Ajánlott irodalom

[1] Sz. C. Havalampijev: *Pólus és poláris körben,* KöMaL 37/1 (1987. január), 9–15.
`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198702`

[2] Kiss György: *A körre vonatkozó polaritás,* KöMaL 48/8–9 (1998. november), 450–455.
`http://db.komal.hu/scan/1998/11/MAT9808.PS`

[3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* 46. fejezet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

Kós Géza

Egy járványmodell

A koronavírus világjárvánnyá szélesedése bizonyára felkeltette a KöMaL olvasóinak érdeklődését a *járványmodellek* iránt. Ez az írás nekik szól: a legelterjedtebb (ún. SIR-féle) járványmodellt mutatjuk be. Bonyolultsága miatt mégis le kell mondanunk a koronavírus terjedésének valódi modellezéséről, tehát csak bevezetésre számítson az Olvasó.

Megnehezíti dolgunkat, hogy *dinamikus* folyamatról van szó, ahol minden pillanatban a már fertőzöttek egy része megfertőzi a még nem fertőzöttek (röviden: megfertőzhetők) bizonyos részét, miközben a fertőzöttek másik része meggyógyul vagy meghal. A szakirodalmat követve, ebben a leírásban a könnyebb érthetőség érdekében több végletes egyszerűsítő feltevést teszünk: a) a népesség létszáma időben állandó; b) a fertőzésben senki sem hal meg; c) ha valaki kigyógyul a fertőzésből, az már nem fertőződik meg és nem fertőz újra; d) a fertőzési valószínűség független a népesség egyéb (nemi, életkori, területi, egészségi állapot- stb.) jellemzőitől; e) a gyógyulási valószínűség független az egészségügyi ellátástól.

Három típust különböztetünk meg: a *megfertőzhetők* (susceptibles, S), (népességi) részarányuk $s > 0$; a *fertőzöttek* (infectious, I), részarányuk $i > 0$; végül a *gyógyultak* (recovered, R), de ide tartoznak az eleve immunisak is: részarányuk $r > 0$, innen a modell közkeletű elnevezése: SIR-modell. Az ilyen típusú modelleket egyébként *rekesz*modelleknek nevezik.

Egyenleteinkben kulcsszerepet kap a fertőzési és a gyógyulási ráta. Ezek függvényében igazoljuk, hogy *a megfertőzhetők részarányának kicsi kezdőértékeire elhal a járvány, és nagy kezdőértékeire fellángol.* Azt is szemléltetni tudjuk, hogyan laposítja el a járvány időbeli lefutását, ha a fertőzési rátát elkülönítéssel vagy a megfertőzhetők részarányának kezdőértékét oltással csökkentjük.

A technikai egyszerűség kedvéért és a szokással ellentétben, nem folytonos, hanem diszkrét időben írjuk föl a népességi részarányok dinamikáját, egységnyinek rögzítve az időszak hosszát, pl. nap, hét, $t = 0, 1, 2, \ldots$ az időszakok indexe. A jobb érthetőség kedvéért az $S \to I \to R$ időrendi sorrendet felcserélve adjuk meg a három egyenletet.

Föltesszük, hogy az *új* fertőzések részaránya egyaránt arányos a megfertőzhetők és a fertőzöttek részarányával, de az *újonnan* gyógyultak részaránya csak a fertőzöttek részarányával arányos. Visszatérve a „rekeszek tartalmára”:

A *megfertőzhetők részarányának csökkenése* egyenesen arányos a megfertőzhetők részarányának és a fertőzöttek részarányának szorzatával:

$$s_{t+1} - s_t = -\beta s_t i_t, \tag{1}$$

ahol $\beta > 0$ a fertőzési ráta.

A *gyógyultak részarányának növekedése* egyenesen arányos a fertőzöttek részarányával:

$$r_{t+1} - r_t = \gamma i_t, \tag{2}$$

ahol $\gamma > 0$ a gyógyulási ráta.

Valójában az az eset az érdekes, amikor a gyógyulási ráta kisebb a fertőzési rátánál, és az időegység megfelelő megválasztásakor a fertőzési ráta legfeljebb 1: $0 < \gamma < \beta \leqslant 1$.

