

páronként diszjunkt eltoltjaira. Mivel H megszámlálható, elég belátni, hogy ha valamely $e_1, \dots, e_n \in E$ számokkal képzett $A + e_i$ eltoltak nem tartalmazzák a $h \in H$ számot, akkor van olyan $e \in E$ szám, hogy az $A + e$ eltolt tartalmazza a h számot és diszjunkt $A + e_1, \dots, A + e_n$ mindegyikétől.

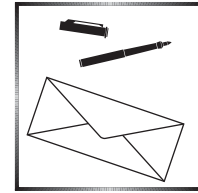
Válasszuk az $r \geq 2$ egész számot olyan nagynak, hogy $3^{r-2}(h - e_i)$ egész legyen minden $i = 1, \dots, n$ esetén, továbbá $3^{-r} \leq 2 - |h|$ álljon. Ekkor $|h| - (1 - 3^{-r}) \leq 1$, tehát tudunk olyan előjelet választani, hogy az $a = \pm(1 - 3^{-r})$ és $e = h - a$ választással $|e| \leq 1$, azaz $e \in E$ legyen. Ekkor $h = a + e \in A + e$.

Már csak azt kell belátnunk, hogy $b, c \in A$ és $1 \leq i \leq n$ esetén $b + e \neq c + e_i$, azaz $b + h - a \neq c + e_i$, vagyis $a - b + c \neq h - e_i$. Mivel $h \notin A + e_i$, ezért $h - e_i \notin A$, tehát $a = b$ vagy $a = -c$ esetén készen vagyunk, hiszen ekkor $a - b + c \in A$. (Utóbbi esetben használjuk, hogy az A halmaz a 0-ra szimmetrikus.) Egyéb esetben belátjuk, hogy $3^{r-2}(a - b + c)$ nem egész, amiből a kívánt nem-egyenlőség azonnal következik.

Legyen $b = \pm(1 - 3^{-s})$ és $c = \pm(1 - 3^{-t})$, ekkor $3^r(a - b + c) = \pm(3^r - 1) \mp (3^r - 3^{r-s}) \pm (3^r - 3^{r-t})$, ahol 3^r egy 9-cel osztható egész, $\mp 1 \pm 3^{r-s} \mp 3^{r-t}$ pedig nem, mert $\max(s, t) > r$ esetén ez vagy ∓ 1 , vagy nem egész, $\max(s, t) \leq r$ esetén pedig vagy ∓ 3 , vagy nem osztható 3-mal. Így tehát $3^r(a - b + c)$ nem lehet 9-cel osztható egész. \square

Pach Péter Pál

Térbe kilépő bizonyítások V.¹



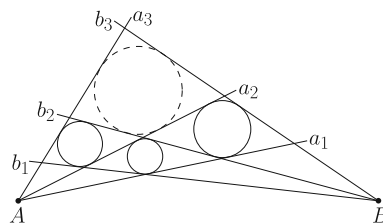
Egy olimpiai feladatjavaslat története

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Ez a rész egy kicsit személyesebb lesz. Egy feladatjavaslat történetét mesélem el, amit a 2010-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára (IMO) javasoltam.

A kiinduló feladat

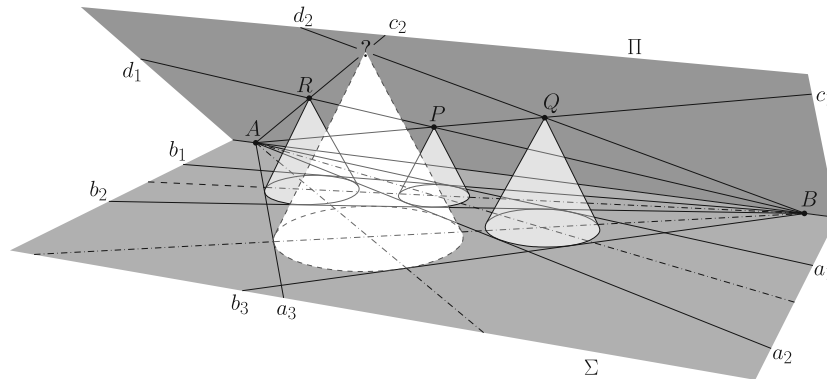
Két pontból indítsunk három-három félegyenest úgy, hogy bármelyik két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást; ezek a félegyenések négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha a négyszögek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is érintőnégyszög (1. ábra).



