Térbe kilépő bizonyítások VII.[1]

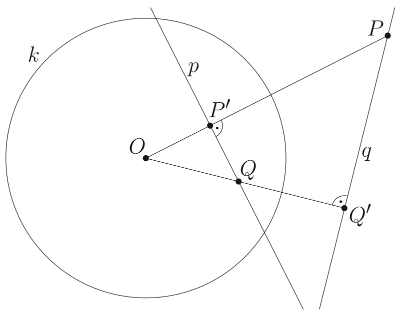
A körre vonatkozó polaritás

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A *polaritások* olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetések, amelyek a projektív sík pontjait a projektív sík egyeneseivel párosítják össze úgy, hogy bármely e egyenesre és P pontra igaz, hogy az e akkor és csak akkor megy át P-n, ha az e-nek megfelelő E pont illeszkedik a P-hez rendelt p egyenesre. A P ponthoz rendelt p egyenes a P *polárisa*, és a p egyeneshez rendelt P pont a p *pólusa.* Praktikus dolog az egymásnak megfeleltetett objektumokat ugyanazzal a betűvel jelölni, a pontokat nagy-, az egyeneseket kisbetűvel.

Most a polaritás legismertebb, középiskolás versenyfeladatokban is gyakran előforduló speciális esetével, a *körre vonatkozó polaritással* fogunk foglalkozni.

Két lehetséges definíció



1. ábra

Legyen k egy rögzített kör, ez lesz a polaritás *alapköre;* a középpontja O, sugara ϱ. *A k-ra vonatkozó polaritást* fogjuk definiálni.

Két lehetséges definíciót is szeretnék mutatni. Az első egy intuitív mód, ahogy az ember először maga fedezné fel a polaritás alaptulajdonságait, cserébe több technikai részletkérdést később kell végiggondolnunk. A második egy technikailag egyszerűbb, kompaktabb definíció, cserébe a geometriai tulajdonságokat kell külön ellenőrizni. Mindkét definíció lépéseit követhetjük az *1. ábrán.*

1. definíció

1*a*. Tetszőleges, O-tól különböző P pont k-ra vonatkozó inverze legyen P'. A P pont *polárisa* a P'-n átmenő, OP-re merőleges p egyenes.

1*b*. A P, Q pontok *konjugáltak,* ha rajta vannak egymás polárisán.

2. definíció

2*a*. A P és Q pontok *konjugáltak,* ha $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\varrho^2$.

2*b*. A P pont *polárisa* a P-vel konjugált pontok halmaza, avagy az $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OX}=\varrho^2$ egyenletű egyenes.

[1] A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

1*c*. Ha a p egyenes nem megy át az O ponton, és O merőleges vetülete p-re a P' pont, akkor p *pólusa* a P' k-ra vonatkozó inverze.

1*d*. A p, q egyenesek *konjugáltak*, ha átmennek egymás pólusán.

2*c*. A p egyenes *pólusa* az az egyértelmű P pont, amely p összes pontjával konjugált.

2*d*. A p, q egyenesek *konjugáltak*, ha átmennek egymás pólusán.

Tetszés szerint, tekinthetjük az 1*a*–1*d*. tulajdonságokat definíciónak és a 2*a*–2*d*. tulajdonságokat következményeknek, vagy fordítva. A polaritás néhány további alaptulajdonsága:

3. A P pont polárisa akkor és csak akkor a p egyenes, ha p pólusa P.
4. A P pont akkor és csak akkor van rajta a Q pont polárisán, ha Q rajta van P polárisán (*1. ábra*).

5*a*. Ha a P és Q pontok polárisa p, illetve q, akkor az $r = PQ$ egyenes pólusa p és q metszéspontja, R (*2a. ábra*).

5*b*. Ha a p és q egyenesek pólusa P, illetve Q, akkor az R metszéspontjuk polárisa az $r = PQ$ egyenes (*2a. ábra*).

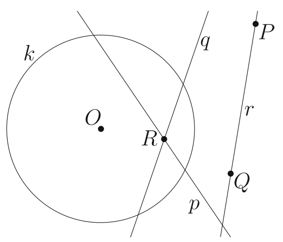
6*a*. Ha P az alapkörön van, akkor a polárisa a körhöz P-ben húzott érintő (*2b. ábra*).

6*b*. Ha p érinti az alapkört, akkor a pólusa az érintési pont (*2b. ábra*).

