Jelentés a 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 4-én, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő húsz helyszínen: Békéscsaba, Budapest, Cambridge, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Kolozsvár, Miskolc, Nagykanizsa, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szombathely, Tatabánya, Veszprém és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Kós Géza, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság szeptember 13-ai ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB<AC<BC$, az A, B, C csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, illetve C_1. Legyen P a C_1 pont tükörképe a BB_1 egyenesre, és legyen Q a B_1 pont tükörképe a CC_1 egyenesre. Mutassuk meg, hogy az A_1PQ háromszög köré írt kör átmegy a BC oldal felezőpontján.*

2. *Legyen n pozitív egész szám. Határozzuk meg az összes olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert, amely az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz bizonyos részhalmazaiból áll, és amelyre minden rögzített, nemüres $X\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ mellett ugyanannyi $A\in\mathcal{F}$ esetén lesz $A\cap X$ elemszáma páros, mint páratlan.*

3. *Igaz-e, hogy ha H és A a számegyenes korlátos részhalmazai, akkor H legfeljebb egyféleképpen bontható fel A páronként diszjunkt eltolt példányaira? (Végtelen sok eltolt példányt is megengedünk.)*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, december 5-ei ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a 90 regisztrált versenyzőtől összesen 74 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen az első feladatot 14-en, a második feladatot pedig 16-an oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen, a harmadik feladat megoldásának közelébe pedig egy versenyző jutott.

Egy versenyző apró pontatlanságoktól eltekintve helyesen oldotta meg az első két feladatot, és hibás, de javítható konstrukciót adott a harmadik feladatnál. Ezért

I. díjban és 45 000 Ft pénzjutalomban részesül

Matolcsi Dávid, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. érettségizett tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Kiss Géza* és *Kiss Gergely*).

Négy versenyző oldotta meg lényegében az első két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 20 000 Ft pénzjutalomban részesül

Beke Csongor, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Szűcs Gábor* és *Varga Mária*),

Nagy Nándor, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 12. osztályos tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza* és *Dobos Sándor*),

Velich Nóra, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 11. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde* és *Kocsis Szilveszter*),

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*).

III. díjban és 15 000 Ft pénzjutalomban részesül

Jánosik Áron, a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója (tanára *Árki Tamás*) az első feladat helyes és a második feladat némileg hiányos megoldásáért.

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesül

Hámori Janka, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*) az első feladat helyes megoldásáért és a második feladatban elért értékes részeredményekért,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 11. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*) az első feladat lényegében helyes megoldásáért és a második feladatban elért értékes részeredményekért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál.”

A 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB < AC < BC$, az A, B, C csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, illetve C_1. Legyen P a C_1 pont tükörképe a BB_1 egyenesre, és legyen Q a B_1 pont tükörképe a CC_1 egyenesre. Mutassuk meg, hogy az A_1PQ háromszög köré írt kör átmegy a BC oldal felezőpontján.*

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a P pont az A_1B_1, a Q pedig az A_1C_1 szakasznak belső pontja. Legyen A' az A csúcsnak a BB_1 magasságra vonatkozó tükörképe. Az $AB < BC$ feltétel miatt $AB_1 < B_1C$, ezért az A' pont a B_1C szakasznak belső pontja. A BA' szakasz a háromszög belsejében halad, és P ennek belső pontja, tehát P a háromszög belsejébe esik.

Jól ismert, hogy bármely hegyesszögű háromszögben a magasságvonalak felezik a talpponti háromszög szögeit, ezért a B_1C_1 félegyenesnek a BB_1 magasságra vonatkozó tükörképe a B_1A_1 félegyenes. A P pont tehát a B_1A_1 félegyenesnek a háromszög belsejébe eső szakaszán, vagyis az A_1B_1 szakasz belsejében helyezkedik el.