II. díjban és 20 000 Ft pénzjutalomban részesül

Beke Csongor, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Szűcs Gábor* és *Varga Mária*),

Nagy Nándor, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 12. osztályos tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza* és *Dobos Sándor*),

Velich Nóra, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 11. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde* és *Kocsis Szilveszter*),

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*).

III. díjban és 15 000 Ft pénzjutalomban részesül

Jánosik Áron, a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója (tanára *Árki Tamás*) az első feladat helyes és a második feladat némileg hiányos megoldásáért.

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesül

Hámori Janka, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*) az első feladat helyes megoldásáért és a második feladatban elért értékes részeredményekért,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 11. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*) az első feladat lényegében helyes megoldásáért és a második feladatban elért értékes részeredményekért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

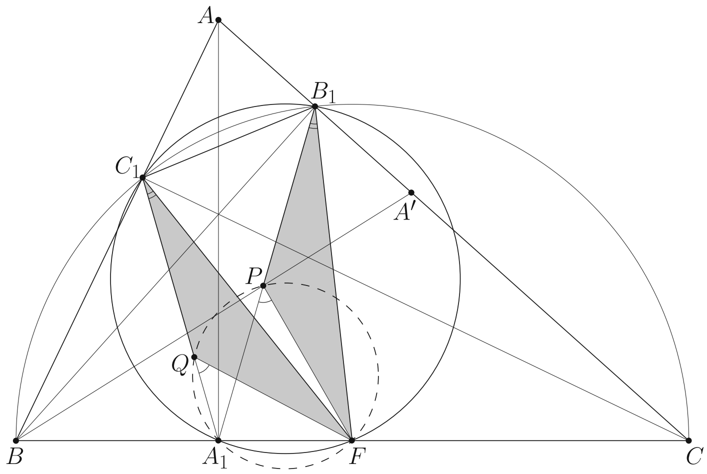
A 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB<AC<BC$, az A, B, C csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, illetve C_1. Legyen P a C_1 pont tükörképe a BB_1 egyenesre, és legyen Q a B_1 pont tükörképe a CC_1 egyenesre. Mutassuk meg, hogy az A_1PQ háromszög köré írt kör átmegy a BC oldal felezőpontján.*

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a P pont az A_1B_1, a Q pedig az A_1C_1 szakasznak belső pontja. Legyen A' az A csúcsnak a BB_1 magasságra vonatkozó tükörképe. Az $AB<BC$ feltétel miatt $AB_1<B_1C$, ezért az A' pont a B_1C szakasznak belső pontja. A BA' szakasz a háromszög belsejében halad, és P ennek belső pontja, tehát P a háromszög belsejébe esik.

Jól ismert, hogy bármely hegyesszögű háromszögben a magasságvonalak felezik a talpponti háromszög szögeit, ezért a B_1C_1 félegyenesnek a BB_1 magasságra vonatkozó tükörképe a B_1A_1 félegyenes. A P pont tehát a B_1A_1 félegyenesnek a háromszög belsejébe eső szakaszán, vagyis az A_1B_1 szakasz belsejében helyezkedik el.

Hasonlóan láthatjuk, hogy $AC < BC$ miatt Q az A_1C_1 szakasznak belső pontja.



Legyen BC felezőpontja F; az FB_1 és FC_1 szakaszok a BC oldal Thalész-körének sugarai, ezért $FB_1 = FC_1$. Szintén jól ismert, hogy az A_1, B_1, C_1, F pontok egy körön, a háromszög Feuerbach-körén vannak.

Vegyük észre, hogy az FB_1P és FC_1Q háromszögek egybevágók, mert $FB_1 = FC_1$, $B_1P = B_1C_1 = C_1Q$, és $PB_1F\sphericalangle = A_1B_1F\sphericalangle = A_1C_1F\sphericalangle = QC_1F\sphericalangle$ az A_1B_1F ívhez tartozó kerületi szögek a Feuerbach-körön. Tehát

$$A_1PF\sphericalangle = 180^\circ - FPB_1\sphericalangle = 180^\circ - FQC_1\sphericalangle = A_1QF\sphericalangle,$$

ez pedig mutatja, hogy az A_1, F, P, Q pontok egy körön vannak, ahogy az bizonyítandó volt. $\square$

2. *Legyen n pozitív egész szám. Határozzuk meg az összes olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert, amely az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaz bizonyos részhalmazaiból áll, és amelyre minden rögzített, nemüres $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ mellett ugyanannyi $A \in \mathcal{F}$ esetén lesz $A \cap X$ elemszáma páros, mint páratlan.*

I. megoldás. Számoljuk meg kétféleképpen, hogy hány olyan (A, B, C) rendezett hármas van, melyre A és B az $\mathcal{F}$ halmazrendszer két különböző eleme, $C \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ pedig egy olyan nemüres részhalmaz, melyre az $A \cap C$ és $B \cap C$ halmazok elemszámának paritása különbözik.