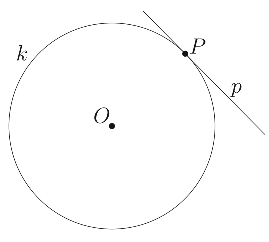
7. Ha a P pont kívül van, és a P-ből k-hoz húzott érintők PE és PF, akkor P polárisa az EF egyenes (*2c. ábra*).

8*a*. Bármely pont akkor és csak akkor konjugált önmagával, ha az alapkörnek pontja (*2b. ábra*).

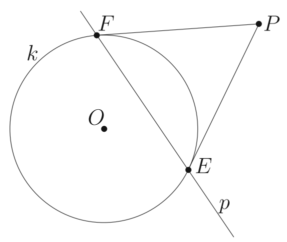
8*b*. Bármely egyenes akkor és csak akkor konjugált önmagával, ha érinti az alapkört (*2b. ábra*).



2a. ábra



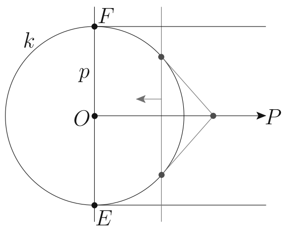
2b. ábra



2c. ábra

Az Olvasóra bízzuk annak végiggondolását, hogy a kétféle definíció ugyanazt a megfeleltetést írja le, és a fenti tulajdonságok is teljesülnek.

Kiterjesztés a projektív síkra

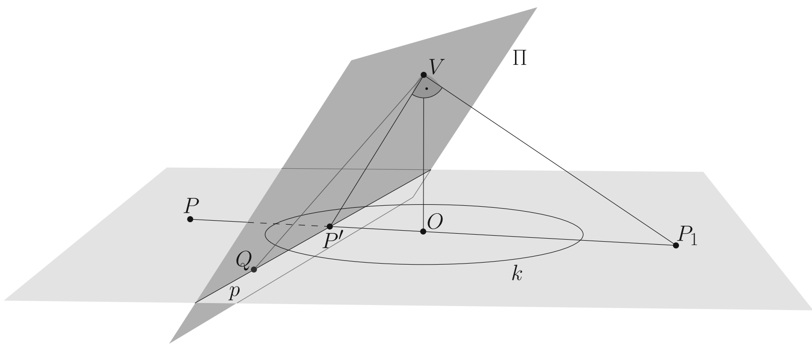


3. ábra

Ha a síkot kiegészítjük a szokásos végtelen távoli pontokkal és az azokat tartalmazó ideális egyenessel, akkor definiálhatjuk az O pont polárisát és az O-n átmenő egyenesek pólusait is. Ha P egy ideális pont, akkor P polárisa az O-n átmenő, az OP irányra merőleges egyenes. Ez szemléletesen megfelel annak, hogy ha a P pontot valamelyik irányban végtelen messzire elmozgatjuk, akkor a polárisa is párhuzamosan mozog az O pontra illeszkedő helyzetig. A 7. tulajdonság is érvényes marad; a határhelyzetben a P-ből húzott érintők párhuzamosak az OP iránnyal (*3. ábra*).

Végül az O pont polárisa az ideális egyenes; ezt is szemléltethetjük úgy, hogy a P pontot az O-ba húzzuk, miközben P polárisa egyre távolabbra vándorol.

Térbe kilépve egységessé tehetjük a sokféle definíciót. Vegyünk fel egy V pontot a térben, amelyre az OV szakasz merőleges k síkjára, és a hossza ϱ. Tekintsünk egy tetszőleges, O-tól különböző P pontot a síkban, a k-ra vonatkozó inverze legyen P', a polárisa pedig p; legyen továbbá P tükörképe az O pontra P_1, és legyen Π a V-re és p-re illeszkedő sík (*4. ábra*).



4. ábra

Mivel $OP_1 \cdot OP' = OP \cdot OP' = \varrho^2 = OV^2$, az OVP_1 háromszög hasonló az $OP'V$ háromszöghöz, emiatt $P'VP_1 = 90°$. A p egyenes merőleges OP-re és OV-re, ezért merőleges az OVP síkra és az abban fekvő VP_1 egyenesre is. A Π síkban most már két egyenesről, p-ről és VP'-ről is tudjuk, hogy merőleges VP_1-re, tehát a Π sík merőleges a VP_1 egyenesre.

