Gyakorló feladatsor emelt szintű matematika érettségire

I. rész

1. *a*) Oldjuk meg a $\sqrt{2x+6}=9-x$ egyenletet a valós számok halmazán. (*5 pont*)

b) Oldjuk meg a $\log_{0,3} x \geqslant \log_{0,3}\frac{4}{9}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (*3 pont*)

c) Oldjuk meg a $\sin^2 4x+\sin 4x+\cos^2 4x=2$ egyenletet a $[0;\pi]$ halmazon. (*4 pont*)

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $y+2x=x^2$ egyenletű parabola.

a) Írjuk fel a parabola $E(2;0)$ pontjában húzott érintő egyenletét. (*3 pont*)

b) Számítsuk ki a parabola tengelypontjának koordinátáit és határozzuk meg a parabola paraméterét. (*4 pont*)

A koordináta-rendszerben a $(-4;0)$, $(4;0)$, $(4;8)$ és $(-4;8)$ csúcspontokkal megadott téglalapot a fenti parabola három részre vágja.

c) Mekkora a középső rész területe? (*6 pont*)

3. *a*) Egy mértani sorozat 1011-edik tagja megegyezik a sorozat nullától különböző hányadosával. Számítsuk ki a sorozat első 2019 tagjának a szorzatát. (*6 pont*)

b) Jelölje x és y ebben a sorrendben egy mértani sorozat két egymást követő tagját. Tudjuk, hogy $x\neq 0$ és az $(x;y)$ számpár megoldása a

$$100^x-2\cdot 10^x\cdot 10^{2y}+10^{4y}\leqslant 0$$

egyenlőtlenségnek. Számítsuk ki a sorozat hányadosát. (*6 pont*)

4. A VONALAZÓ nevű játékot két ember játszhatja.

A játék menete

Egy papírlapra a játékosok néhány pontot rajzolnak. A kezdő játékos húz egy vonalat valamelyik pontból egy másik pontig, és a vonalra egy újabb pontot rajzol. Így ebből az új pontból két vonal indul ki. A két játékos felváltva húzza a vonalakat a pontok között és a játékos a megrajzolt vonalra mindig egy új pontot rajzol a következő szabályok betartásával:

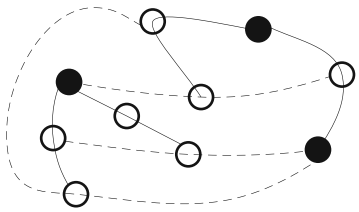
1. Mindegyik vonal alakja tetszőleges lehet, de nem metszheti önmagát és nem metszhet egyetlen korábban megrajzolt vonalat sem.
2. Az összekötő vonal két pontot köt össze és nem mehet át más korábban megrajzolt ponton.
3. Két pontot csak egyetlen vonal köthet össze.

4. Egyetlen pontból sem indulhat ki háromnál több vonal.

Az veszít, aki már nem tud húzni egy vonalat sem.

a) A *4.1. ábrán* 3 pont látható. Rajzoljuk bele az ábrába – a fenti feltételek figyelembevételével – annak a játéknak az egyes lépéseit, amelyben pontosan 4 új pont szerepel. A kezdő játékos vonala legyen folytonos, az ellenfélé pedig szaggatott. Az új pontokat üres karikával jelölje. (*3 pont*)

4.1. ábra



4.2. ábra

A *4.2. ábrán* egy játszma lépéseit lehet nyomon követni. A kezdő játékos vonalait a folytonos, az ellenfél lépéseit pedig a szaggatott vonalak jelzik.

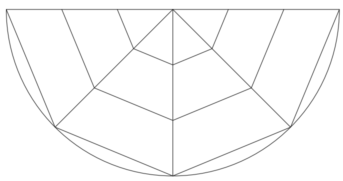
b) Számozzuk be az üres karikával jelzett új pontokat a keletkezésük sorrendjében és döntsük el, melyik játékos nyerte a játszmát. (*4 pont*)

Levente Csabával már nagyon sokszor játszotta a VONALAZÓ nevű játékot. Annak a valószínűsége, hogy Levente 10 játékból legalább 8-at megnyer kétszer akkora, mint annak, hogy pontosan 8-at nyer meg. (Tételezzük fel, hogy Levente mindegyik játszmában ugyanakkora valószínűséggel nyer.)