Mivel mindenki vagy megfertőzhető, vagy fertőzött, vagy gyógyult, ezért a három részarány összege 1:

$$s_t + i_t + r_t = 1,$$

azaz az összeg időbeli változása 0:

$$s_{t+1} - s_t + i_{t+1} - i_t + r_{t+1} - r_t = 0.$$

Ebbe behelyettesítve (1)-et és (2)-t következik:

A *fertőzöttek részarányának változása:*

$$i_{t+1} - i_t = (\beta s_t - \gamma) i_t. \tag{3}$$

Figyeljük meg, hogy beszorzás után (3) jobb oldalán két tag különbsége szerepel: a kisebbítendő az új fertőzések részaránya, a kivonandó pedig az újonnan gyógyultaké.

Bevezetjük a megfertőzhetők részarányának *kritikus értékét,* amelynél a (3) egyenlet jobb oldala 0, azaz a fertőzöttek részaránya változatlan (maximális, mert kisebb értékre növekszik, nagyobbra csökken):

$$s^{\circ} = \frac{\gamma}{\beta} < 1.$$

Becsempészve (3)-ba s°-t, jobban látszik s° szerepe a fertőzöttek részarányának alakulásában:

$$i_{t+1} - i_t = \beta (s_t - s^{\circ}) i_t. \tag{4}$$

Mivel r_t nem hat sem s_{t+1}-re, sem i_{t+1}-re, ezért a (2) egyenlettel ráérünk utólag törődni; a modell magva (1) és (4), vagy alkalmasabb alakban:

$$s_{t+1} = (1 - \beta i_t) s_t \tag{5}$$

és

$$i_{t+1} = \bigl[1 + \beta(s_t - s^{\mathrm{o}})\bigr] i_t. \tag{6}$$

Az (5)–(6) rekurziót elsőrendű nemlineáris differenciaegyenlet-rendszernek nevezzük: elsőrendű, mert a jövő csak a jelentől függ; nemlineáris, mert két változó szorzata is szerepel mindkét egyenlet jobb oldalán. A rekurzió (s_t, i_t) megoldása (pályája) a kezdeti részaránypárostól függ: (s_0, i_0), ahol $i_0 \approx 0$ (nagyon kicsi pozitív szám, a fertőzés hirtelen jelenik meg), és helyet hagyva az esetleg pozitív r_0-nak, $s_0 \leqslant 1 - i_0$.

1. segédtétel. *Az* (5)–(6) *rendszer minden pályájára teljesül:*

$$s_t, i_t \geqslant 0 \quad \textit{és} \quad s_t + i_t \leqslant 1. \tag{7}$$

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk: feltevés szerint (7) teljesül $t = 0$-ra, és belátjuk, hogyha (7) teljesül t-re, akkor teljesül $t + 1$-re.

Amíg $i_t \geqslant 0$, addig (2) értelmében $r_{t+1} \geqslant r_t$. Mivel $s_t + i_t = 1 - r_t$, ezért

$$s_{t+1} + i_{t+1} \leqslant s_t + i_t \leqslant 1. \qquad \square$$

Szavakkal: (1)-ből és (3)-ból következik, hogy amíg van fertőzött, addig a megfertőzhetők részaránya monoton csökken, a gyógyultaké viszont monoton nő.

Most már kimondható az

1. tétel. *a) Ha a megfertőzhetők részarányának kezdőértéke legfeljebb a kritikus érték: $s_0 \leqslant s^{\mathrm{o}}$, akkor a fertőzöttek részaránya monoton tart a 0-hoz.*

b) Ha a megfertőzhetők részarányának kezdőértéke nagyobb, mint a kritikus érték: $s^{\mathrm{o}} < s_0 < 1$, akkor a fertőzöttek i_t részaránya egészen addig növekszik, amíg a megfertőzhetők részaránya nem csökken a kritikus érték alá, aztán pedig i_t a végtelenben 0-hoz tart.

Bizonyítás. *a*) Ha $s_0 \leqslant s^{\mathrm{o}}$, akkor $s_t < s^{\mathrm{o}}$ $(t > 0)$. Két alesetet különböztetünk meg.

