KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI LAPOK
INFORMATIKA ROVATTAL BŐVÍTVE
ALAPÍTOTTA: **ARANY DÁNIEL** 1894-ben

70. évfolyam 2. szám Budapest, 2020. február

Megjelenik évente 9 számban, januártól májusig és szeptembertől decemberig havonta 64 oldalon. ÁRA: 950 Ft

TARTALOMJEGYZÉK

Jelentés a 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről ... 66

Pach Péter Pál: A 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása ... 67

Kós Géza: Térbe kilépő bizonyítások V. ... 71

Válogatás az Emelt szintű érettségi matematikából – 24 válogatott gyakorló feladatsor megoldással című kiadványunkból ... 80

Balga Attila: Megoldásvázlatok a 2020/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához ... 82

Matematika feladatok megoldása (4973., 5017.) ... 91

A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok (649–653.) ... 95

A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1588–1594.) ... 96

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5078–5085.) ... 97

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (769–771.) ... 99

Informatikából kitűzött feladatok (502–504., 42., 141.) ... 99

Rátz Tanár Úr Életműdíjak átadása 2019 decemberében ... 104

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté: Beszámoló a 2019. évi Eötvös-versenyről ... 106

Fizika gyakorlatok megoldása (683., 684.) ... 114

Fizika feladatok megoldása (5122., 5156., 5157., 5158.) ... 116

Fizikából kitűzött feladatok (393., 697–700., 5197–5207.) ... 121

Problems in Mathematics ... 125

Problems in Physics ... 126

Problems of the 2019 Kürschák competition ... 128

INDEX: 25 450 ISSN 1215-9247

A szerkesztőség címe: 1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76.;
Telefon: 372-2500/6541; 372-2850
A lap megrendelhető az Interneten:
www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.h.shtml.
Előfizetési díj egy évre: 8100 Ft

E-mail: szerk@komal.hu
Internet: http://www.komal.hu
This journal can be ordered from the Editorial office:
Pázmány Péter sétány 1.A, II. emelet 2.76., 1117–Budapest, Hungary
telephone: +36 (1) 372-2850
or on the Postal address
H–1518 Budapest 112, P.O.B. 32, Hungary,
or on the Internet:
www.komal.hu/megrendelolap/reszletek.e.shtml.

Jelentés a 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyről

A Bolyai János Matematikai Társulat a 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóversenyt október 4-én, közép-európai idő szerint 14 órai kezdettel rendezte meg a következő húsz helyszínen: Békéscsaba, Budapest, Cambridge, Debrecen, Eger, Győr, Kaposvár, Kecskemét, Kolozsvár, Miskolc, Nagykanizsa, Nyíregyháza, Pécs, Sopron, Szeged, Székesfehérvár, Szombathely, Tatabánya, Veszprém és Zalaegerszeg.

A Társulat elnöksége a verseny lebonyolítására az alábbi bizottságot kérte fel: *Biró András, Frenkel Péter, Kós Géza, Maga Péter* (titkár), *Pach Péter Pál* (elnök), *Tóth Géza.* A bizottság szeptember 13-ai ülésén a következő feladatokat tűzte ki:

1. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB<AC<BC$, az A, B, C csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, illetve C_1. Legyen P a C_1 pont tükörképe a BB_1 egyenesre, és legyen Q a B_1 pont tükörképe a CC_1 egyenesre. Mutassuk meg, hogy az A_1PQ háromszög köré írt kör átmegy a BC oldal felezőpontján.*

2. *Legyen n pozitív egész szám. Határozzuk meg az összes olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert, amely az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz bizonyos részhalmazaiból áll, és amelyre minden rögzített, nemüres $X\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ mellett ugyanannyi $A\in\mathcal{F}$ esetén lesz $A\cap X$ elemszáma páros, mint páratlan.*

3. *Igaz-e, hogy ha H és A a számegyenes korlátos részhalmazai, akkor H legfeljebb egyféleképpen bontható fel A páronként diszjunkt eltolt példányaira? (Végtelen sok eltolt példányt is megengedünk.)*

A bizottság a beérkezett dolgozatok átnézése után, december 5-ei ülésén a következő jelentést fogadta el:

„A verseny minden helyszínen rendben zajlott le: a 90 regisztrált versenyzőtől összesen 74 dolgozat érkezett be.

Az idei versenyen az első feladatot 14-en, a második feladatot pedig 16-an oldották meg helyesen vagy lényegében helyesen, a harmadik feladat megoldásának közelébe pedig egy versenyző jutott.

Egy versenyző apró pontatlanságoktól eltekintve helyesen oldotta meg az első két feladatot, és hibás, de javítható konstrukciót adott a harmadik feladatnál. Ezért

I. díjban és 45 000 Ft pénzjutalomban részesül

Matolcsi Dávid, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. érettségizett tanulója (tanárai *Dobos Sándor, Kiss Géza* és *Kiss Gergely*).

Négy versenyző oldotta meg lényegében az első két feladatot. Ezért a teljesítményért

II. díjban és 20 000 Ft pénzjutalomban részesül

Beke Csongor, a Békásmegyeri Veres Péter Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Szűcs Gábor* és *Varga Mária*),

Nagy Nándor, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 12. osztályos tanulója (tanárai *Gyenes Zoltán, Kiss Géza* és *Dobos Sándor*),

Velich Nóra, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 11. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde* és *Kocsis Szilveszter*),

Weisz Máté Barnabás, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 12. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*).

III. díjban és 15 000 Ft pénzjutalomban részesül

Jánosik Áron, a győri Révai Miklós Gimnázium és Kollégium 12. osztályos tanulója (tanára *Árki Tamás*) az első feladat helyes és a második feladat némileg hiányos megoldásáért.

Dicséretben és 10 000 Ft pénzjutalomban részesül

Hámori Janka, a Szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium 11. osztályos tanulója (tanárai *Schultz János* és *Tigyi István*) az első feladat helyes megoldásáért és a második feladatban elért értékes részeredményekért,

Várkonyi Zsombor, a Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn. 11. osztályos tanulója (tanárai *Fazakas Tünde, Kocsis Szilveszter, Pósa Lajos* és *Dobos Sándor*) az első feladat lényegében helyes megoldásáért és a második feladatban elért értékes részeredményekért.

A versenybizottság ezúton köszöni meg minden versenyző, felkészítő tanár és a lebonyolításban közreműködő kolléga munkáját, a díjazottaknak pedig további sikereket kívánva gratulál."