Ez az észrevétel egy térbeli eljárást ad a P pont polárisának szerkesztésére: tükrözzük P-t O-ra, így megkapjuk a P_1 pontot. A V-ponton át, VP_1-re merőlegesen vegyük fel a Π síkot; a Π kimetszi az alapsíkból a p egyenest. Azt is láthatjuk, hogy bármely Q pont akkor és csak akkor konjugált P-vel, ha $P_1VQ\sphericalangle = 90°$.

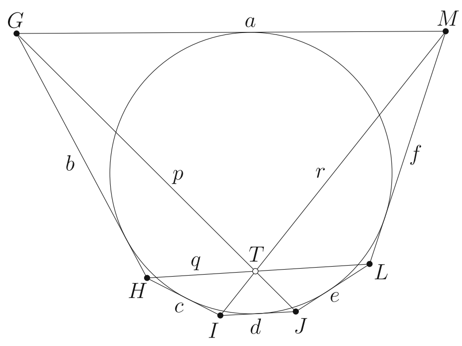
Ha P valamelyik ideális pont, akkor $P_1 = P$, az OP irány párhuzamos az alapsíkkal, és Π kimetszi az O-n átmenő, OP-re merőleges egyenest. Ha pedig $P = O$, akkor Π párhuzamos k síkjával, a két sík metszete valóban az alapsík ideális egyenese. Tehát a fenti szerkesztés egységesen működik a projektív sík bármely pontjára.

Dualitás

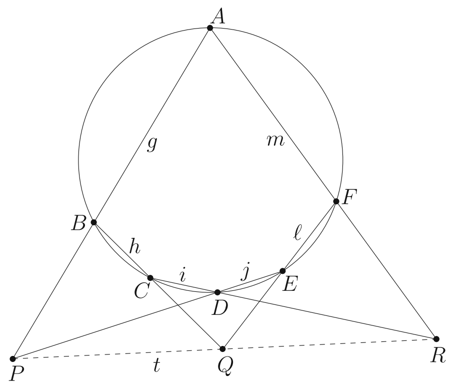
Ha van egy projektív geometriai állítás, tétel, amelyben pontok, egyenesek és (legfeljebb) egy kör szerepel, az ábrára alkalmazhatjuk a körre vonatkozó polaritást: minden pontot kicserélünk a polárisára, és minden egyenest kicserélünk a pólusára. Ilyen módon a projektív geometriai tételeket párokba állíthatjuk; mindegyik tételnek van egy párja, *duálisa.*

Próbáljuk ki ezt az első részben látott Brianchon-tétellel:

Brianchon tétele: *Ha az a, b, c, d, e, f egyenesek érintik a k kört, metszéspontjaik $a \cap b = G$, $b \cap c = H$, $c \cap d = I$, $d \cap e = J$, $e \cap f = L$ és $f \cap a = M$, akkor a $p = GJ$, $q = HL$ és $r = IM$ egyenesek egy ponton* (T) *mennek át* (5*a*. ábra).



5a. ábra



5b. ábra

A polaritást alkalmazva kapjuk a Pascal-tételt:

Pascal[2] tétele: *Ha az A, B, C, D, E, F pontok egy körön vannak, az összekötő egyeneseik $AB = g$, $BC = h$, $CD = i$, $DE = j$, $EF = \ell$ és $FA = m$, akkor ezek metszéspontjai, a $g \cap j = P$, $h \cap \ell = Q$ és $i \cap m = R$ pontok egy egyenesen* (t) *vannak* (5*b*. ábra).

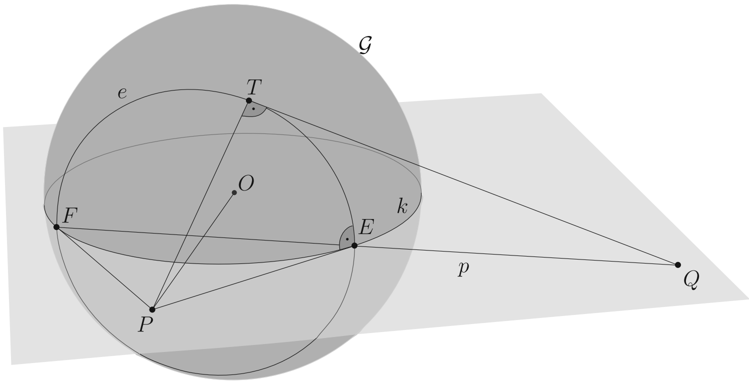
A Brianchon-tétel és a Pascal-tétel *egymás duálisa.*

Konjugált pontpárok egy térbeli jellemzése

Legyen $\mathcal{G}$ az O középpontú, az alapkörre illeszkedő gömb, és vegyünk fel két pontot, P-t és Q-t a síkban, a körön kívül; a P-ből k-hoz húzott érintők végpontjai legyenek E és F. A 7. tulajdonság szerint a $p = EF$ egyenes a P pont polárisa. A PO egyenesre a p mentén állítsunk egy merőleges síkot; ez a $\mathcal{G}$-t egy e körben metszi; az e merőleges a PE és PF szakaszokra.