1. ábra

¹A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

A feladatot sokféleképpen megoldhatjuk, például az előző részben bemutatott kúpokkal. Használjuk az 1. és a 2. ábra jelöléseit; feltesszük, hogy az $a_1b_1a_2b_2$, az $a_1b_2a_2b_3$, valamint az $a_2b_1a_3b_2$, négyszögek érintőnégyszögek, és ebből fogjuk megmutatni, hogy az $a_2b_2a_3b_3$ négyszög is érintőnégyszög.



2. ábra

A tervünk az, hogy a Σ alapsíkunkból a térbe kilépve, a négyszögekbe írt körökre egymáshoz hasonló kúpokat illesztünk, majd megszerkesztjük a negyedik kúpot. (A 2. ábrán olyan kúpokat rajzoltam, amelyek magassága kétszerese az alapkörük sugarának; a konkrét aránynak nincs jelentősége.)

Az olyan kúpoknak a csúcsai, amelyek alapköre érinti az a_1 és a_2 félegyeneseket, egy A -ból induló félegyenesen vannak; jelöljük ezt a félegyeneset c_1 -gyel. Hasonlóan, az a_2 és a_3 félegyeneseket, a b_1 és b_2 félegyeneseket, illetve a b_2 és b_3 félegyeneseket érintő körökre emelt kúpok csúcsai is egy-egy félegyenesen vannak; jelölje ezeket rendre c_2 , d_1 , illetve d_2 (2. ábra).

A c_1 és d_1 félegyenesek a P pontban, az $a_1b_1a_2b_2$ négyszögbe írt körhöz tartozó kúp csúcsában metszik egymást. Ugyanígy, a c_1 és d_2 , illetve a c_2 és d_1 is metszik egymást a másik két kúp csúcsában, a Q és a P pontban. A feladat állításához elég azt igazolnunk, hogy a c_2 és a d_2 félegyenes is elmetszi egymást, ugyanis a metszéspontjuk egyértelműen meghatározza a negyedik kúpot, amelynek alapköre érinti az a_2 , b_2 , a_3 , b_3 félegyenesek mindegyikét.

Legyen Π az ABP háromszög síkja. A Q pont a $c_1 = AP$ egyenesen, az R pont pedig a $d_1 = BP$ egyenesen van, tehát $Q, R \in \Pi$. Akkor viszont a $c_2 = AR$ és a $d_2 = BQ$ félegyenes is a Π síkban fekszik.

A c_2 és a d_2 félegyenesek Σ -ra való merőleges vetülete az a_2 és az a_3 , illetve a b_2 és b_3 szögfelezője, ezek az $a_2b_2a_3b_3$ négyszög belsejében metszik egymást; a metszéspontjukat Σ -ra merőlegesen visszavetíthetjük Π -re, az így kapott pont c_2 -nek és d_2 -nek közös pontja, ami bizonyítja az állítást.

Valamikor 2009 őszén a 6-os villamoson kapaszkodva ezen a klasszikus feladaton gondolkodtam, akkor jöttem rá, hogy a bizonyítás hiperbolikus geometriában is elmondható, ha a kúpok hasonlósága helyett azt kötjük ki, hogy az alkotóik ugyanakkora szögben metszik az alapsíkot. Hazaérve megpróbáltam az észrevétel-

ből feladatot gyártani úgy, hogy lerajzoltam az ábrát a hiperbolikus sík egyik jól ismert modelljében, a Poincaré-féle körmodellben.

A Poincaré-féle körmodell²

A hiperbolikus sík *modellje* azt jelenti, hogy bizonyos dolgokat elnevezünk „pontnak”, pontok bizonyos halmazait „egyenesnek”, definiáljuk a pontok sorrendjét az egyeneseken, pontok „távolságát” és egyenesek „szögét”, és mindezt úgy, hogy az összes geometriai axiómánk teljesüljön, kivéve a párhuzamossági axiómát, ami helyett azt kötjük ki, hogy bármely egyeneshez bármely rajta kívül fekvő pontból végtelen sok párhuzamos egyenest lehet húzni.