(∗) Először is megjegyezzük, hogy bármely (véges) nemüres S halmaz részhalmazainak pontosan a fele páros, illetve páratlan méretű. Sőt, általánosabban, ha $T \supseteq S$ egy (véges) halmaz, akkor T részhalmazainak éppen a fele metszi (a nemüres) S-et páros, illetve páratlan elemszámú halmazban (hiszen S minden részhalmaza ugyanannyiféleképpen, $2^{|T \setminus S|}$-féleképpen, egészíthető ki T részhalmazává). Ezt az észrevételt a megoldás során többször is fel fogjuk használni.

Legyen $|\mathcal{F}|=t$. Először A és B megválasztásával kezdjük: A-ra t lehetőség van, ezután B-re $(t-1)$, hiszen $A\neq B\in\mathcal{F}$. Ezután pontosan azok a C nemüres halmazok megfelelők, melyek az $A\Delta B$ (nemüres) halmazt (vagyis A és B szimmetrikus differenciáját) páratlan sok elemben metszik. Ezt a feltételt $(*)$ alapján a részhalmazok fele teljesíti (és nincs köztük az $\emptyset$), így a megfelelő C halmazok száma 2^{n-1}. Tehát a megfelelő (A,B,C) hármasok száma $t(t-1)2^{n-1}$.

Most ugyanezt másféleképpen is megszámoljuk: először C-t választjuk meg, erre (2^n-1)-féle lehetőség van. Ezután az olyan (A,B) párok lesznek megfelelők, melyekre $|A\cap C|$ és $|B\cap C|$ paritása különböző. Az $A\in\mathcal{F}$ halmaz tetszőlegesen megválasztható, majd ezután a feltétel szerint éppen $t/2$ esetben lesz $|B\cap C|$ paritása megfelelő (vagyis $|A\cap C|$ paritásától különböző). Így a hármasok száma $(2^n-1)t(t/2)$.

A $t(t-1)2^{n-1}=(2^n-1)t(t/2)$ (t-ben másodfokú) egyenlet megoldásai $t=0$ és $t=2^n$. Tehát az üres halmazon és az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszeren kívül nincs megfelelő $\mathcal{F}$.

Ez a két halmazrendszer pedig teljesíti a feltételeket: ha $\mathcal{F}$ az üres halmazrendszer, akkor $A\cap X$ elemszáma 0-szor lesz páros, 0-szor lesz páratlan; ha pedig $\mathcal{F}$ az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszer, akkor $(*)$ szerint bármely nemüres X-re $A\cap X$ elemszáma 2^{n-1} esetben páros, 2^{n-1} esetben páratlan.

Tehát két megfelelő halmazrendszer van: az üres halmaz és az $\{1,2,\ldots,n\}$ összes részhalmazát tartalmazó halmazrendszer. $\square$

II. megoldás (Fleiner Zsigmond és Velich Nóra megoldása alapján). Megmutatjuk, hogy csak az üres halmazrendszer és az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszer megfelelő.

Legyen ismét $|\mathcal{F}|=t$. Készítsünk egy $t\times 2^n$ méretű táblázatot, melynek sorai az $\mathcal{F}$-beli halmazoknak, oszlopai pedig az $\{1,2,\ldots,n\}$ részhalmazainak felelnek meg. Bármely $A\in\mathcal{F}$ és $X\subset\{1,2,\ldots,n\}$ halmazok esetén az A-nak megfelelő sor és az X-nek megfelelő oszlop közös mezőjébe írjunk $(+1)$-et, ha $|A\cap X|$ páros, illetve (-1)-et, ha $|A\cap X|$ páratlan. Ebben a táblázatban számítsuk ki a számok összegét kétféleképpen: oszloponként és soronként is.