[2]Blaise Pascal (1623–1662) francia matematikus és filozófus

Ha Q rajta van a p egyenesen, vagyis P és Q konjugáltak, akkor a Q pont is az e kör síkjában van, a körön kívül. Húzzuk meg Q-ból az e egyik érintőjét; az érintési pontot jelöljük T-vel. Vegyük észre, hogy a PT és a QT szakasz is érintője $\mathcal{G}$-nek, ezért a PQT sík érinti a gömböt. Továbbá a PT szakasz a PE elforgatottja, szintén merőleges e-re és a körhöz húzott QT érintőre, tehát a PT és QT szakaszok merőlegesek (*6. ábra*).



6. ábra

Végig lehet gondolni, hogy ezek a lépések megfordíthatók: ha egy, a P és Q pontokon keresztül fektetett sík a T pontban érinti a gömböt úgy, hogy PT és QT merőlegesek, akkor Q a p egyenesre esik, vagyis P és Q konjugáltak.

Melléktermékként a 4. tulajdonságra is egy új bizonyítást adtunk, legalábbis külső pontok esetén.

Autopoláris háromszögek

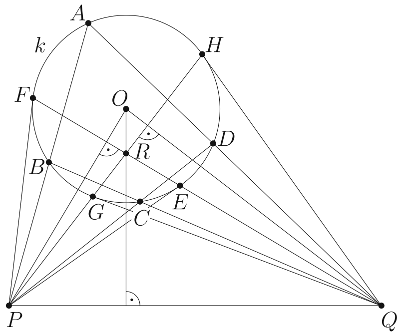
Azokat a háromszögeket, amelyekben mindegyik csúcs a vele szemközti oldal pólusa, *autopoláris háromszögnek* hívjuk, de van, aki a görög–angol *autopolar* név betű szerinti átírását szereti. Bármely két konjugált P, Q pont kiegészíthető autopoláris háromszöggé, a harmadik, R csúcs a PQ egyenes pólusa, amely P-vel és Q-val is konjugált. Például a P ponttal Q és R is konjugált, ezért P polárisa csak a QR egyenes lehet.

Az autopoláris háromszögeknek egy nagyon fontos előfordulása, versenyfeladatok megoldásában is gyakran találkozhatunk vele, amikor egy húrnégyszög szemközti oldalpárjainak és átlóinak metszéspontját vesszük:

Tétel. (a) *Ha A, B, C és D négy különböző pont a k körön, AB és CD metszéspontja P, BC és AD metszéspontja Q, továbbá AC és BD metszéspontja R, akkor a PQR háromszög k-ra nézve autopoláris.*

(b) *A PQR háromszög magasságpontja a k középpontja* (7. ábra).

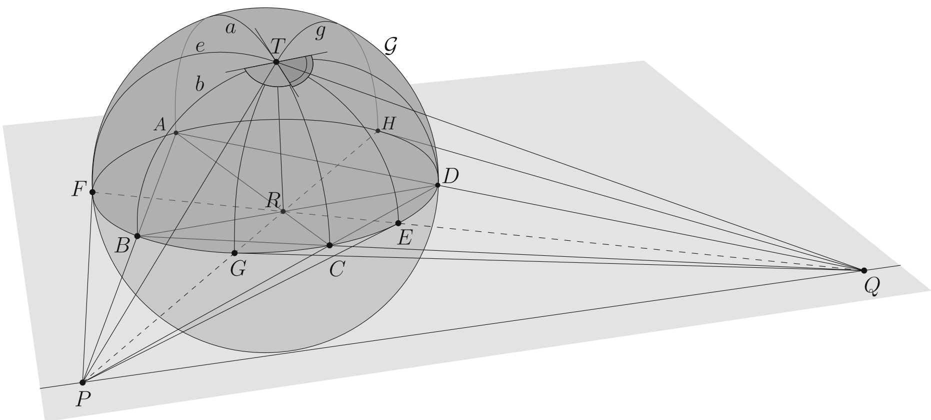
A tétel (b) része triviálisan következik az (a) állításból: ha PQR autopoláris háromszög, akkor például a QR egyenes a P pont polárisa, ami az 1a. tulajdonság miatt merőleges az OP egyenesre, tehát a PQR háromszögben OP a QR oldalhoz tartozó magasságvonal. Ugyanez a másik két oldalra is elmondható, tehát O a három magasságvonal metszéspontja.