Egy korábbi, a KöMaL honlapján is elérhető cikkben [1] összefoglaltam négyféle hiperbolikus modellt, a Beltrami–Cayley–Klein-modellt, a Poincaré-féle kör-, félsík- és félgömbmodellek alapvető definícióit és a modellek közötti megfeleltetéseket. A mostani játékunkhoz csak a körmodell néhány alapvető tulajdonságára lesz szükség.

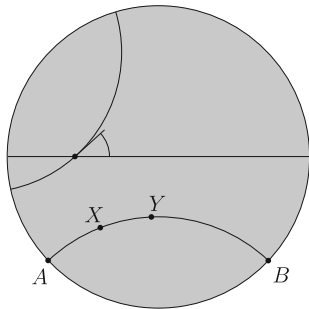
Vegyünk az euklideszi síkon egy körlapot, ez lesz az „alapkör”. A kör belsejébe eső pontok a körmodell pontjai. A körmodell egyenesei az alapkört merőlegesen metsző köröknek az alapkör belsejébe eső ívei, beleértve az alapkör átmérőit is (3. ábra).

Két pont távolságát a következőképpen definiálhatjuk: ha X és Y két pont az alapkörre merőleges AB köríven, akkor az X és Y pontok távolsága

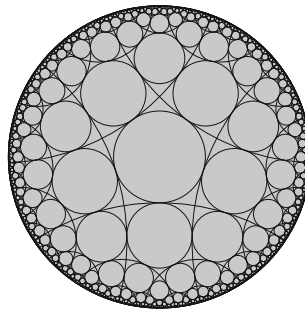
$$d(X, Y) = k \cdot |\ln(ABXY)| = k \cdot \left| \ln \frac{AX \cdot YB}{AY \cdot XB} \right|.$$

(A középső képletben négy, egy körön fekvő pont kettősviszonya szerepel, ami pontosan ugyanúgy fejezhető ki a húrok hosszával, mint amikor egy egyenesre esnek.)

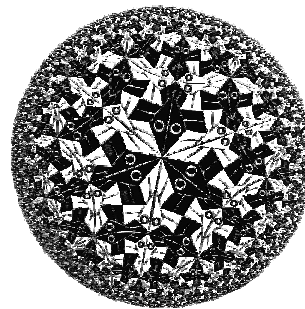
A távolságoknál sokkal szebb a szögek definíciója: két „egyenes” szöge éppen akkora, mint amekkorának a modellben látszik.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

A modellben a tengelyes tükrözések az egyeneseknek megfelelő körívre való inverziók; ennek következménye, hogy a hiperbolikus körvonalak a körmodellben is

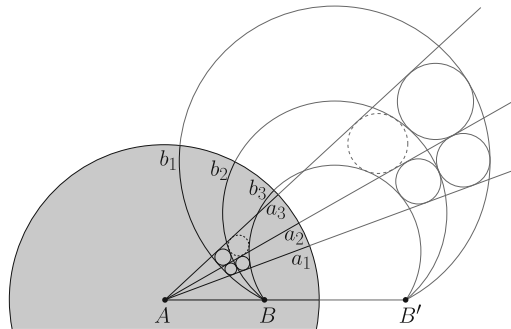
²Jules Henri Poincaré francia matematikus, 1854–1912

körvonalnak látszanak. A modell határához közeledve az egyenlő nagyságú köröket a modellben egyre kisebb körökkel kell lerajzolnunk; a 4. ábrán a körmodell egy kicsempézése látható olyan egybevágó szabályos ötszögekkel, amelyek szögei derékszögek, és az ötszögekbe írt köröket is megrajzoltam.

A körmodell csempézéseit rengeteg művészi alkotásban használták már fel; például az 5. ábrán látható Escher³ *Circle Limit I* című fametszete.