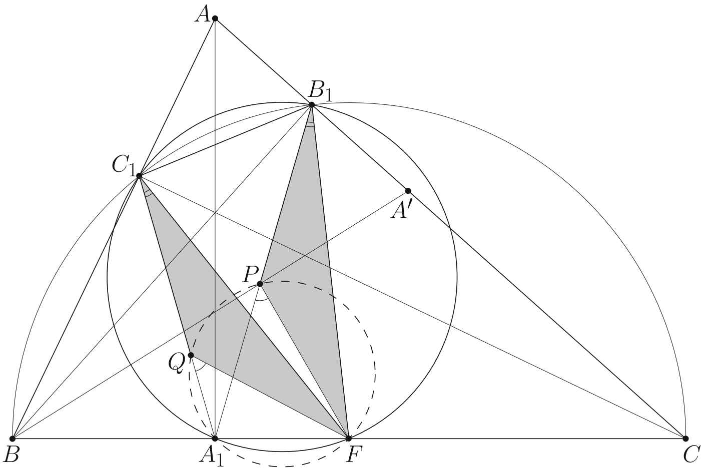
A 2019. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldásai

1. *Az ABC hegyesszögű háromszögben $AB<AC<BC$, az A, B, C csúcsokból induló magasságok talppontjai rendre A_1, B_1, illetve C_1. Legyen P a C_1 pont tükörképe a BB_1 egyenesre, és legyen Q a B_1 pont tükörképe a CC_1 egyenesre. Mutassuk meg, hogy az A_1PQ háromszög köré írt kör átmegy a BC oldal felezőpontján.*

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy a P pont az A_1B_1, a Q pedig az A_1C_1 szakasznak belső pontja. Legyen A' az A csúcsnak a BB_1 magasságra vonatkozó tükörképe. Az $AB<BC$ feltétel miatt $AB_1<B_1C$, ezért az A' pont a B_1C szakasznak belső pontja. A BA' szakasz a háromszög belsejében halad, és P ennek belső pontja, tehát P a háromszög belsejébe esik.

Jól ismert, hogy bármely hegyesszögű háromszögben a magasságvonalak felezik a talpponti háromszög szögeit, ezért a B_1C_1 félegyenesnek a BB_1 magasságra vonatkozó tükörképe a B_1A_1 félegyenes. A P pont tehát a B_1A_1 félegyenesnek a háromszög belsejébe eső szakaszán, vagyis az A_1B_1 szakasz belsejében helyezkedik el.

Hasonlóan láthatjuk, hogy $AC<BC$ miatt Q az A_1C_1 szakasznak belső pontja.



Legyen BC felezőpontja F; az FB_1 és FC_1 szakaszok a BC oldal Thalész-körének sugarai, ezért $FB_1=FC_1$. Szintén jól ismert, hogy az A_1,B_1,C_1,F pontok egy körön, a háromszög Feuerbach-körén vannak.

Vegyük észre, hogy az FB_1P és FC_1Q háromszögek egybevágók, mert $FB_1=$ $=FC_1$, $B_1P=B_1C_1=C_1Q$, és $PB_1F\sphericalangle=A_1B_1F\sphericalangle=A_1C_1F\sphericalangle=QC_1F\sphericalangle$ az A_1B_1F ívhez tartozó kerületi szögek a Feuerbach-körön. Tehát

$$A_1PF\sphericalangle=180^\circ-FPB_1\sphericalangle=180^\circ-FQC_1\sphericalangle=A_1QF\sphericalangle,$$

ez pedig mutatja, hogy az A_1, F, P, Q pontok egy körön vannak, ahogy az bizonyítandó volt. $\square$

2. *Legyen n pozitív egész szám. Határozzuk meg az összes olyan $\mathcal{F}$ halmazrendszert, amely az $\{1,2,\ldots,n\}$ halmaz bizonyos részhalmazaiból áll, és amelyre minden rögzített, nemüres $X\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ mellett ugyanannyi $A\in\mathcal{F}$ esetén lesz $A\cap X$ elemszáma páros, mint páratlan.*

I. megoldás. Számoljuk meg kétféleképpen, hogy hány olyan (A,B,C) rendezett hármas van, melyre A és B az $\mathcal{F}$ halmazrendszer két különböző eleme, $C\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$ pedig egy olyan nemüres részhalmaz, melyre az $A\cap C$ és $B\cap C$ halmazok elemszámának paritása különbözik.

($*$) Először is megjegyezzük, hogy bármely (véges) nemüres S halmaz részhalmazainak pontosan a fele páros, illetve páratlan méretű. Sőt, általánosabban, ha $T\supseteq S$ egy (véges) halmaz, akkor T részhalmazainak éppen a fele metszi (a nemüres) S-et páros, illetve páratlan elemszámú halmazban (hiszen S minden részhalmaza ugyanannyiféleképpen, $2^{|T\setminus S|}$-féleképpen, egészíthető ki T részhalmazává). Ezt az észrevételt a megoldás során többször is fel fogjuk használni.

Legyen $|\mathcal{F}|=t$. Először A és B megválasztásával kezdjük: A-ra t lehetőség van, ezután B-re $(t-1)$, hiszen $A\neq B\in\mathcal{F}$. Ezután pontosan azok a C nemüres halmazok megfelelők, melyek az $A\Delta B$ (nemüres) halmazt (vagyis A és B szimmetrikus differenciáját) páratlan sok elemben metszik. Ezt a feltételt $(*)$ alapján a részhalmazok fele teljesíti (és nincs köztük az $\emptyset$), így a megfelelő C halmazok száma 2^{n-1}. Tehát a megfelelő (A,B,C) hármasok száma $t(t-1)2^{n-1}$.

Most ugyanezt másféleképpen is megszámoljuk: először C-t választjuk meg, erre (2^n-1)-féle lehetőség van. Ezután az olyan (A,B) párok lesznek megfelelők, melyekre $|A\cap C|$ és $|B\cap C|$ paritása különböző. Az $A\in\mathcal{F}$ halmaz tetszőlegesen megválasztható, majd ezután a feltétel szerint éppen $t/2$ esetben lesz $|B\cap C|$ paritása megfelelő (vagyis $|A\cap C|$ paritásától különböző). Így a hármasok száma $(2^n-1)t(t/2)$.

A $t(t-1)2^{n-1}=(2^n-1)t(t/2)$ (t-ben másodfokú) egyenlet megoldásai $t=0$ és $t=2^n$. Tehát az üres halmazon és az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszeren kívül nincs megfelelő $\mathcal{F}$.

Ez a két halmazrendszer pedig teljesíti a feltételeket: ha $\mathcal{F}$ az üres halmazrendszer, akkor $A\cap X$ elemszáma 0-szor lesz páros, 0-szor lesz páratlan; ha pedig $\mathcal{F}$ az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszer, akkor $(*)$ szerint bármely nemüres X-re $A\cap X$ elemszáma 2^{n-1} esetben páros, 2^{n-1} esetben páratlan.

Tehát két megfelelő halmazrendszer van: az üres halmaz és az $\{1,2,\dots,n\}$ összes részhalmazát tartalmazó halmazrendszer. $\square$

II. megoldás (Fleiner Zsigmond és Velich Nóra megoldása alapján). Megmutatjuk, hogy csak az üres halmazrendszer és az összes részhalmazt tartalmazó halmazrendszer megfelelő.

Legyen ismét $|\mathcal{F}|=t$. Készítsünk egy $t\times 2^n$ méretű táblázatot, melynek sorai az $\mathcal{F}$-beli halmazoknak, oszlopai pedig az $\{1,2,\dots,n\}$ részhalmazainak felelnek meg. Bármely $A\in\mathcal{F}$ és $X\subset\{1,2,\dots,n\}$ halmazok esetén az A-nak megfelelő sor és az X-nek megfelelő oszlop közös mezőjébe írjunk $(+1)$-et, ha $|A\cap X|$ páros, illetve (-1)-et, ha $|A\cap X|$ páratlan. Ebben a táblázatban számítsuk ki a számok összegét kétféleképpen: oszloponként és soronként is.

A feltétel szerint bármely nemüres X esetén az $A\in\mathcal{F}$ halmazoknak pontosan a felére lesz $|A\cap X|$ páros, illetve páratlan, vagyis az X-nek megfelelő oszlopban a számok fele $+1$, fele -1; az összegük 0. Az üres halmaz minden $A\in\mathcal{F}$-et a páros üres halmazban metsz, tehát az üres halmaznak megfelelő oszlopban mind a t elem $+1$. Azt kaptuk, hogy a táblázatban az elemek összege t.