7. ábra

Az (a) részt a térbe kilépve fogjuk igazolni. Az A, B, C, D pontok szerepe szimmetrikus; feltehetjük, hogy $ABCD$ egy konvex húrnégyszög, így P és Q a körön kívül, R pedig a körön belül helyezkedik el.

A P-ből és Q-ból a körhöz húzott érintők legyenek PE, PF, QG és QH, és legyen $\mathcal{G}$ az O középpontú, k-ra illeszkedő gömb. Az AC és BD átlókra illeszkedő, az alapsíkra merőleges síkok metsszék $\mathcal{G}$-t az a és b körvonalak mentén, és ezek egyik metszéspontja legyen T. Mivel az ACT és a BDT sík is merőleges a k síkjára, a T pont merőleges vetülete a síkra az R pont (*8. ábra*).



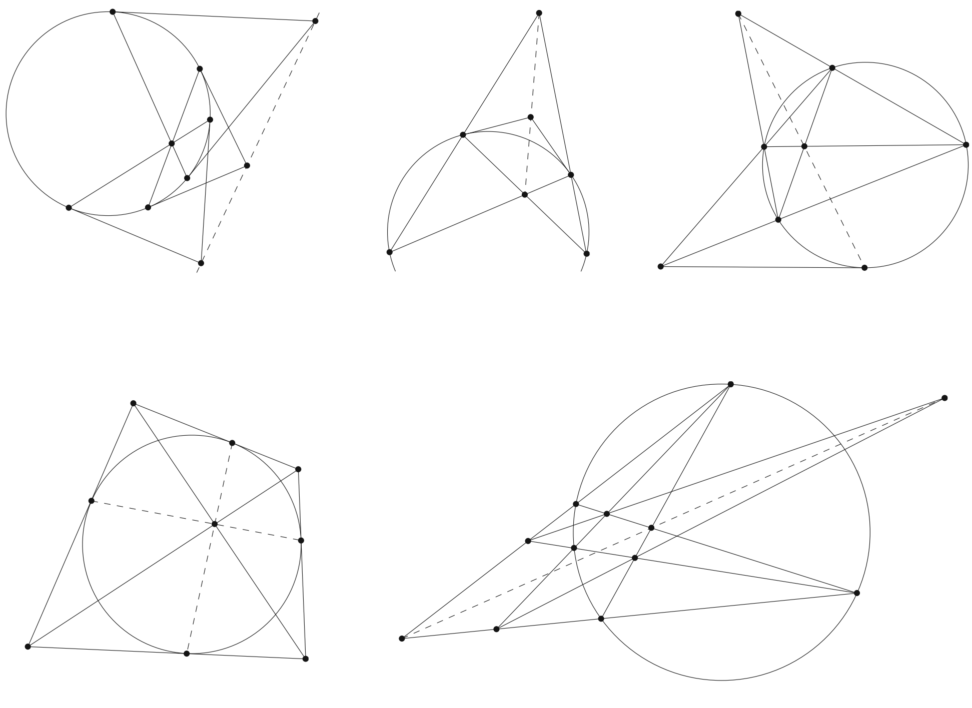
8. ábra

A P középpontú, PE sugarú inverzió a gömböt önmagára képezi, felcseréli egymással A-t B-vel, valamint C-t D-vel, ezért az alapsíkra merőleges a és b köröket is egymásra képezi. A PT egyenesen T a két kör egyetlen – közös – pontja, tehát az inverziónak – E és F mellett – T is fixpontja, tehát PT érinti $\mathcal{G}$-t. Az ilyen pontok az alapsíkra merőleges, EF átmérőjű e körön vannak, tehát az EFT sík is merőleges k síkjára, így tartalmazza a TR szakaszt és vele együtt az R pontot. Ebből azt is látjuk, hogy az EF egyenes átmegy az R ponton. De az EF egyenes a P pont polárisa, tehát P és R konjugáltak. Ugyanígy láthatjuk, hogy Q és R konjugáltak.