Olimpiai feladatjavaslat

Az 6. ábrán az 1 ábra hiperbolikus változatát rajzoltam le: az A pont az alapkör középpontja, az ebből kiinduló a_1, a_2, a_3 félegyenesek az alapkör sugarai. A B pont egy másik pont a modellben, az ebből kiinduló félegyenesek képei az alapkörre merőleges körívek. Az ábrát invertálhatjuk az alapkör határára; a b_1, b_2, b_3 körívek meghosszabbításai az B pont inverzén mennek át, és a modellen kívül megkapjuk az ábra tükörképét is.



6. ábra

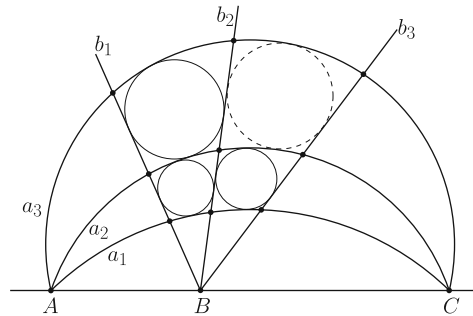
Az ábrával nem voltam elégedett. Túl nyilvánvaló volt, hogyan készült, a tükörkép ábra létrejötte sem tetszett, és a képen szereplő sugarakat és köríveket sem könnyű megrajzolni úgy, hogy metsszék egymást. Azt találtam ki, hogy megváltoztatom a pontok sorrendjét: az A pont nem a BB' szakasz meghosszabbításán, hanem a belsejében lesz, ettől kezdve az ábra többé már nem a körmodell része. Az alapkör lerajzolására sincs szükség. A pontok cseréje után ez lett az új feladat:

Feladat. *A sík A és C pontjait az a_1, a_2 és a_3 körívek úgy kötik össze, hogy az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, és az a_2 körív az a_1 és az a_3 között helyezkedik el. Az AC szakasz egy B pontjából indulnak a b_1, b_2 és b_3 félegyenesek, ugyanabban a félsíkban, mint a körívek; a b_2 félegyenes b_1 és b_3 között helyezkedik el.*

Tekintsük a körívek és félegyenesek által határolt, négyoldalú $a_1b_1a_2b_2, a_1b_2a_2b_3, a_2b_1a_3b_2,$ és $a_2b_2a_3b_3$ tartományokat. Bizonyítsuk be, hogy ha ezek közül valamelyik háromba kört lehet írni, akkor a negyedikbe is (7. ábra).

A feladatot (kicsit más betűzéssel) javasoltuk a 2010-es, Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára, amelyet Kazahsztán új fővárosában, Aszتانában rendeztek.

³Maurits Cornelis Escher holland grafikus, 1898–1972.



7. ábra

A pontok átrendezése miatt az eredeti, hiperbolikus geometriai megoldás már nem működik, de egy feladatjavaslathoz egyébként is illik elemi megoldásokat mellékelni. Két megoldást mutatok.

1. megoldás, kúpokkal

A kiinduló feladat mintájára, az ábrában szereplő körökre egymáshoz hasonló kúpokat fogunk illeszteni, majd megszerkesztjük a negyedik kúpot. A változás az, hogy most olyan körök is szerepelnek, amelyek két rögzített körív „közé” vannak írva. Megvizsgáljuk, hol lehetnek, milyen pályán mozoghatnak az ilyen körök középpontjai, és a körökre illesztett kúpok csúcsai.

1. lemma. *Azoknak a köröknek a középpontjai, amelyek kívülről érintik a_i -t és belülről érintik a_{i+1} -et, egy, A-t és C-t összekötő ellipsziszíven vannak. ($i = 1$ vagy $i = 2$.)*

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $i = 1$.

Legyen k olyan kör, amely kívülről érinti a_1 -et és belülről érinti a_2 -t, az érintési pontjai az a_1 íven T , az a_2 íven U , a középpontja P . Legyen az a_1 kör középpontja O_1 , az a_2 középpontja O_2 , a körök sugarai r , r_1 , illetve r_2 (8. ábra).