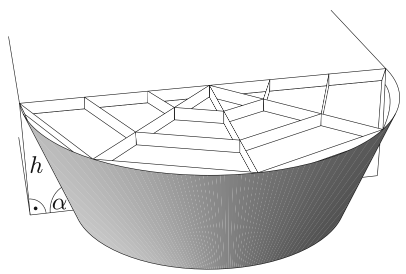
c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Levente megnyer egy játszmát? (*7 pont*)

II. rész

5. Egy zöldségárus a friss áruját a pulton félkörívben helyezi el. Az egyes tartományokat falécek határolják. A félkör az *5.1. ábrán* látható módon négy egybevágó körcikkre van osztva. Az ábrán látható összes egyenes szakasz és a félkörív is falécből készült. A szomszédos sugarakat összekötő elválasztó lécek párhuzamosak és három egyenlő részre osztják a sugarakat. A félkör sugara 1,5 méter.



5.1. ábra



5.2. ábra

a) Hány méter falécre van szükség a pult kialakításához? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

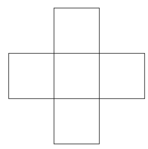
Egy másik zöldségesnek megtetszett az ötlet és bódéjához egy félbevágott csonkakúp alakú bővítményt tervezett az *ábra* szerint, ahol h a bővítmény magasságát, α pedig a félbevágott csonkakúp bódéval érintkező alkotójának a bódé alsó, vízszintes élével bezárt szögét jelöli. A bővítmény méretei: $h = 100$ cm, $\alpha = 70°$, a felső kör sugara pedig 1,5 m (*5.2. ábra*).

c) Mennyi anyag szükséges a szürkével jelölt palástrész beborításához, ha az illesztések miatt plusz 4% anyaggal kell számolni? Válaszunkat tized négyzetméterre kerekítve adjuk meg. (*8 pont*)

6. Egy 8×8-as sakktábla mezőire 1-től 64-ig beírtuk a természetes számokat a *6.1. ábra* szerint. Ezután készítettünk egy olyan alakzatot, amely 5 darab, a sakktábla mezőivel egybevágó négyzetből áll (*6.2. ábra*). Az így elkészített alakzatot véletlenszerűen ráhelyezzük a sakktáblára úgy, hogy annak mind az öt négyzete lefedjen egy-egy mezőt a táblán.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

6.1. ábra



6.2. ábra

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lefedett számok összege osztható 3-mal? (*6 pont*)

Egy másik alkalommal a sakktábla mezőire 64 pozitív egész számot írtunk. Közülük az egyik egyjegyű, a többi kétjegyű szám. Tudjuk, hogy a felírt számok mediánja és egyetlen módusza a 68, ami kétszer szerepel a táblán. Tudjuk továbbá, hogy a számok átlaga 67,5, a terjedelmük pedig 93.

b) Mely számok szerepelnek a táblán? (*10 pont*)

7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(11; -2)$ és a $B(2; 1)$ pontokat összekötő szakasz, továbbá az $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 20$ egyenletű kör. Az AB szakaszt a koordináta-rendszer origója körül $+90°$-kal elforgatjuk.

a) Számítással igazoljuk, hogy a forgatással kapott *szakasz* egy pontban metszi a megadott kört. (*4 pont*)

Egy r és R sugarú kör kívülről érinti egymást. A körök középpontjain áthaladó egyenes ezeket a köröket az érintési ponton kívül az A és B pontokban metszi. Az egyik közös külső érintő érintési pontjai E és F.

b) Igazoljuk, hogy az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. (*6 pont*)

c) Számítsuk ki a közös külső érintőszakasz hosszát. (*6 pont*)

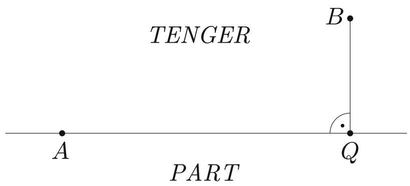
8. Egy szabadulószobának három bejárata van. Egy 6 fős társaság tagjai bármelyik ajtón, de csak kettesével léphetnek be. A belépés sorrendje nem számít.

a) Hányféle módon juthatnak be a szobába a társaság tagjai? (*4 pont*)

A szabadulószoba egyik feladata így szólt: adott tíz látszólag egyforma lakat illetve tíz kulcs. Mindegyik lakatra igaz, hogy pontosan egy kulcs nyitja. A játékszabály szerint a játékosnak mind a 10 lakatot ki kell nyitnia. Nevezzük próbálkozásnak egy kulcs és egy lakat összeillesztését, akár nyitja a kulcs a lakatot, akár nem.

