Megoldás. Tegyük fel, hogy létezik a feladat követelményeit kielégítő függvény és a hozzá tartozó a és b pozitív konstansok. Keressük meg azokat az x számokat, amelyekre $x^2 = ax + b$.

E másodfokú egyenletnek – mivel a és b pozitívak – két (különböző) megoldása van, legyenek ezek x_1 és x_2. Az x_1 és x_2 nem egymás ellentettjei, hiszen $a \neq 0$. Ekkor $i = 1, 2$ bármelyik értékére

$$f\big(x_i^2\big) - \big(f(ax_i + b)\big)^2 = f\big(x_i^2\big) - \Big(f\big(x_i^2\big)\Big)^2 \geqslant \frac{1}{4},$$

azaz

$$0 \geqslant \Big(f\big(x_i^2\big)\Big)^2 - f\big(x_i^2\big) + \frac{1}{4} = \left(f\big(x_i^2\big) - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ez csak akkor teljesül, ha $f\big(x_i^2\big) = \frac{1}{2}$, vagyis $f\big(x_1^2\big) = \frac{1}{2} = f\big(x_2^2\big)$. Mivel $x_1 \neq \pm x_2$, azért a függvény két különböző $\big(x_1^2$ és $x_2^2\big)$ helyen is felveszi ugyanazt az értéket, ami ellentmond a feladat első feltételének. Tehát a kérdéses függvény nem létezik.

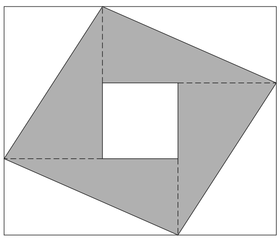
Tóth Bálint (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 9. évf.)

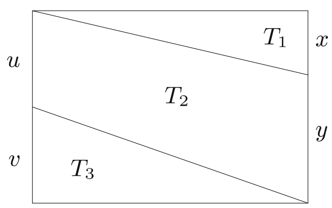
35 dolgozat érkezett. 4 pontos 28, 3 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (649–653.)

K. 649. Egy gyorsvonat és egy személyvonat egymással szemben halad két párhuzamos vágányon. A vonatok egyforma hosszúak. A sínpályán van egy alagút, amelynek két bejáratához egyszerre érnek a vonatok. A gyorsvonat innen számítva 3 másodperc, a személyvonat 6 másodperc alatt ér be teljes terjedelmében az alagútba. A vonatok az alagútban az alagút elérésének pillanatától számítva 18 másodperc múlva találkoznak egymással. Hány másodperc alatt haladnak el egymás mellett? A találkozástól számítva hány másodperc elteltével ér ki a gyorsvonat, illetve a személyvonat az alagútból teljes terjedelmében?

K. 650. Az *ábrán* látható kis négyzet oldala 3 cm, a nagy téglalap oldalai egész számok, és az egyik 2 cm-rel hosszabb a másiknál. A téglalap és a négyzet oldalai párhuzamosak, középpontjuk egybeesik. A satírozott terület úgy keletkezett, hogy a kis négyzet oldalait meghosszabbítottuk az egyik irányba, és ahol a nagy téglalap oldalait ezek elmetszették, azokat a pontokat kötöttük össze. Lehet-e a satírozott terület nagysága (cm^2-ben mérve) páros szám?





K. 651. Az *ábrán* látható területekre teljesül, hogy $T_1 : T_2 : T_3 = 2 : 7 : 3$. Mennyi az x és y, illetve az u és v szakaszok aránya?

K. 652. Egy dobozban sárga, kék és piros golyók vannak, mindegyikből 10-10 darab. Hányféleképpen oszthatjuk szét ezeket egy 10-es és egy 20-as csoportra úgy, hogy mindkét csoportban mindegyik színű golyóból legyen legalább egy? (Az azonos színű golyókat nem tudjuk egymástól megkülönböztetni.)

K. 653. Tudjuk, hogy $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$ és $a, b > 1$ egész számok. Adjuk meg $a + b$ minimális értékét.

❄

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1588–1594.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1588. Legyenek az $ABCD$ négyszög AB, illetve AD oldalainak A-hoz közelebbi harmadolópontjai E és F, a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontja pedig G. Tükrözzük a G pontot E-re, majd az így kapott tükörképet F-re. Igazoljuk, hogy a kapott tükörkép ráesik a négyszög valamely oldalára. Melyik oldalon van, és milyen arányban osztja azt?

C. 1589. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(y^2 + y - x - 1)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4.$$

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)