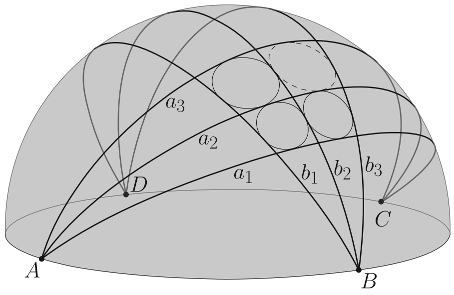


13. ábra

3. Bizonyítsuk be a 3. lemmát koordinátákkal.

4. Mutassuk meg, hogy a 7. ábrát inverzióval egy félgömbfelületre képezhetjük úgy, hogy az a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 görbék képei a gömbön fél főkörök legyenek (*13. ábra*). Az így kapott gömbi állítást bizonyítsuk be a békaszemmódszerrel.

Irodalom

[1] Kós Géza: Hiperbolikus Escher-grafikák. KöMaL 55/1 (2005. január), 2–10. `https://www.komal.hu/cikkek/2005-01/escher.h.shtml`

[2] G7 feladat. IMO Shortlist 2010, 60–63. `https://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf`

Kós Géza

Válogatás az **Emelt szintű érettségi matematikából – 24 válogatott gyakorló feladatsor megoldással** című kiadványunkból*

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} 9^x \cdot 3^y &= 81, \\ 6x + 6y + 5xy &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (11\ pont)$$

2. A miskolci pályaudvar utasellátó büféjének ajtaján a következő tájékoztató szöveg olvasható:

Nyitva tartás 03.30–23.30.
Műszakátadás miatt 07.30–08.30 és 19.30–20.30 között zárva!

a) Mekkora eséllyel találjuk nyitva a büfét, ha reggel 7 és este 9 között véletlenszerűen érkezünk a bejáratához?

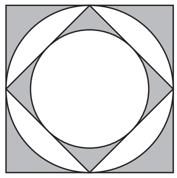
b) Egy vargabélest vásároltunk 200 Ft-ért. A pénzt pontosan kiszámolva adtuk át a pénztárosnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg, ha 20 Ft-osnál kisebb címletet nem adtunk, és a sorrend nem számít?

c) Az utánunk következő vásárló három péksüteményt szeretne venni, a kínálat: diós búrkifli, ízes levél, túrós táska, meggyes rétes és kakaós csiga. Mekkora

*Bővebb információ: `https://www.komal.hu/kiadvany/emeltszintu3.h.shtml`.

eséllyel találjuk el, hogy mit fog vásárolni, ha azt feltételezzük, hogy mindegyik választásának ugyanannyi az esélye? (*12 pont*)

3. Az *ábrán* egy egység oldalú négyzet, annak beírt köre, oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet és annak is a beírt köre látható.



a) Hány százalékát színeztük ekkor szürkére a nagy négyzetnek?

b) Ismételjük meg ezt az eljárást végtelen sokszor. Hány százalékát színeztük így szürkére a nagy négyzetnek? (*14 pont*)

4. Egy 30 fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze

a) egy ötfős csoportot; (*2 pont*)

b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot; (*4 pont*)

c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie; (*4 pont*)

d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki? (*4 pont*)

II. rész

5. Adott a $[0;9]$ intervallumon értelmezett $f(x)=2\sqrt{x}$ függvény.

a) Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsa az x tengelyre, a harmadik csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Mekkora e háromszög területe?

b) Egy téglalap egyik oldala az x tengelyre, egy másik oldala az $x=9$ egyenesre, egy csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen téglalap területét.

c) Az $f(x)$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x=a$ egyenes felezi. Határozzuk meg az a paraméter értékét. (*16 pont*)

6. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-7;-2)$, $B(11;-2)$, $C(-1;10)$.

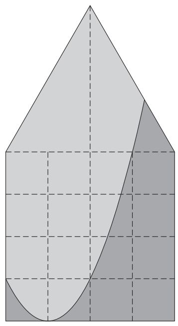
a) Adjuk meg a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra található K pont koordinátáit.

b) Adjuk meg a háromszög M magasságpontjának koordinátáit.

c) Igazoljuk számítással, hogy az ABC háromszögben az S súlypont harmadolja az MK szakaszt. (*16 pont*)

7. *a*) Két pozitív egész szám köbének különbsége 169. Melyek ezek a számok?

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív természetes szám ötödik hatványából kivonjuk magát a számot, a különbség minden esetben osztható lesz a három legkisebb pozitív prímszámmal. (*16 pont*)



8. Egy ház tűzfala egy négyzetből és egy szabályos háromszögből áll. A falat két színnel szeretnék vakolni. A két rész között a határvonal egy parabola lesz, amit a mellékelt *ábra* mutat. A házikó parabola feletti részét világosabbra, a többit sötétebbre vakolják. A felület hány százaléka lesz sötétebb árnyalatú? (*16 pont*)

9. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, amelyre $\cos x$ és $\cos 2x$ négyzetösszege a $\cos 3x$ négyzetével egyenlő. (*16 pont*)

9. Van hatféle számkártyánk, mindegyikből 1-1 darab: 1, 2, 3, 4, 5, 6. A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.

a) Igazoljuk, hogy $\frac{4}{15}$ annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz 12-vel.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy 12-vel osztható.

c) Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot.

Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját. (*16 pont*)

Összeállította:
Számadó László
Budapest

Megoldásvázlatok a 2020/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x - 1 = 0,$ (*7 pont*)

b) $\sqrt{6-x} - \sqrt{5-2x} = 1.$ (*6 pont*)

Megoldás. *a*)

$$2 \cdot \cos^2 x - 1 + 3 \cdot \cos x - 1 = 0,$$

$$2 \cdot \cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0.$$

Ebből: $\cos x = -2$ vagy $\cos x = \frac{1}{2}$. A $\cos x = -2$ egyenletnek nincs megoldása, mert $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vagy $x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát a kapott gyökök kielégítik az eredeti egyenletet.