Ha $\emptyset\in\mathcal{F}$, akkor az $\emptyset$-nak megfelelő sorban csupa $+1$ áll, ezek összege 2^n. Tekintsünk most egy tetszőleges nemüres $A\in\mathcal{F}$ elemet és a neki megfelelő sort. Mivel az A nemüres, az $\{1,2,\dots,n\}$ részhalmazaival vett metszeteinek éppen a fele páros, iletve páratlan; az ilyen sorokban az elemek összege 0. Összességében, a táblázat összege 2^n, ha $\emptyset\in\mathcal{F}$, és 0, ha $\emptyset\notin\mathcal{F}$.

A kétféle összeszámolásból azt kaptuk, hogy $t=0$ vagy $t=2^n$, vagyis $\mathcal{F}$ az üres halmazrendszer, vagy pedig $\{1,2,\dots,n\}$ összes részhalmazából áll. Azt, hogy ez a két halmazrendszer teljesíti a feltételeket, ugyanúgy ellenőrizhetjük, mint az I. megoldásban. □

3. *Igaz-e, hogy ha H és A a számegyenes korlátos részhalmazai, akkor H legfeljebb egyféleképpen bontható fel A páronként diszjunkt eltolt példányaira? (Végtelen sok eltolt példányt is megengedünk.)*

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kérdéses következtetés nem igaz. Rekurzívan felépítjük A-t, H-t, és az $E \neq E'$ eltoláshalmazokat (mind $\mathbb{R}$ nemüres részhalmazai), úgy, hogy

$$H = \bigcup_{e \in E} (A+e) = \bigcup_{e' \in E'} (A+e'),$$

és mind az $A+e = \{a+e:\, a \in A\}$ $(e \in E)$ eltoltak, mind az $A+e' = \{a+e':\, a \in A\}$ $(e' \in E')$ eltoltak páronként diszjunktak.

Legyen először $A_1 = \{0\}$, $E_1 = \{0\}$, $E_1' = \{1\}$, és $H_1 = (A_1+E_1) \cup (A_1+E_1') = \{0,1\}$. Innen rekurzívan haladunk tovább. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a véges A_n, E_n, E_n' halmazokat úgy, hogy $E_n \cap E_n' = \emptyset$, A_n+E_n és A_n+E_n' minden általuk lefedett elemet egyszer fednek (vagyis az $A+e$ $(e \in E_n)$ halmazok páronként diszjunktak, és az $A+e'$ $(e' \in E_n')$ halmazok is páronként diszjunktak). Legyen ekkor $H_n = (A_n+E_n) \cup (A_n+E_n')$. Most egymás után minden egyes $h \in H_n$ elemre a következőt tesszük: ha h eddig nem volt benne A_n+E_n-ben, akkor beteszünk A_n-be egy a, E_n-be egy e elemet, hogy azok összege éppen h legyen, és a korábbi tulajdonságok ne romoljanak el, azaz a ne legyen $a_1+e_1-e_2$ alakú (ahol ezek korábbi elemek: $a_1 \in A_n$, $e_1, e_2 \in E_n$), és e se legyen $e_1+a_1-a_2$ alakú (ahol $e_1 \in E_n$, $a_1, a_2 \in A_n$), sőt, az új e ne legyen E_n'-ben sem. Mindegyik feltétel véges sok elem letiltását jelenti. Ugyanígy járunk el A_n+E_n' esetében is. Így kapjuk az $A_{n+1}, E_{n+1}, E_{n+1}'$ halmazokat, nyilván $H_n \subseteq A_{n+1}+E_{n+1}$, $H_n \subseteq A_{n+1}+E_{n+1}'$.

Világos, hogy $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, $E' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n'$, $H = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$ megfelelnek, amennyiben a korlátosság is teljesül. Azonban a korlátosságot is könnyen betarthatjuk, ha minden új elemet a $(-2,2)$ intervallumból választunk a következőképpen: egy tipikus lépésben egy adott $H_n \ni h \in (-2,2)+(-2,2) = (-4,4)$ elemet akarunk felírni $a+e$ alakban, ahol $a \in A_{n+1}$, és $e \in E_{n+1}$ (vagy E_{n+1}'). Világos, hogy mivel csak véges sok letiltott elem van, léteznek ennek megfelelő $a, e \in (-2,2)$ számok. □

II. megoldás (Matolcsi Dávid dolgozata alapján). Legyen H a $(-2,2)$ nyílt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Legyen $A \subset (-1,1)$ a $\pm(1-3^{-r})$ alakú számok halmaza, ahol r nemnegatív egész. Be fogjuk látni, hogy H többféleképpen is felbontható A-nak páronként diszjunkt eltoltjaira.

Legyen E a $[-1,1]$ zárt intervallumba eső, 3-hatvány nevezőjű racionális számok halmaza. Ekkor $A+E = \{a+e:\, a \in A,\, e \in E\} \subseteq H$ (itt valójában egyenlőség áll). Mivel A és $A+2/3$ is tartalmazza a $2/3$ számot, ezért A-nak ez a két eltoltja nem diszjunkt. Elég belátni, hogy mindkettő kiegészíthető H felbontásává A-nak páronként diszjunkt eltoltjaira. Mivel H megszámlálható, elég belátni, hogy ha valamely $e_1, \dots, e_n \in E$ számokkal képzett $A + e_i$ eltoltak nem tartalmazzák a $h \in H$ számot, akkor van olyan $e \in E$ szám, hogy az $A + e$ eltolt tartalmazza a h számot és diszjunkt $A + e_1, \dots, A + e_n$ mindegyikétől.

Válasszuk az $r \geqslant 2$ egész számot olyan nagynak, hogy $3^{r-2}(h - e_i)$ egész legyen minden $i = 1, \dots, n$ esetén, továbbá $3^{-r} \leqslant 2 - |h|$ álljon. Ekkor $|h| - (1 - 3^{-r}) \leqslant 1$, tehát tudunk olyan előjelet választani, hogy az $a = \pm(1 - 3^{-r})$ és $e = h - a$ választással $|e| \leqslant 1$, azaz $e \in E$ legyen. Ekkor $h = a + e \in A + e$.

Már csak azt kell belátnunk, hogy $b, c \in A$ és $1 \leqslant i \leqslant n$ esetén $b + e \neq c + e_i$, azaz $b + h - a \neq c + e_i$, vagyis $a - b + c \neq h - e_i$. Mivel $h \notin A + e_i$, ezért $h - e_i \notin A$, tehát $a = b$ vagy $a = -c$ esetén készen vagyunk, hiszen ekkor $a - b + c \in A$. (Utóbbi esetben használjuk, hogy az A halmaz a 0-ra szimmetrikus.) Egyéb esetben belátjuk, hogy $3^{r-2}(a - b + c)$ nem egész, amiből a kívánt nem-egyenlőség azonnal következik.