(*i*) Ha $s_0 < s^{\mathrm{o}}$, akkor (6)-ot felírva $0, 1, \ldots, t-1$ időszakra, és figyelembe véve, hogy $s_{t-1} < \cdots < s_1 < s_0$, adódik

$$i_t = \bigl[1 + \beta(s_{t-1} - s^{\mathrm{o}})\bigr] \cdot \ldots \cdot \bigl[1 + \beta(s_0 - s^{\mathrm{o}})\bigr] i_0 < \bigl[1 + \beta(s_0 - s^{\mathrm{o}})\bigr]^t i_0, \tag{8i}$$

azaz i_t gyorsan tart 0-hoz. (*ii*) Ha $s_0 = s^{\mathrm{o}}$, akkor az első lépést külön kell kezelni. $i_1 = i_0$, és (5) szerint $s_1 = (1 - \beta i_0) s^{\mathrm{o}}$, majd (8i) szerint

$$i_t < \bigl[1 + \beta(s_1 - s^{\mathrm{o}})\bigr]^{t-1} i_1 = \bigl[1 - \beta^2 i_0 s^{\mathrm{o}}\bigr]^{t-1} i_0, \qquad t \geqslant 1. \tag{8ii}$$

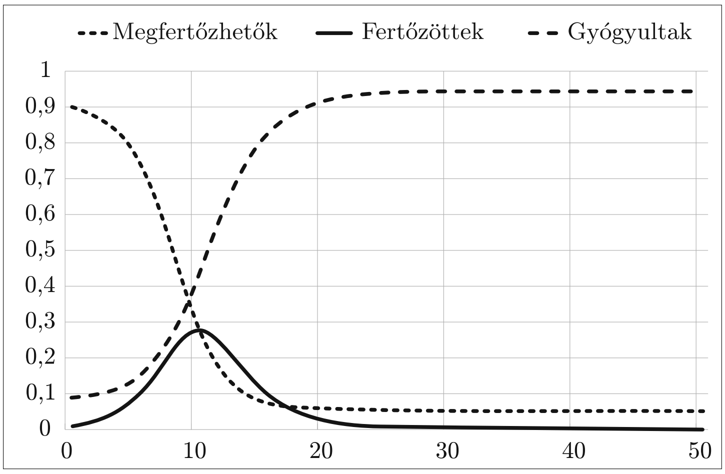
b) $0 < s^{\mathrm{o}} < s_0 < 1$ esetén, amíg a megfertőzöttek részaránya nagyon kicsi: $i_t \approx 0$, addig (5) miatt $s_t \approx s_0$ (csak lassan csökken), tehát i_t részarány (6) és

$s^{\mathrm{o}} < s_0 < 1$ miatt közelítőleg egy $1+\beta s_0-\gamma$-hányadosú mértani sorozat szerint nő. Belátjuk, hogy előbb-utóbb s_t a kritikus érték alá süllyed, s *a*) szerint i_t ezután végleg csökkenésre vált.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy $s_t \geqslant s^{\mathrm{o}}$ minden t-re. Az (s_t) alulról korlátos csökkenő sorozat, tehát van határértéke, amelyre $s^* \geqslant s^{\mathrm{o}}$ áll. (6) szerint $i_t \geqslant i_0$, azaz (5) szerint $s_t \leqslant (1-\beta i_0)^t s_0$, azaz $s^*=0$, s ez ellentmond $s^* \geqslant s^{\mathrm{o}} > 0$-nak. □

További vizsgálatot igényelne, hogy hosszú távon milyen esetben szűnik meg a megfertőzhetőség (és válik teljessé a gyógyultság), számpéldáinkban azonban az idők végezetéig maradnak megfertőzhetők.

