétes (tehát érintőirányú) közegellenállási erő.

Az egyenletes körmozgást végző lufi érintőirányú gyorsulása nulla, így a tangenciális erők egyensúlyban vannak:

$$\frac{F}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} kA\varrho_{\text{levegő}}\, v^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}45 \cdot (20\ \text{cm})^2 \pi \varrho_{\text{levegő}}\, r^2\omega^2.$$

A sugárirányú erőkomponens biztosítja a centripetális gyorsulást:

$$\frac{F}{\sqrt{2}} = mr\omega^2 = \varrho_{\text{levegő}} \frac{4}{3} (20\ \text{cm})^3 \pi \cdot r\omega^2.$$

Ebből a két egyenletből megkapjuk a körpálya sugarát:

$$r = \frac{\frac{4}{3} \cdot 20\ \text{cm}}{0{,}45 \cdot 0{,}5} \approx 118\ \text{cm} = 1{,}18\ \text{m}.$$

*Varga Vázsony* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

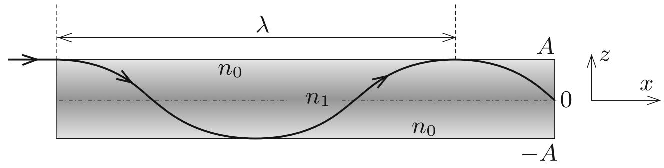
*Megjegyzés.* A közegellenállási erő lényegében abból származik, hogy a lufi mozgatása közben a közelében lévő (nagyjából a lufi térfogatával megegyező mennyiségű) levegőt is mozgásba kell hoznunk, és a megmozgatott levegő sebessége $v$ nagyságrendű. (A „nagyjából" és a „nagyságrendű" kifejezések pontosítását az alaktényezőtől várhatjuk.)

A fenti megoldásban a centripetális erő kiszámításánál csak a lufi lendületének irányváltozását vettük figyelembe, a lufi által megmozgatott levegő hatásával nem törődtünk. Egy egyenes mentén gyorsított testnél a környező levegő hatása úgy jelentkezik, mintha a test ún. „effektív tömege" (az a tömeg, ami a Newton-egyenletben szerepel) a valóságos értékénél nagyobb lenne, a különbség kb. a kiszorított levegő tömegével egyezik meg. Az a kérdés, hogy vajon az effektív tömeges leírásmód a körmozgásnál is alkalmazható-e (vagyis a centripetális erő képletébe is valamekkora effektív tömeget kell-e írnunk) lényegesen meghaladja a középiskolai fizika szintjét, ezért ennek tárgyalását – természetesen – nem várjuk el a KöMaL megoldóitól sem.

*(G. P.)*

31 dolgozat érkezett. Helyes 21 megoldás. Kicsit hiányos (4 pont) 4, hiányos (1–3 pont) 6 dolgozat.

**P. 5203.** *Egy $2A$ széles, átlátszó üveglemezben a lemez síkjára merőleges $z$ tengely irányában változik a törésmutató, értéke $z = \pm A$-nál $n_0$, míg $z = 0$-nál $n_1$. Az üveglemez szélénél ($z = A$ „magasságban") az $x$ tengely irányában egy vékony lézersugarat indítunk, amely az üvegben eltérülve egy koszinuszgörbe mentén halad.*




*a) Hogyan függ a törésmutató z-től?*

*b) Mekkora a fény pályagörbéjének hullámhossza?*

Adatok: $A=1$ cm, $n_0=1{,}5$ *és* $n_1=1{,}6$.

(Lásd a **P. 5066.** feladat megoldását a KöMaL 2018. évi decemberi számában.)

(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

**Megoldás.** A lézersugár pályagörbéjét leíró egyenlet

$$z(x)=A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right), \tag{1}$$

ennek az inverze (a $0\leqslant x\leqslant\lambda$ intervallumon):

$$x(z)=\frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{z}{A}. \tag{2}$$

Az (1) egyenletet $x$ szerint deriválva:

$$z'(x)=-\frac{2\pi}{\lambda}A\sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right). \tag{3}$$

A derivált abszolút értéke megegyezik a $z=$ állandó „réteghez" tartozó $\alpha$ beesési szög kotangensével:

$$z'(x)=-\operatorname{ctg}\alpha. \tag{4}$$

(A függvény meredekségét jellemző szöget – aminek a tangense a függvény deriváltja – az $x$ tengelytől mérjük, az optikai beesési szöget pedig a $z$ tengelytől számítjuk. A két szög egymás pótszöge.)

A Snellius–Descartes-törvény szerint

$$n(z)\cdot\sin\alpha=\text{konstans},$$

és mivel a lézersugár belépési pontjánál $\alpha=90^\circ$ és $n=n_0$, a fenti képletben szereplő állandó éppen $n_0$:

$$n(z)\sin\alpha=n_0,$$

vagyis

$$n(z)=\frac{n_0}{\sin\alpha}=n_0\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}. \tag{5}$$

A (3), (4) és (5) összefüggések felhasználásával:

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} A\right)^2 \sin^2\left(2\pi \frac{x}{\lambda}\right)}.$$

Innen (2) behelyettesítésével kapjuk, hogy

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} A\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2\pi} \arccos \frac{z}{A}\right)},$$

amit egyszerűsítve, és $\sin^2\big(\arccos(x)\big) = 1 - x^2$ felhasználásával

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} A\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{z}{A}\right)^2\right)},$$

vagyis

$$n(z) = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} A\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 z^2} \tag{6}$$

adódik.

Tudjuk még, hogy $z = 0$-nál a törésmutató

$$n(0) = n_1 = \frac{1{,}6}{1{,}5} n_0 = n_0 \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} A\right)^2}.$$

Ebből kiszámíthatjuk a pályagörbe keresett hullámhosszát:

$$\lambda = \frac{2\pi A}{\sqrt{\left(\frac{1{,}6}{1{,}5}\right)^2 - 1}} \approx 0{,}169\ \mathrm{m},$$

majd ezt (6)-ba visszahelyettesítve megkapjuk a törésmutató $z$-függését:

$$n(z) \approx 1{,}5 \sqrt{1{,}138 - 0{,}138\ \frac{1}{\mathrm{cm}^2}\, z^2}.$$

*Varga Vázsony* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.)

7 dolgozat érkezett. Helyes Bokor Endre, Ludányi Levente, Selmi Bálint, Tóth Ábel és Varga Vázsony megoldása. Kicsit hiányos (3–4 pont) 2 dolgozat.