Legyen $b = \pm(1 - 3^{-s})$ és $c = \pm(1 - 3^{-t})$, ekkor $3^r(a - b + c) = \pm(3^r - 1) \mp (3^r - 3^{r-s}) \pm (3^r - 3^{r-t})$, ahol 3^r egy 9-cel osztható egész, $\mp 1 \pm 3^{r-s} \mp 3^{r-t}$ pedig nem, mert $\max(s, t) > r$ esetén ez vagy ∓ 1, vagy nem egész, $\max(s, t) \leqslant r$ esetén pedig vagy ∓ 3, vagy nem osztható 3-mal. Így tehát $3^r(a - b + c)$ nem lehet 9-cel osztható egész. □

Pach Péter Pál

Térbe kilépő bizonyítások V.[1]

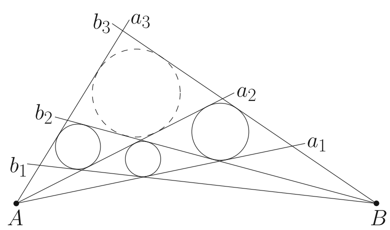
Egy olimpiai feladatjavaslat története

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Ez a rész egy kicsit személyesebb lesz. Egy feladatjavaslat történetét mesélem el, amit a 2010-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára (IMO) javasoltam.

A kiinduló feladat

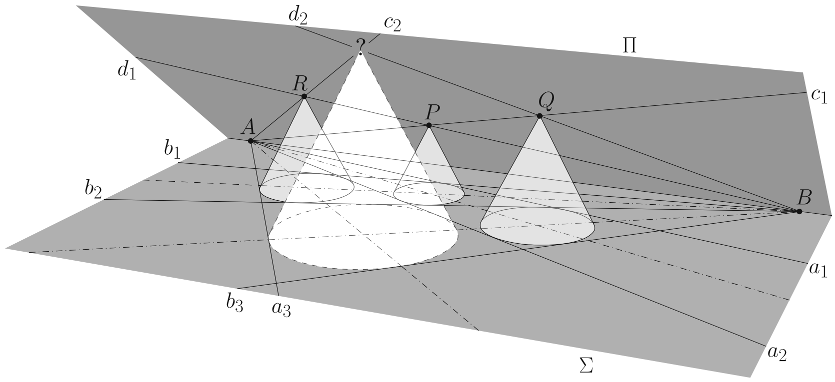
Két pontból indítsunk három-három félegyenest úgy, hogy bármelyik két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást; ezek a félegyenesek négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha a négyszögek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is érintőnégyszög (1. ábra).



1. ábra

[1]A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

A feladatot sokféleképpen megoldhatjuk, például az előző részben bemutatott kúpokkal. Használjuk az 1. és a *2. ábra* jelöléseit; feltesszük, hogy az $a_1b_1a_2b_2$, az $a_1b_2a_2b_3$, valamint az $a_2b_1a_3b_2$, négyszögek érintőnégyszögek, és ebből fogjuk megmutatni, hogy az $a_2b_2a_3b_3$ négyszög is érintőnégyszög.



2. ábra

A tervünk az, hogy a Σ alapsíkunkból a térbe kilépbe, a négyszögekbe írt körökre egymáshoz hasonló kúpokat illesztünk, majd megszerkesztjük a negyedik kúpot. (A 2. ábrán olyan kúpokat rajzoltam, amelyek magassága kétszerese az alapkörük sugarának; a konkrét aránynak nincs jelentősége.)

Az olyan kúpoknak a csúcsai, amelyek alapköre érinti az a_1 és a_2 félegyeneseket, egy A-ból induló félegyenesen vannak; jelöljük ezt a félegyenest c_1-gyel. Hasonlóan, az a_2 és a_3 félegyeneseket, a b_1 és b_2 félegyeneseket, illetve a b_2 és b_3 félegyeneseket érintő körökre emelt kúpok csúcsai is egy-egy félegyenesen vannak; jelölje ezeket rendre c_2, d_1, illetve d_2 (2. ábra).

A c_1 és d_1 félegyenesek a P pontban, az $a_1b_1a_2b_2$ négyszögbe írt körhöz tartozó kúp csúcsában metszik egymást. Ugyanígy, a c_1 és d_2, illetve a c_2 és d_1 is metszik egymást a másik két kúp csúcsában, a Q és a P pontban. A feladat állításához elég azt igazolnunk, hogy a c_2 és a d_2 félegyenes is elmetszi egymást, ugyanis a metszéspontjuk egyértelműen meghatározza a negyedik kúpot, amelynek alapköre érinti az a_2, b_2, a_3, b_3 félegyenesek mindegyikét.

Legyen Π az ABP háromszög síkja. A Q pont a $c_1 = AP$ egyenesen, az R pont pedig a $d_1 = BP$ egyenesen van, tehát $Q, R \in \Pi$. Akkor viszont a $c_2 = AR$ és a $d_2 = BQ$ félegyenes is a Π síkban fekszik.

A c_2 és a d_2 félegyenesek Σ-ra való merőleges vetülete az a_2 és az a_3, illetve a b_2 és b_3 szögfelezője, ezek az $a_2b_2a_3b_3$ négyszög belsejében metszik egymást; a metszéspontjukat Σ-ra merőlegesen visszavetíthetjük Π-re, az így kapott pont c_2-nek és d_2-nek közös pontja, ami bizonyítja az állítást.

Valamikor 2009 őszén a 6-os villamoson kapaszkodva ezen a klasszikus feladaton gondolkodtam, akkor jöttem rá, hogy a bizonyítás hiperbolikus geometriában is elmondható, ha a kúpok hasonlósága helyett azt kötjük ki, hogy az alkotóik ugyanakkora szögben metszik az alapsíkot. Hazaérve megpróbáltam az észrevételből feladatot gyártani úgy, hogy lerajzoltam az ábrát a hiperbolikus sík egyik jól ismert modelljében, a Poincaré-féle körmodellben.

A Poincaré-féle körmodell[2]

A hiperbolikus sík *modellje* azt jelenti, hogy bizonyos dolgokat elnevezünk „pontnak", pontok bizonyos halmazait „egyenesnek", definiáljuk a pontok sorrendjét az egyeneseken, pontok „távolságát" és egyenesek „szögét", és mindezt úgy, hogy az összes geometriai axiómánk teljesüljön, kivéve a párhuzamossági axiómát, ami helyett azt kötjük ki, hogy bármely egyeneshez bármely rajta kívül fekvő pontból végtelen sok párhuzamos egyenest lehet húzni.

Egy korábbi, a KöMaL honlapján is elérhető cikkben [1] összefoglaltam négyféle hiperbolikus modell, a Beltrami–Cayley–Klein-modell, a Poincaré-féle kör-, félsík- és félgömbmodellek alapvető definícióit és a modellek közötti megfeleltetéseket. A mostani játékunkhoz csak a körmodell néhány alapvető tulajdonságára lesz szükség.

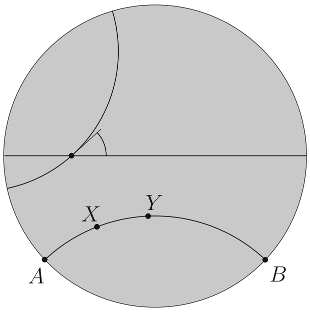
Vegyünk az euklideszi síkon egy körlapot, ez lesz az „alapkör". A kör belsejébe eső pontok a körmodell pontjai. A körmodell egyenesei az alapkört merőlegesen metsző köröknek az alapkör belsejébe eső ívei, beleértve az alapkör átmérőit is (*3. ábra*).