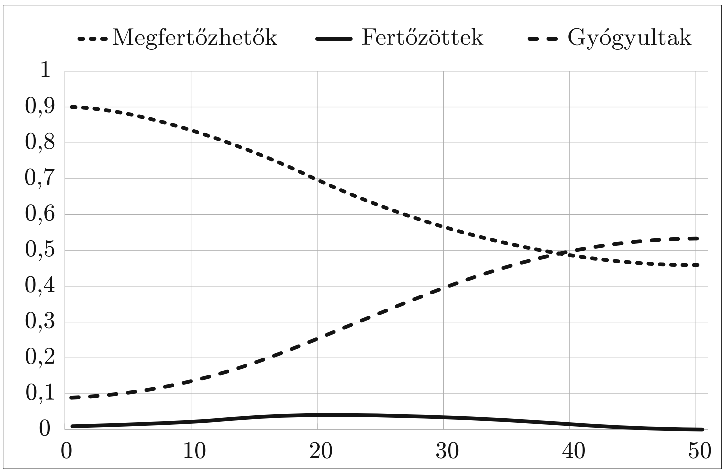
Rátérünk a numerikus szemléltetésre. Önkényesen választjuk, hogy $i_0 = 0{,}01$. Első futásunkban $\beta = 1$ és $\gamma = 1/3$, valamint a megfertőzhetők részarányának nagy kezdőértéket adunk: $s_0 = 0{,}9 > s^{\mathrm{o}} = 1/3$. Egyszerű programmal elkészíthetjük az *1. ábrát.* Legérdekesebb eredmény: a 10. időszakban éri el a fertőzöttség a maximumát, a lakosság 27,7%-a fertőzött. A 20. időszakra a fertőzöttség gyakorlatilag eltűnik, de további számítások szerint a megfertőzhetőség megmarad 5%-nál.



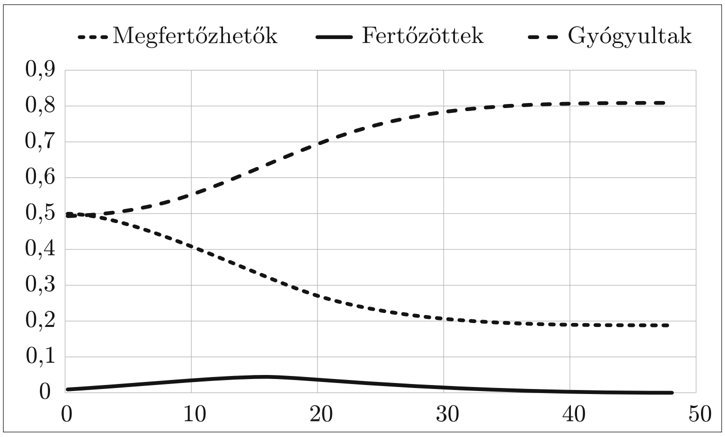
1. ábra. Erős fertőzés, sok megfertőzhető

A második futásban feltesszük, hogy elkülönítéssel sikerült az erős fertőzési rátát gyengíteni: $\beta = 0{,}5$. Az előző programot használva kapjuk a *2. ábrát.* A legérdekesebb eredmény: a fertőzöttség jóval később, a 22. időszak körül éri el a maximumát, s a lakosságnak csupán 4,5%-a fertőzött, de a megfertőzhetők részaránya lassabban csökken, és megáll 45%-nál.

A harmadik futásnál feltesszük, hogy oltással sikerült a megfertőzhetők nagy kezdő-részarányát jelentősen csökkenteni, de a kritikus érték fölött maradva: $s_0 = 0{,}5 > s^{\mathrm{o}}$. A fertőzési ráta újra nagy: $\beta = 1$. A *3. ábrán* látható, hogy a maximális fertőzöttség véletlenül ismét 4,4%, de már a 16. időszakban elérjük, és alacsonyabb lesz a megfertőzhetők részarányának határértéke: 19%.



2. ábra. Gyengén fertőző, sok megfertőzhető



3. ábra. Erősen fertőző, kevés megfertőzhető

Eddig kizártuk a $\gamma \geqslant \beta$ esetet. A teljesség kedvéért most röviden megvizsgáljuk, mi történik ekkor. Formálisan $s^{\circ} \geqslant 1$, tehát az 1. tétel *b*) pontja értelmében minden $s_0 \leqslant 1$ kezdőállapotra teljesül az $s_0 \leqslant s^{\circ}$ feltétel, azaz a járvány elhal.

Összefoglalásként, ne várjunk csodákat egy modelltől. Ez a modell csak a legegyszerűbb összefüggéseket képes megvilágítani, például, hogy létezik a megfertőzhetők részarányának egy kritikus értéke. Ha a kritikus érték alattról vagy fölöttről indítjuk a rendszert, az nemcsak kvantitatíve, de kvalitatíve is másképp viselkedik. Modellünk azonban képtelen kezelni a koronavírus-járványnak azt a központi kérdését, hogy az elkülönítés a fertőzési folyamat lassításával megnöveli a gyógyulás valószínűségét (lesz elég lélegeztetőgép). Ennek részletezése azonban túlmutat a tanulmányon.

Simonovits András