A feltétel szerint bármely nemüres X esetén az $A\in\mathcal{F}$ halmazoknak pontosan a felére lesz $|A\cap X|$ páros, illetve páratlan, vagyis az X-nek megfelelő oszlopban a számok fele $+1$, fele -1; az összegük 0. Az üres halmaz minden $A\in\mathcal{F}$-et a páros üres halmazban metsz, tehát az üres halmaznak megfelelő oszlopban mind a t elem $+1$. Azt kaptuk, hogy a táblázatban az elemek összege t.

Ha $\emptyset\in\mathcal{F}$, akkor az $\emptyset$-nak megfelelő sorban csupa $+1$ áll, ezek összege 2^n. Tekintsünk most egy tetszőleges nemüres $A\in\mathcal{F}$ elemet és a neki megfelelő sort. Mivel az A nemüres, az $\{1,2,\ldots,n\}$ részhalmazaival vett metszeteinek éppen a fele páros, iletve páratlan; az ilyen sorokban az elemek összege 0. Összességében, a táblázat összege 2^n, ha $\emptyset\in\mathcal{F}$, és 0, ha $\emptyset\notin\mathcal{F}$.

A kétféle összeszámolásból azt kaptuk, hogy $t=0$ vagy $t=2^n$, vagyis $\mathcal{F}$ az üres halmazrendszer, vagy pedig $\{1,2,\ldots,n\}$ összes részhalmazából áll. Azt, hogy ez a két halmazrendszer teljesíti a feltételeket, ugyanúgy ellenőrizhetjük, mint az I. megoldásban. □

3. *Igaz-e, hogy ha H és A a számegyenes korlátos részhalmazai, akkor H legfeljebb egyféleképpen bontható fel A páronként diszjunkt eltolt példányaira? (Végtelen sok eltolt példányt is megengedünk.)*

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kérdéses következtetés nem igaz. Rekurzívan felépítjük A-t, H-t, és az $E \neq E'$ eltoláshalmazokat (mind $\mathbb{R}$ nemüres részhalmazai), úgy, hogy

$$H = \bigcup_{e \in E} (A+e) = \bigcup_{e' \in E'} (A+e'),$$

és mind az $A+e = \{a+e : a \in A\}$ $(e \in E)$ eltoltak, mind az $A+e' = \{a+e' : a \in A\}$ $(e' \in E')$ eltoltak páronként diszjunktak.

Legyen először $A_1 = \{0\}$, $E_1 = \{0\}$, $E'_1 = \{1\}$, és $H_1 = (A_1+E_1) \cup (A_1+E'_1) = \{0,1\}$. Innen rekurzívan haladunk tovább. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a véges A_n, E_n, E'_n halmazokat úgy, hogy $E_n \cap E'_n = \emptyset$, A_n+E_n és $A_n+E'_n$ minden általuk lefedett elemet egyszer fednek (vagyis az $A+e$ $(e \in E_n)$ halmazok páronként diszjunktak, és az $A+e'$ $(e' \in E'_n)$ halmazok is páronként diszjunktak). Legyen ekkor $H_n = (A_n+E_n) \cup (A_n+E'_n)$. Most egymás után minden egyes $h \in H_n$ elemre a következőt tesszük: ha h eddig nem volt benne A_n+E_n-ben, akkor beteszünk A_n-be egy a, E_n-be egy e elemet, hogy azok összege éppen h legyen, és a korábbi tulajdonságok ne romoljanak el, azaz a ne legyen $a_1+e_1-e_2$ alakú (ahol ezek korábbi elemek: $a_1 \in A_n$, $e_1, e_2 \in E_n$), és e se legyen $e_1+a_1-a_2$ alakú (ahol $e_1 \in E_n$, $a_1, a_2 \in A_n$), sőt, az új e ne legyen E'_n-ben sem. Mindegyik feltétel véges sok elem letiltását jelenti. Ugyanígy járunk el $A_n+E'_n$ esetében is. Így kapjuk az $A_{n+1}, E_{n+1}, E'_{n+1}$ halmazokat, nyilván $H_n \subseteq A_{n+1}+E_{n+1}$, $H_n \subseteq A_{n+1}+E'_{n+1}$.