Két pont távolságát a következőképpen definiálhatjuk: ha X és Y két pont az alapkörre merőleges AB köríven, akkor az X és Y pontok távolsága

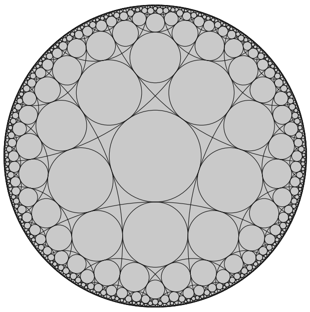
$$d(X,Y) = k \cdot \big|\ln(ABXY)\big| = k \cdot \left|\ln \frac{AX \cdot YB}{AY \cdot XB}\right|.$$

(A középső képletben négy, egy körön fekvő pont kettősviszonya szerepel, ami pontosan ugyanúgy fejezhető ki a húrok hosszával, mint amikor egy egyenesre esnek.)

A távolságoknál sokkal szebb a szögek definíciója: két „egyenes" szöge éppen akkora, mint amekkorának a modellben látszik.



3. ábra



4. ábra

5. ábra

A modellben a tengelyes tükrözések az egyeneseknek megfelelő körívre való inverziók; ennek következménye, hogy *a hiperbolikus körvonalak a körmodellben is*

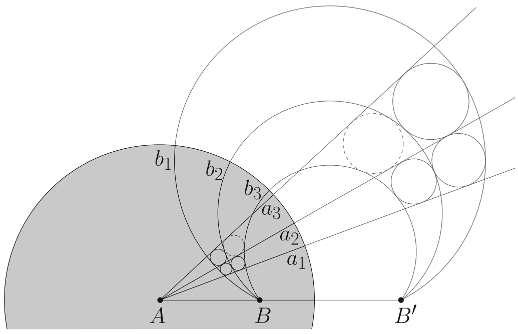
[2]Jules Henri Poincaré francia matematikus, 1854–1912

körvonalnak látszanak. A modell határához közeledve az egyenlő nagyságú köröket a modellben egyre kisebb körökkel kell lerajzolnunk; a *4. ábrán* a körmodell egy kicsempézése látható olyan egybevágó szabályos ötszögekkel, amelyek szögei derékszögek, és az ötszögekbe írt köröket is megrajzoltam.

A körmodell csempézéseit rengeteg művészi alkotásban használták már fel; például az *5. ábrán* látható Escher[3] *Circle Limit I* című fametszete.

Olimpiai feladatjavaslat

Az *6. ábrán* az 1 ábra hiperbolikus változatát rajzoltam le: az A pont az alapkör középpontja, az ebből kiinduló a_1, a_2, a_3 félegyenesek az alapkör sugarai. A B pont egy másik pont a modellben, az ebből kiinduló félegyenesek képei az alapkörre merőleges körívek. Az ábrát invertálhatjuk az alapkör határára; a b_1, b_2, b_3 körívek meghosszabbításai az B pont inverzén mennek át, és a modellen kívül megkapjuk az ábra tükörképét is.



6. ábra

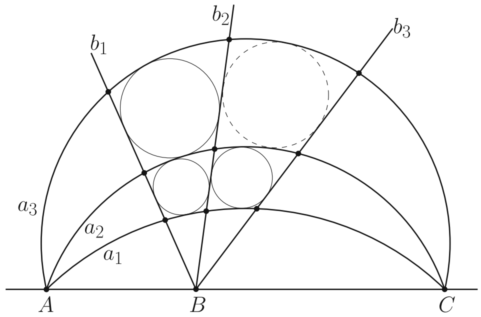
Az ábrával nem voltam elégedett. Túl nyilvánvaló volt, hogyan készült, a tükörkép ábra létrejötte sem tetszett, és a képen szereplő sugarakat és köríveket sem könnyű megrajzolni úgy, hogy metsszék egymást. Azt találtam ki, hogy megváltoztatom a pontok sorrendjét: az A pont nem a BB' szakasz meghosszabbításán, hanem a belsejében lesz, ettől kezdve az ábra többé már nem a körmodell része. Az alapkör lerajzolására sincs szükség. A pontok cseréje után ez lett az új feladat:

Feladat. *A sík A és C pontjait az a_1, a_2 és a_3 körívek úgy kötik össze, hogy az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, és az a_2 körív az a_1 és az a_3 között helyezkedik el. Az AC szakasz egy B pontjából indulnak a b_1, b_2 és b_3 félegyenesek, ugyanabban a félsíkban, mint a körívek; a b_2 félegyenes b_1 és b_3 között helyezkedik el.*

Tekintsük a körívek és félegyenesek által határolt, négyoldalú $a_1b_1a_2b_2$, $a_1b_2a_2b_3$, $a_2b_1a_3b_2$, és $a_2b_2a_3b_3$ tartományokat. Bizonyítsuk be, hogy ha ezek közül valamelyik háromba kört lehet írni, akkor a negyedikbe is (7. ábra).

A feladatot (kicsit más betűzéssel) javasoltuk a 2010-es, Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára, amelyet Kazahsztán új fővárosában, Asztanában rendeztek.

[3]Maurits Cornelis Escher holland grafikus, 1898–1972.



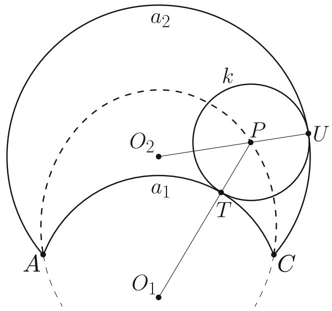
7. ábra

A pontok átrendezése miatt az eredeti, hiperbolikus geometriai megoldás már nem működik, de egy feladatjavaslathoz egyébként is illik elemi megoldásokat mellékelni. Két megoldást mutatok.

1. megoldás, kúpokkal

A kiinduló feladat mintájára, az ábrában szereplő körökre egymáshoz hasonló kúpokat fogunk illeszteni, majd megszerkesztjük a negyedik kúpot. A változás az, hogy most olyan körök is szerepelnek, amelyek két rögzített körív „közé” vannak írva. Megvizsgáljuk, hol lehetnek, milyen pályán mozoghatnak az ilyen körök középpontjai, és a körökre illesztett kúpok csúcsai.

1. lemma. *Azoknak a köröknek a középpontjai, amelyek kívülről érintik a_i-t és belülről érintik a_{i+1}-et, egy, A-t és C-t összekötő ellipszisíven vannak.* ($i=1$ *vagy* $i=2$.)



8. ábra

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $i=1$.

Legyen k olyan kör, amely kívülről érinti a_1-et és belülről érinti a_2-t, az érintési pontjai az a_1 íven T, az a_2 íven U, a középpontja P. Legyen az a_1 kör középpontja O_1, az a_2 középpontja O_2, a körök sugarai r, r_1, illetve r_2 (*8. ábra*).

Vegyük észre, hogy

$$O_1P+O_2P=(O_1T+TP)+(O_2U-PU)=(r_1+r)+(r_2-r)=r_1+r_2,$$

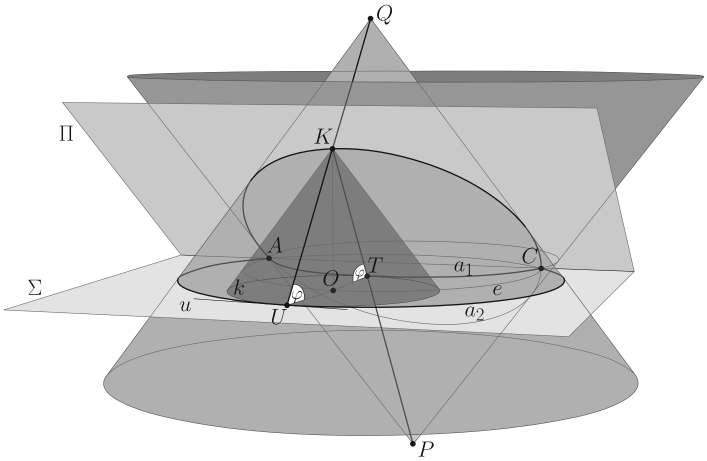
vagyis P rajta van az O_1, O_2 fókuszú, r_1+r_2 nagytengelyű ellipszisen; ez az ellipszis átmegy az A és C pontokon, mert $O_1A+O_2A=O_1C+O_2C=r_1+r_2$.