Az előbbi, P középpontú inverzió önmagára képezi a PT egyenest és felcseréli egymással az a és b köröket; az inverzió szögtartása miatt a PT egyenes ugyanakkora szöget zár be a két körrel, illetve a T pontban húzott érintőikkel. Mindhárom egyenes egy síkban, a T-ben a gömbhöz fektetett érintősíkban van; tehát PT a két kör közötti egyik szög felezője. Hasonlóan, a QT egyenes a két kör közötti másik, kiegészítő szög felezője. A két szögfelező, vagyis PT és QT merőlegesek, tehát P és Q konjugáltak. Ezzel beláttuk, hogy a P, Q, R pontok páronként konjugáltak, vagyis a PQR háromszög valóban autopoláris.

Feladatok

1. Mi a Desargues-tétel duálisa?
2. Mi a Papposz-tétel duálisa?
3. Írjuk és rajzoljuk fel az autopoláris háromszögekről szóló tétel duálisát.
4. Feladatok szöveg nélkül:



5. Igazoljuk, hogy tetszőleges P és Q pontok akkor és csak akkor konjugáltak a k körre nézve, ha a PQ átmérőjű kör merőlegesen metszi k-t.
6. Vetítsük a k kör síkját középpontosan egy másik, vele nem párhuzamos síkra úgy, hogy a k kör vetülete is kör legyen. Mutassuk meg, hogy a vetítés megtartja a polaritást, azaz bármely pont vetületének polárisa az új síkban a poláris vetülete, és egyenes vetületének pólusa a pólus vetülete.

Ajánlott irodalom

[1] Sz. C. Havalampijev: *Pólus és poláris körben,* KöMaL 37/1 (1987. január), 9–15.
`http://db.komal.hu/KomalHU/showpdf.phtml?tabla=Cikk&id=198702`

[2] Kiss György: *A körre vonatkozó polaritás,* KöMaL 48/8–9 (1998. november), 450–455.
`http://db.komal.hu/scan/1998/11/MAT9808.PS`

[3] Hajós György: *Bevezetés a geometriába,* 46. fejezet. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

Kós Géza

Egy járványmodell

A koronavírus világjárvánnyá szélesedése bizonyára felkeltette a KöMaL olvasóinak érdeklődését a *járványmodellek* iránt. Ez az írás nekik szól: a legelterjedtebb (ún. SIR-féle) járványmodellt mutatjuk be. Bonyolultsága miatt mégis le kell mondanunk a koronavírus terjedésének valódi modellezéséről, tehát csak bevezetésre számítson az Olvasó.

Megnehezíti dolgunkat, hogy *dinamikus* folyamatról van szó, ahol minden pillanatban a már fertőzöttek egy része megfertőzi a még nem fertőzöttek (röviden: megfertőzhetők) bizonyos részét, miközben a fertőzöttek másik része meggyógyul vagy meghal. A szakirodalmat követve, ebben a leírásban a könnyebb érthetőség érdekében több végletes egyszerűsítő feltevést teszünk: *a*) a népesség létszáma időben állandó; *b*) a fertőzésben senki sem hal meg; *c*) ha valaki kigyógyul a fertőzésből, az már nem fertőződik meg és nem fertőz újra; *d*) a fertőzési valószínűség független a népesség egyéb (nemi, életkori, területi, egészségi állapot- stb.) jellemzőitől; *e*) a gyógyulási valószínűség független az egészségügyi ellátástól.

Három típust különböztetünk meg: a *megfertőzhetők* (susceptibles, S), (népességi) részarányuk $s > 0$; a *fertőzöttek* (infectious, I), részarányuk $i > 0$; végül a *gyógyultak* (recovered, R), de ide tartoznak az eleve immunisak is: részarányuk $r > 0$, innen a modell közkeletű elnevezése: SIR-modell. Az ilyen típusú modelleket egyébként *rekesz*modelleknek nevezik.

Egyenleteinkben kulcsszerepet kap a fertőzési és a gyógyulási ráta. Ezek függvényében igazoljuk, hogy *a megfertőzhetők részarányának kicsi kezdőértékeire elhal a járvány, és nagy kezdőértékeire fellángol.* Azt is szemléltetni tudjuk, hogyan laposítja el a járvány időbeli lefutását, ha a fertőzési rátát elkülönítéssel vagy a megfertőzhetők részarányának kezdőértékét oltással csökkentjük.

A technikai egyszerűség kedvéért és a szokással ellentétben, nem folytonos, hanem diszkrét időben írjuk föl a népességi részarányok dinamikáját, egységnyinek rögzítve az időszak hosszát, pl. nap, hét, $t = 0, 1, 2, \ldots$ az időszakok indexe. A jobb