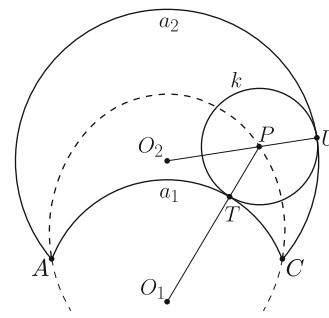
Vegyük észre, hogy

$$O_1P + O_2P = (O_1T + TP) + (O_2U - PU) = (r_1 + r) + (r_2 - r) = r_1 + r_2,$$

vagyis P rajta van az O_1, O_2 fókuszú, $r_1 + r_2$ nagytengelyű ellipszisen; ez az ellipszis átmegy az A és C pontokon, mert $O_1A + O_2A = O_1C + O_2C = r_1 + r_2$.

Megfordítva, ha P egy pont az ellipszisnek az a_1 és a_2 közötti íven, akkor a P középpontú, $r = O_1P - r_1 = r_2 - O_2P$ sugarú kör kívülről érinti a_1 -et és belülről érinti a_2 -t.

2. lemma. *Legyen φ rögzített hegyesszög, és $i = 1$ vagy $i = 2$. Tekintsük azokat a köröket, amelyek kívülről érintik a_i -t és belülről érintik a_{i+1} -et, és emeljünk ezekre*

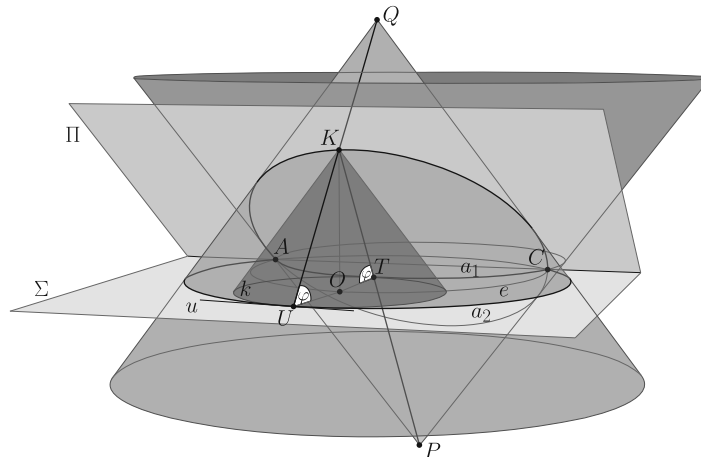


8. ábra

felfelé ezekre a körökre olyan kúpokat, amelyek alkotói φ szöget zárnak be a Σ síkkal. Az így kapható kúpok csúcsai egy, A -t és C -t összekötő ellipszisíven vannak.

Bizonyítás. Ismét feltesszük, hogy $i = 1$. Illesszünk az a_1 körre lefelé, az a_2 -re felfelé egy-egy kúppalástot, amelyek alkotói φ szöget zárnak be Σ -val; ezek csúcsa legyen P , illetve Q .

Legyen k egy tetszőleges kör, amely kívülről érinti a_1 -et és belülről érinti a_2 -t, a középpontja O , az érintési pontjai az a_1 íven T , az a_2 íven U . A k -ra felfelé illesztett kúp csúcsa legyen K . (9. ábra).



9. ábra

Legyen u a k és az a_2 ív U -ban húzott közös érintője. Az UK félegyenes a k -ra emelt kúp, az UQ félegyenes pedig az a_2 -re emelt kúp alkotója. Mindkettő merőleges u -ra, φ szöget zár be Σ -val, és a körök belseje felé dől, ezért a két félegyenes ugyanaz. Tehát a K pont rajta van az UQ egyenesen, és ezáltal az a_2 ívre illesztett kúpon.