Megfordítva, ha P egy pont az ellipszisnek az a_1 és a_2 közötti ívén, akkor a P középpontú, $r=O_1P-r_1=r_2-O_2P$ sugarú kör kívülről érinti a_1-et és belülről érinti a_2-t.

2. lemma. *Legyen φ rögzített hegyesszög, és $i=1$ vagy $i=2$. Tekintsük azokat a köröket, amelyek kívülről érintik a_i-t és belülről érintik a_{i+1}-et, és emeljünk ezekre* *felfelé ezekre a körökre olyan kúpokat, amelyek alkotói φ szöget zárnak be a Σ síkkal. Az így kapható kúpok csúcsai egy, A-t és C-t összekötő ellipszisíven vannak.*

Bizonyítás. Ismét feltesszük, hogy $i = 1$. Illesszünk az a_1 körre lefelé, az a_2-re felfelé egy-egy kúppalástot, amelyek alkotói φ szöget zárnak be Σ-val; ezek csúcsa legyen P, illetve Q.

Legyen k egy tetszőleges kör, amely kívülről érinti a_1-et és belülről érinti a_2-t, a középpontja O, az érintési pontjai az a_1 íven T, az a_2 íven U. A k-ra felfelé illesztett kúp csúcsa legyen K. (*9. ábra*).



9. ábra

Legyen u a k és az a_2 ív U-ban húzott közös érintője. Az UK félegyenes a k-ra emelt kúp, az UQ félegyenes pedig az a_2-re emelt kúp alkotója. Mindkettő merőleges u-ra, φ szöget zár be Σ-val, és a körök belseje felé dől, ezért a két félegyenes ugyanaz. Tehát a K pont rajta van az UQ egyenesen, és ezáltal az a_2 ívre illesztett kúpon.

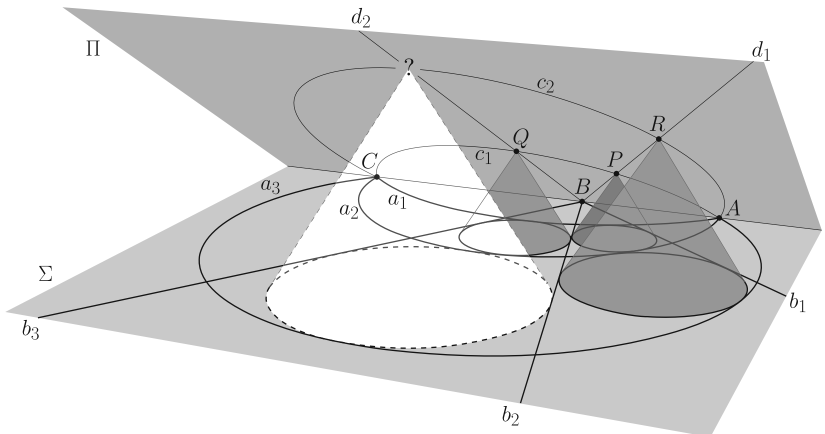
Ugyanígy láthatjuk, hogy a TK félegyenes a k-ra illesztett kúp, a TP félegyenes az a_1-re lefelé illesztett kúp alkotója, és ezek egymás meghosszabbításai, így a K pont az a_1-re illesztett kúppaláston is rajta van, tehát K közös pontja az a_1-re és az a_2-re illesztett kúppalástoknak.

A cikk 3. részében láttuk, hogy párhuzamos tengelyű, azonos meredekségű kúpok közös pontjai egy síkban vannak. Tehát a lehetséges K pontok egy rögzített Π síkban vannak. A két kúpnak A és C is közös pontja, tehát a Π sík illeszkedik az AC egyenesre.

Az 1. lemma szerint a lehetséges O pontok egy e ellipszisívet alkotnak, amely összeköti A-t és C-t. Ha ezt az ellipszist Σ-ra merőlegesen visszavetítjük Π-re, megkapjuk a lehetséges K pontokat tartalmazó ellipszisívet a Π síkban.

Most térjünk rá a feladat megoldására. A 2. lemma szerint az a_i és a_{i+1} ívek közé írt körökre emelt kúpok csúcsai egy A-t és C-t összekötő c_i ellipszisíven vannak ($i = 1, 2$). A b_j és b_{j+1} ívek közé írt körökhöz tartozó kúpok csúcsai pedig egy B-ből induló d_j egyenesen ($j = 1, 2$).

Legyen P, Q és R az $a_1b_1a_2b_2$, az $a_1b_2a_2b_3$, illetve az $a_2b_1a_3b_2$ tartományokba írt körre emelt kúp csúcsa; ekkor P a c_1 és d_1 metszéspontja, Q a c_1 és d_2 metszéspontja, és R a c_2 és d_1 metszéspontja. A feladat megoldásához elég azt igazolnunk, hogy c_2 és d_2 is elmetszi egymást (*10. ábra*).



10. ábra

Legyen Π az a félsík, aminek határa az AC egyenes, és illeszkedik a BPR félegyenesre. Ez a félsík tartalmazza a c_1 és c_2 ellipszisíveknek három-három pontját (A, C, P, illetve A, C, R), így mindkét ellipszisív része Π-nek. Mivel c_1 átmegy Q-n, a Q pont és a d_2 félegyenes is része Π-nek. A c_2 ellipszisnek B belső pontja, ezért a BQ félegyenes elmetszi c_2-t. Ezzel a feladatot megoldottuk.

2. megoldás, térbe kilépés nélkül

Az előbbi megoldást nem nehéz tisztán síkbeli bizonyítássá alakítani. Az 1. lemmára most is szükségünk lesz.

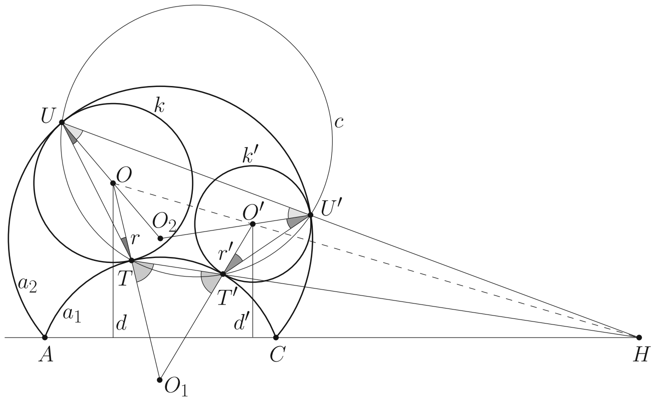
3. lemma. *Válasszunk egy tetszőleges k kört, amely kívülről érinti a_i-t és belülről érint a_{i+1}-et ($i = 1$ vagy $i = 2$), a középpontja O, sugara r, és legyen d az O pont és az AC egyenes távolsága. Az r/d arány nem függ a k megválasztásától.*

Nem nehéz észrevenni, hogy a 3. lemma a 2. lemma egyszerű átfogalmazása.