b) Módszeresen dolgozva legfeljebb hány próbálkozás kell a feladat megoldásához? (*3 pont*)

Egy „túlélő” műsorban az egyik feladat az volt, hogy a lehető leggyorsabban jussanak el a versenyzők a tengerparton lévő A pontból a tengeren lévő B pontba, mert akkor védettséget szereznek a következő megmérettetésre. Tudjuk, hogy a parton csak futhatnak, a tengerben csak úszhatnak, segédeszközöket (farönk, evező stb.) nem használhatnak. Az *ábra* szerint a pálya méretei: $AQ = 4$ km, $BQ = 1$ km, valamint $AQB\sphericalangle = 90°$. (A partvonalat az egyszerűség kedvéért tekintsük egyenesnek.) Az egyik versenyző 8 km/óra sebességgel képes futni a homokban és 2 km/óra sebességgel úszni a tengerben.



c) Hány km futás után ugorjon a versenyző a tengerbe, ha a lehető legrövidebb időn belül szeretne eljutni A-ból B-be? (*9 pont*)

9. Egy öttagú család (apa, anya és a három gyerek) életkorának összege ebben az évben 100 év. Az anya 6 évvel fiatalabb a férjénél. 6 év múlva a középső gyerek kétszerannyi idős lesz, mint most. Amikor a legkisebb gyerek született, abban az évben (a kicsi megszületése előtt) a négytagú család átlagéletkora 22,5 év volt. Az anya az első gyermekét 22 éves korában szülte.

a) Hány éves most az anyuka? (*7 pont*)

Vasárnap délután a családtagok egy új társasjátékot próbálnak ki. A társasjáték játéktábláján 100 mező kapcsolódik egymás után, melyeket a tervezők 1-től 100-ig megszámoztak. A táblán a második mezőtől kezdve minden 2. mező zöld színű (a többi fehér), a harmadik mezőtől kezdve minden 3. mezőn egy állat képe, a negyedik mezőtől kezdve minden 4. mezőn egy fa képe, és az ötödik mezőtől kezdve minden 5. mezőn egy vadászház képe látható. A játékszabály szerint, ha egy mezőn két figura szerepel, akkor az erre a mezőre lépő játékos egyszer kimarad a játékból.

b) Hány olyan fehér színű mező van a táblán, amelyre lépve a játékos egyszer kimarad a játékból? (*3 pont*)

A társasjáték játékszabálya szerint a játékosok egy fehér és egy sárga színű szabályos dobókockával dobnak egyszerre, és a lépésük száma a dobott számok összege. Ha a dobás összege 6, akkor a játékosok újra dobhatnak, és a lépések száma a játékos által dobott négy szám összege lesz. (Például: Ha a játékos első dobása 2 és 5 volt, akkor a 7-es mezőre lép. Ha viszont a játékos első dobása 2 és 4, az új dobása 3 és 5 volt, akkor a játékos a 14-es mezőre léphet.) Ha egy mező sorszáma 10-zel osztható, akkor erre rálépve, a játékos a bábujával visszalép a legközelebbi, fát ábrázoló mezőre.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos bábuja kezdéskor a 10-es mezőre lép? (Kezdéskor a játékosok bábui az 1-es mező előtt állnak.) (*6 pont*)

Varga Péter
Budapest

Megoldásvázlatok a 2020/3. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *a*) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2+1}\,. \qquad (6\ pont)$$

b) *Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:*

$$\frac{2x^2y}{2x^2+y} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{12x^2y}{4x^2+3y} = \frac{1}{5}. \qquad (7\ pont)$$

Megoldás. *a*) A gyökjel alatti mennyiség mindig pozitív. Az egyenlet bal oldala nem lehet negatív, azaz

$$x^2 - 14 \geqslant 0; \qquad x^2 \geqslant 14.$$

Vezessünk be új ismeretlent, azaz legyen

$$a = \sqrt{x^2+1} \quad (\geqslant 0).$$

Ekkor az egyenletünk az

$$x^2 + 1 - 15 = a^2 - 15 = 2a, \qquad a^2 - 2a - 15 = 0$$

alakot veszi fel. Ennek megoldásai $a_1 = 5$, $a_2 = -3$. Ebből csak az a_1 jöhet számításba az előjel miatt, azaz

$$a_1 = 5 = \sqrt{x^2+1}, \qquad 25 = x^2 + 1, \qquad x^2 = 24, \qquad x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}.$$

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.