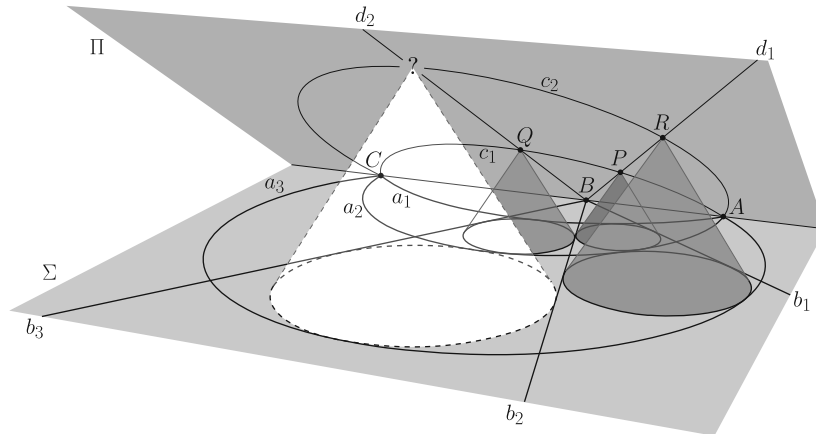
Ugyanígy láthatjuk, hogy a TK félegyenes a k -ra illesztett kúp, a TP félegyenes az a_1 -re lefelé illesztett kúp alkotója, és ezek egymás meghosszabbításai, így a K pont az a_1 -re illesztett kúppaláston is rajta van, tehát K közös pontja az a_1 -re és az a_2 -re illesztett kúppalástoknak.

A cikk 3. részében láttuk, hogy párhuzamos tengelyű, azonos meredekségű kúpok közös pontjai egy síkban vannak. Tehát a lehetséges K pontok egy rögzített Π síkban vannak. A két kúpnak A és C is közös pontja, tehát a Π sík illeszkedik az AC egyenesre.

Az 1. lemma szerint a lehetséges O pontok egy e ellipszisívet alkotnak, amely összeköti A -t és C -t. Ha ezt az ellipszist Σ -ra merőlegesen visszavetítjük Π -re, megkapjuk a lehetséges K pontokat tartalmazó ellipszisívet a Π síkban.

Most térjünk rá a feladat megoldására. A 2. lemma szerint az a_i és a_{i+1} ívek közé írt körökre emelt kúpok csúcsai egy A -t és C -t összekötő c_i ellipszisíven vannak ($i = 1, 2$). A b_j és b_{j+1} ívek közé írt körökhöz tartozó kúpok csúcsai pedig egy B -ből induló d_j egyenesen ($j = 1, 2$).

Legyen P , Q és R az $a_1b_1a_2b_2$, az $a_1b_2a_2b_3$, illetve az $a_2b_1a_3b_2$ tartományokba írt körre emelt kúp csúcsa; ekkor P a c_1 és d_1 metszéspontja, Q a c_1 és d_2 metszéspontja, és R a c_2 és d_1 metszéspontja. A feladat megoldásához elég azt igazolnunk, hogy c_2 és d_2 is elmetszi egymást (10. ábra).



10. ábra

Legyen Π az a félsík, aminek határa az AC egyenes, és illeszkedik a BPR félegyenesre. Ez a félsík tartalmazza a c_1 és c_2 ellipszisíveknek három-három pontját (A, C, P , illetve A, C, R), így mindkét ellipszisív része Π -nek. Mivel c_1 átmegegy Q -n, a Q pont és a d_2 félegyenes is része Π -nek. A c_2 ellipszisnek B belső pontja, ezért a BQ félegyenes elmetszi c_2 -t. Ezzel a feladatot megoldottuk.

2. megoldás, térbe kilépés nélkül

Az előbbi megoldást nem nehéz tisztán síkbeli bizonyítássá alakítani. Az 1. lemmára most is szükségünk lesz.

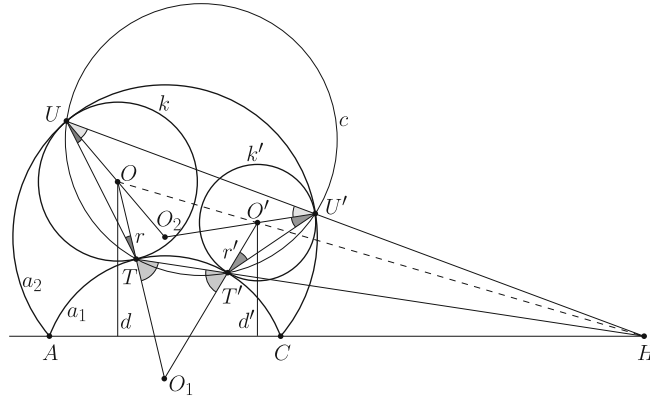
3. lemma. *Válasszunk egy tetszőleges k kört, amely kívülről érinti a_i -t és belülről érint a_{i+1} -et ($i = 1$ vagy $i = 2$), a középpontja O , sugara r , és legyen d az O pont és az AC egyenes távolsága. Az r/d arány nem függ a k megválasztásától.*

Nem nehéz észrevenni, hogy a 3. lemma a 2. lemma egyszerű átfogalmazása.