Bizonyítás. Az 1. lemmához hasonlóan legyen $i = 1$, az a_1 középpontja O_1, az a_2 középpontja O_2. Legyenek k és k' különböző körök, amik érintik a két ívet, sugaraik r, illetve r'; középpontjaik O, illetve O', távolságuk az AC egyenestől d, illetve d'. Azt akarjuk igazolni, hogy $\frac{r}{d} = \frac{r'}{d'}$.

Ha k és k' szimmetrikus az O_1O_2 egyenesre, akkor az állítás triviális; feltehetjük, hogy a két kör nem egymás tükörképe. A két kör érintési pontja a két köríven legyen T, T', U és U' a *11. ábra* szerint.

Legyen a k és k' körök külső hasonlósági pontja H. A k és az a_2 külső hasonlósági pontja U, a k' és az a_2 külső hasonlósági pontja U'; a Monge-tétel szerint a három hasonlósági pont, H, U és U' egy egyenesen van. Hasonlóan, a k



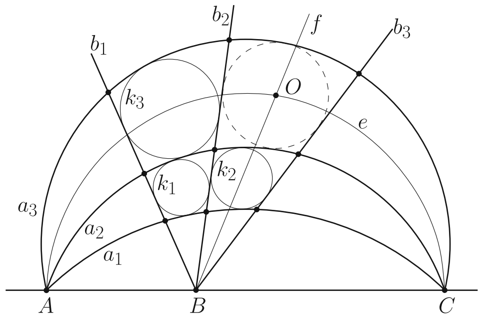
11. ábra

és az a_1 belső hasonlósági pontja T, a k' és az a_1 belső hasonlósági pontja T'; a Monge-tétel szerint H, T és T' is egy egyenesen van. A H pont tehát a TT' és az UU' egyenes metszéspontja.

A $TT'U'U$ négyszög szemközti szögeinek összegét összeszámolhatjuk az OUT, O_1TT', $O'T'U'$ és $O_2U'U$ egyenlő szárú háromszögekből, és láthatjuk, hogy a szögek összege két szemközti csúcspárnál ugyanakkora; tehát a $TT'U'U$ négyszög húrnégyszög. (A háromszögek irányításától függően az ábra többféleképpen is kinézhet, ezért a teljes bizonyításhoz többféle esetet is meg kell vizsgálni.) Az a_1 és a $TT'UU'$ kör hatványvonala a TT' egyenes, az a_2 és a $TT'UU'$ kör hatványvonala pedig az UU' egyenes, tehát H a három kör hatványpontja, és ezen a harmadik hatványvonal, az AC egyenes is átmegy.

A k és k' köröket, sugaraikat és a d, d' távolságokat egymásba nagyíthatjuk a H pontból, ez bizonyítja, hogy $\frac{r}{d}=\frac{r'}{d'}$.

Az 1. és a 3. lemma együtt megoldja a feladatot. Tegyük fel, hogy az $a_1b_1a_2b_2$, $a_1b_2a_2b_3$ és $a_2b_1a_3b_2$ tartományokba kört lehet írni; ezt a három kört jelölje rendre k_1, k_2, illetve k_3. Sugaraik legyenek r_1, r_2, illetve r_3; középpontjaik távolsága az AC egyenestől d_1, d_2, illetve d_3.



12. ábra

Legyen e az az 1. lemma szerinti ellipszisív, amely az a_2 és a_3 köríveket érintő körök középpontjaiból áll, és legyen f a b_2, b_3 félegyenesek szögfelezője; az e és az f metszéspontja legyen O, az O távolsága az AC egyenestől d (*12. ábra*).

A 3. lemma szerint $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2}$, továbbá a k_1 és k_3 köröket a B pontból egymásba lehet nagyítani, ezért $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_3}{d_3}$. Legyen $r = \frac{r_2}{d_2} \cdot d = \frac{r_3}{d_3} \cdot d$. A 3. lemma szerint az O középpontú, r sugarú kör érinti az a_2 és az a_3 ívet is. Továbbá, a k_2 kört a B pontból ugyanebbe a körbe nagyíthatjuk. Ezzel megszerkesztettük az $a_2b_2a_3b_3$ tartomány beírt körét.

Asztanai közjáték

Asztanába megérkezve az a meglepetés ért, hogy az olimpia helyszínén létezik egy épület (a neve Shabyt), ami két párhuzamos tengelyű kúp metszete. A feladatkiválasztó bizottság tagjaival készítettünk is néhány fényképet rólam és a feladatomról.

A „Shabyt” („Шабыт”, *jelentése: inspiráció*) *művészeti egyetem Asztanában, Kazahsztán fővárosában*

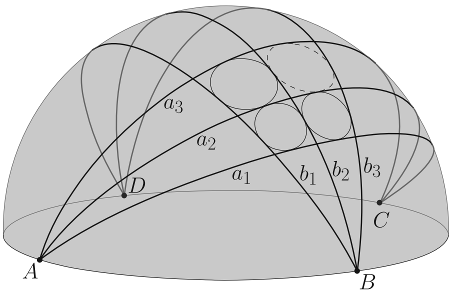
A zsüriben a feladat nem volt annyira népszerű. Többeknek tetszett, de a térgeometriától ódzkodó csendes többség gyorsan kiszavazta a lehetséges nehéz jelöltek közül. (De azért nem ez volt a legnépszerűtlenebb feladat: a C6-os feladatot még ennél is jobban utálták.)

Az olimpia megnyitó ünnepsége a Függetlenségi Palotában volt, közvetlenül a Shabyt melletti épületben. A zsüri nagy része a megnyitóra utazás közben, a buszról látta először az épületet, amikor már rég kiválasztották a hat feladatot a versenyre.

Feladatok

1. Oldjuk meg a Kiinduló feladatot a körökhöz húzott érintő szakaszok összehasonlításával.

2. Bizonyítsuk be a 2. lemmát úgy, hogy az a_1 és a_2 körívekre nem kúpokat, hanem olyan gömböket illesztünk, amelyek φ szögben metszik a Σ síkot.



13. ábra

3. Bizonyítsuk be a 3. lemmát koordinátákkal.

4. Mutassuk meg, hogy a 7. ábrát inverzióval egy félgömbfelületre képezhetjük úgy, hogy az a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 görbék képei a gömbön fél főkörök legyenek (*13. ábra*). Az így kapott gömbi állítást bizonyítsuk be a békaszemmódszerrel.

Irodalom

[1] Kós Géza: Hiperbolikus Escher-grafikák. KöMaL 55/1 (2005. január), 2–10. `https://www.komal.hu/cikkek/2005-01/escher.h.shtml`

[2] G7 feladat. IMO Shortlist 2010, 60–63. `https://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf`

Kós Géza

Válogatás az **Emelt szintű érettségi matematikából – 24 válogatott gyakorló feladatsor megoldással** című kiadványunkból*

I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert az egész számpárok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} 9^x\cdot 3^y&=81,\\ 6x+6y+5xy&=0. \end{aligned}\right\}\qquad (\textit{11 pont})$$

2. A miskolci pályaudvar utasellátó büféjének ajtaján a következő tájékoztató szöveg olvasható:

Nyitva tartás 03.30–23.30.
Műszakátadás miatt 07.30–08.30 és 19.30–20.30 között zárva!

a) Mekkora eséllyel találjuk nyitva a büfét, ha reggel 7 és este 9 között véletlenszerűen érkezünk a bejáratához?