Világos, hogy $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E'_n$, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ megfelelnek, amennyiben a korlátosság is teljesül. Azonban a korlátosságot is könnyen betarthatjuk, ha minden új elemet a $(-2,2)$ intervallumból választunk a következőképpen: egy tipikus lépésben egy adott $H_n \ni h \in (-2,2)+(-2,2) = (-4,4)$ elemet akarunk felírni $a+e$ alakban, ahol $a \in A_{n+1}$, és $e \in E_{n+1}$ (vagy E'_{n+1}). Világos, hogy mivel csak véges sok letiltott elem van, léteznek ennek megfelelő $a, e \in (-2,2)$ számok. □

II. megoldás (Matolcsi Dávid dolgozata alapján). Legyen H a $(-2,2)$ nyílt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Legyen $A \subset (-1,1)$ a $\pm(1-3^{-r})$ alakú számok halmaza, ahol r nemnegatív egész. Be fogjuk látni, hogy H többféleképpen is felbontható A-nak páronként diszjunkt eltoltjaira.

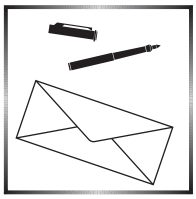
Legyen E a $[-1,1]$ zárt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Ekkor $A+E = \{a+e : a \in A,\ e \in E\} \subseteq H$ (itt valójában egyenlőség áll). Mivel A és $A+2/3$ is tartalmazza a $2/3$ számot, ezért A-nak ez a két eltoltja nem diszjunkt. Elég belátni, hogy mindkettő kiegészíthető H felbontásává A-nak páronként diszjunkt eltoltjaira. Mivel H megszámlálható, elég belátni, hogy ha valamely $e_1, \dots, e_n \in E$ számokkal képzett $A + e_i$ eltoltak nem tartalmazzák a $h \in H$ számot, akkor van olyan $e \in E$ szám, hogy az $A + e$ eltolt tartalmazza a h számot és diszjunkt $A + e_1, \dots, A + e_n$ mindegyikétől.

Válasszuk az $r \geqslant 2$ egész számot olyan nagynak, hogy $3^{r-2}(h - e_i)$ egész legyen minden $i = 1, \dots, n$ esetén, továbbá $3^{-r} \leqslant 2 - |h|$ álljon. Ekkor $|h| - (1 - 3^{-r}) \leqslant$ $\leqslant 1$, tehát tudunk olyan előjelet választani, hogy az $a = \pm(1 - 3^{-r})$ és $e = h - a$ választással $|e| \leqslant 1$, azaz $e \in E$ legyen. Ekkor $h = a + e \in A + e$.

Már csak azt kell belátnunk, hogy $b, c \in A$ és $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén $b + e \neq c + e_i$, azaz $b + h - a \neq c + e_i$, vagyis $a - b + c \neq h - e_i$. Mivel $h \notin A + e_i$, ezért $h - e_i \notin$ $\notin A$, tehát $a = b$ vagy $a = -c$ esetén készen vagyunk, hiszen ekkor $a - b + c \in A$. (Utóbbi esetben használjuk, hogy az A halmaz a 0-ra szimmetrikus.) Egyéb esetben belátjuk, hogy $3^{r-2}(a - b + c)$ nem egész, amiből a kívánt nem-egyenlőség azonnal következik.

Legyen $b = \pm(1 - 3^{-s})$ és $c = \pm(1 - 3^{-t})$, ekkor $3^r(a - b + c) = \pm(3^r - 1) \mp$ $(3^r - 3^{r-s}) \pm (3^r - 3^{r-t})$, ahol 3^r egy 9-cel osztható egész, $\mp 1 \pm 3^{r-s} \mp 3^{r-t}$ pedig nem, mert $\max(s, t) > r$ esetén ez vagy ∓ 1, vagy nem egész, $\max(s, t) \leqslant r$ esetén pedig vagy ∓ 3, vagy nem osztható 3-mal. Így tehát $3^r(a - b + c)$ nem lehet 9-cel osztható egész. $\square$

Pach Péter Pál



Térbe kilépő bizonyítások V.[1]

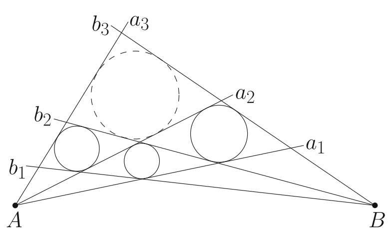
Egy olimpiai feladatjavaslat története

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Ez a rész egy kicsit személyesebb lesz. Egy feladatjavaslat történetét mesélem el, amit a 2010-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára (IMO) javasoltam.

A kiinduló feladat

Két pontból indítsunk három-három félegyenest úgy, hogy bármelyik két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást; ezek a félegyenesek négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha a négyszögek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is érintőnégyszög (1. ábra).



1. ábra

[1]A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.