Bizonyítás. Az 1. lemmához hasonlóan legyen $i = 1$, az a_1 középpontja O_1 , az a_2 középpontja O_2 . Legyenek k és k' különböző körök, amik érintik a két ívet, sugaraik r , illetve r' ; középpontjaik O , illetve O' , távolságuk az AC egyenestől d , illetve d' . Azt akarjuk igazolni, hogy $\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'}$.

Ha k és k' szimmetrikus az O_1O_2 egyenesre, akkor az állítás triviális; feltehetjük, hogy a két kör nem egymás tükörképe. A két kör érintési pontja a két köríven legyen T, T', U és U' a 11. ábra szerint.

Legyen a k és k' körök külső hasonlósági pontja H . A k és az a_2 külső hasonlósági pontja U , a k' és az a_2 külső hasonlósági pontja U' ; a Monge-tétel szerint a három hasonlósági pont, H, U és U' egy egyenesen van. Hasonlóan, a k



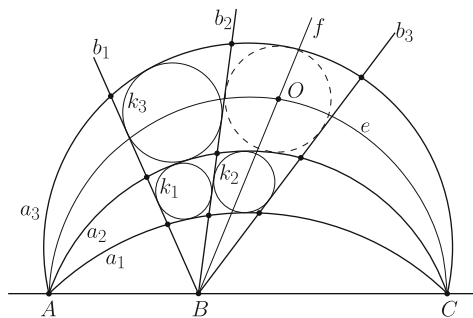
11. ábra

és az a_1 belső hasonlósági pontja T , a k' és az a_1 belső hasonlósági pontja T' ; a Monge-tétel szerint H , T és T' is egy egyenesen van. A H pont tehát a TT' és az UU' egyenes metszéspontja.

A $TT'U'U$ négyszög szemközti szögeinek összegét összeszámolhatjuk az O_1TT' , $O_2U'U$ egyenlő szárú háromszögekből, és láthatjuk, hogy a szögek összege két szemközti csúcspárnál ugyanakkora; tehát a $TT'U'U$ négyszög húr-négyszög. (A háromszögek irányításától függően az ábra többféleképpen is kinézhet, ezért a teljes bizonyításhoz többféle esetet is meg kell vizsgálni.) Az a_1 és a $TT'UU'$ kör hatványvonala a TT' egyenes, az a_2 és a $TT'UU'$ kör hatványvonala pedig az UU' egyenes, tehát H a három kör hatványpontja, és ezen a harmadik hatványvonal, az AC egyenes is átmegy.

A k és k' köröket, sugaraikat és a d , d' távolságokat egymásba nagyíthatjuk a H pontból, ez bizonyítja, hogy $\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'}$.

Az 1. és a 3. lemma együtt megoldja a feladatot. Tegyük fel, hogy az $a_1b_1a_2b_2$, $a_1b_2a_2b_3$ és $a_2b_1a_3b_2$ tartományokba kört lehet írni; ezt a három kört jelölje rendre k_1 , k_2 , illetve k_3 . Sugaraik legyenek r_1 , r_2 , illetve r_3 ; középpontjaik távolsága az AC egyenestől d_1 , d_2 , illetve d_3 .



12. ábra

Legyen e az az 1. lemma szerinti ellipszisív, amely az a_2 és a_3 köríveket érintő körök középpontjaiból áll, és legyen f a b_2, b_3 félegyenesek szögfelezője; az e és az f metszéspontja legyen O , az O távolsága az AC egyenestől d (12. ábra).

A 3. lemma szerint $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$, továbbá a k_1 és k_3 köröket a B pontból egymásba lehet nagyítani, ezért $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_3}{d_3}$. Legyen $r = \frac{r_2}{d_2} \cdot d = \frac{r_3}{d_3} \cdot d$. A 3. lemma szerint az O középpontú, r sugarú kör érinti az a_2 és az a_3 ívet is. Továbbá, a k_2 kört a B pontból ugyanebbe a körbe nagyíthatjuk. Ezzel megszerkesztettük az $a_2 b_2 a_3 b_3$ tartomány beírt körét.

Asztanai közjáték

Asztanába megérkezve az a meglepetés ért, hogy az olimpia helyszínén létezik egy épület (a neve Shabyt), ami két párhuzamos tengelyű kúp metszete. A feladat-kiválasztó bizottság tagjaival készítettünk is néhány fényképet rólam és a feladatmról.



A „Shabyt” („Шабьт”, jelentése: *inspiráció*) művészeti egyetem Asztanában, Kazahsztán fővárosában

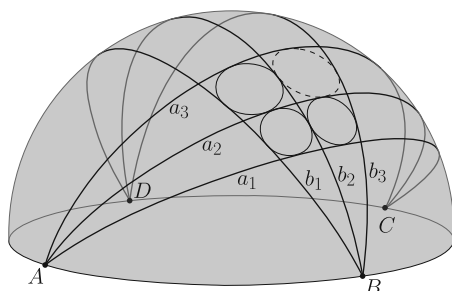
A zsűriben a feladat nem volt annyira népszerű. Többeknek tetszett, de a térgeometriától ódzkodó csendes többség gyorsan kiszavazta a lehetséges nehéz jelöltek közül. (De azért nem ez volt a legnépszerűtlenebb feladat: a C6-os feladatot még ennél is jobban utálták.)

Az olimpia megnyitó ünnepsége a Függetlenségi Palotában volt, közvetlenül a Shabyt melletti épületben. A zsűri nagy része a megnyitóra utazás közben, a buszról látta először az épületet, amikor már rég kiválasztották a hat feladatot a versenyre.

Feladatok

1. Oldjuk meg a Kiinduló feladatot a körökhöz húzott érintő szakaszok összehasonlításával.

2. Bizonyítsuk be a 2. lemmát úgy, hogy az a_1 és a_2 körívekre nem kúpokat, hanem olyan gömböket illesztünk, amelyek φ szögben metszik a Σ síkot.



13. ábra

3. Bizonyítsuk be a 3. lemmát koordinátákkal.

4. Mutassuk meg, hogy a 7. ábrát inverzióval egy félgömbfelületre képezhetjük úgy, hogy az $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ görbék képei a gömbön fél főkörök legyenek (13. ábra). Az így kapott gömbi állítást bizonyítsuk be a békaszem módszerrel.

Irodalom

- [1] Kós Géza: Hiperbolikus Escher-grafikák. KöMaL 55/1 (2005. január), 2–10.
<https://www.komal.hu/cikkek/2005-01/escher.h.shtml>
- [2] G7 feladat. IMO Shortlist 2010, 60–63.
<https://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf>

Kós Géza



Válogatás az Emelt szintű érettségi matematikából – 24 válogatott gyakorló feladatsor megoldással című kiadványunkból*

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left. \begin{aligned} 9^x \cdot 3^y &= 81, \\ 6x + 6y + 5xy &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11 \text{ pont})$$

2. A miskolci pályaudvar utasellátó büféjének ajtaján a következő tájékoztató szöveg olvasható:

Nyitva tartás 03.30–23.30.

Műszakátadás miatt 07.30–08.30 és 19.30–20.30 között zárva!

a) Mekkora eséllyel találjuk nyitva a büfét, ha reggel 7 és este 9 között véletlenszerűen érkezünk a bejáratához?

b) Egy vargabélest vásároltunk 200 Ft-ért. A pénzt pontosan kiszámolva adtuk át a pénztárosnak. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha 20 Ft-osnál kisebb címletet nem adtunk, és a sorrend nem számít?

c) Az utánunk következő vásárló három péksüteményt szeretne venni, a kínálat: diós búrkifli, ízes levél, túrós táska, meggyes rétes és kakaós csiga. Mekkora

*Bővebb információ: <https://www.komal.hu/kiadvany/emeltszintu3.h.shtml>.