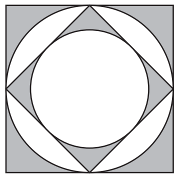
b) Egy vargabélest vásároltunk 200 Ft-ért. A pénzt pontosan kiszámolva adtuk át a pénztárosnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg, ha 20 Ft-osnál kisebb címletet nem adtunk, és a sorrend nem számít?

c) Az utánunk következő vásárló három péksüteményt szeretne venni, a kínálat: diós búrkifli, ízes levél, túrós táska, meggyes rétes és kakaós csiga. Mekkora

*Bővebb információ: `https://www.komal.hu/kiadvany/emeltszintu3.h.shtml`.

eséllyel találjuk el, hogy mit fog vásárolni, ha azt feltételezzük, hogy mindegyik választásának ugyanannyi az esélye? (*12 pont*)

3. Az *ábrán* egy egység oldalú négyzet, annak beírt köre, oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet és annak is a beírt köre látható.



a) Hány százalékát színeztük ekkor szürkére a nagy négyzetnek?

b) Ismételjük meg ezt az eljárást végtelen sokszor. Hány százalékát színeztük így szürkére a nagy négyzetnek? (*14 pont*)

4. Egy 30 fős osztályból hányféle különböző módon állíthatunk össze

a) egy ötfős csoportot; (*2 pont*)

b) egy legfeljebb öt-, de legalább kétfős csoportot; (*4 pont*)

c) egy ötfős csoportot, ha az osztály diákbizottság elnökének mindenképp benne kell lennie; (*4 pont*)

d) egy ötfős csoportot, akik közül egy embert csoportvezetőnek jelölünk ki? (*4 pont*)

II. rész

5. Adott a $[0;9]$ intervallumon értelmezett $f(x)=2\sqrt{x}$ függvény.

a) Egy szabályos háromszög egyik csúcsa az origó, egy másik csúcsa az x tengelyre, a harmadik csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Mekkora e háromszög területe?

b) Egy téglalap egyik oldala az x tengelyre, egy másik oldala az $x=9$ egyenesre, egy csúcsa pedig az $f(x)$ függvény görbéjére illeszkedik. Határozzuk meg a legnagyobb ilyen téglalap területét.

c) Az $f(x)$ függvénygörbe és az x tengely közötti területet az $x=a$ egyenes felezi. Határozzuk meg az a paraméter értékét. (*16 pont*)

6. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-7;-2)$, $B(11;-2)$, $C(-1;10)$.

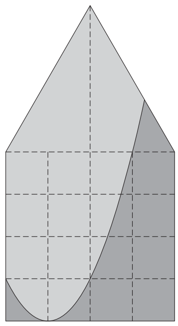
a) Adjuk meg a háromszög mindhárom csúcsától egyenlő távolságra található K pont koordinátáit.

b) Adjuk meg a háromszög M magasságpontjának koordinátáit.

c) Igazoljuk számítással, hogy az ABC háromszögben az S súlypont harmadolja az MK szakaszt. (*16 pont*)

7. *a*) Két pozitív egész szám köbének különbsége 169. Melyek ezek a számok?

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív természetes szám ötödik hatványából kivonjuk magát a számot, a különbség minden esetben osztható lesz a három legkisebb pozitív prímszámmal. (*16 pont*)



8. Egy ház tűzfala egy négyzetből és egy szabályos háromszögből áll. A falat két színnel szeretnék vakolni. A két rész között a határvonal egy parabola lesz, amit a mellékelt *ábra* mutat. A házikó parabola feletti részét világosabbra, a többit sötétebbre vakolják. A felület hány százaléka lesz sötétebb árnyalatú? (*16 pont*)

9. Határozzuk meg azokat az x valós számokat, amelyre $\cos x$ és $\cos 2x$ négyzetösszege a $\cos 3x$ négyzetével egyenlő. (*16 pont*)

9. Van hatféle számkártyánk, mindegyikből 1-1 darab: 1, 2, 3, 4, 5, 6. A kártyákat véletlenszerűen sorba rendezve hatjegyű számokat képezünk.

a) Igazoljuk, hogy $\frac{4}{15}$ annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható lesz 12-vel.

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az így kapott szám a 6-os számjeggyel kezdődik, feltéve, hogy 12-vel osztható.

c) Egy papírlapra felírjuk a számkártyákból képezhető összes lehetséges hatjegyű számot.

Határozzuk meg a papírlapra felírt számok mediánját. (*16 pont*)

Összeállította:
Számadó László
Budapest

Megoldásvázlatok a 2020/1. szám emelt szintű matematika gyakorló feladatsorához

I. rész

1. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x - 1 = 0$, (*7 pont*)

b) $\sqrt{6-x} - \sqrt{5-2x} = 1$. (*6 pont*)

Megoldás. *a*)

$$2 \cdot \cos^2 x - 1 + 3 \cdot \cos x - 1 = 0,$$

$$2 \cdot \cos^2 x + 3 \cos x - 2 = 0.$$

Ebből: $\cos x = -2$ vagy $\cos x = \frac{1}{2}$. A $\cos x = -2$ egyenletnek nincs megoldása, mert $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$. Ha $\cos x = \frac{1}{2}$, akkor $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, vagy $x = -\frac{\pi}{3} + 2l\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát a kapott gyökök kielégítik az eredeti egyenletet.

b) $x \leqslant 6$ és $x \leqslant 2{,}5 \;\Rightarrow\; x \leqslant 2{,}5$.

$$\sqrt{6-x} = 1 + \sqrt{5-2x}\,.$$

Mivel a négyzetgyök definíciója alapján egyik oldal sem negatív, a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás:

$$6 - x = 1 + 5 - 2x + 2 \cdot \sqrt{5-2x}\,,$$
$$x = 2 \cdot \sqrt{5-2x}\,.$$

A négyzetgyök definíciója alapján $x \geqslant 0$.

$$x^2 = 20 - 8x,$$
$$x^2 + 8x - 20 = 0,$$

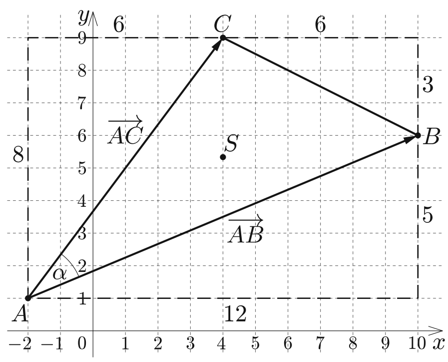
$x_1 = -10$, $x_2 = 2$. A feltétel miatt csak az $x = 2$ megoldás.

Az alaphalmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát a kapott gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

2. *A nem is olyan távoli jövőben a fizika fakultációsok online szimulációban vizsgálhatják töltött részecskék viselkedését mágneses mezőben, ahol a részecskék helyzetét derékszögű koordináta-rendszer segítségével írják le. Két fizika fakultációs diák, Hácé és Kácé fontos kísérletet tervez: egy háromszög csúcsaiba* $\big(A(-2;1)$; $B(10;6)$; $C(4;9)\big)$ *Kácé három detektort helyez. Hácé ekkor egy töltött részecskét juttat a háromszög súlypontjába. A töltött részecske tömege peti-ben (peti: tömegegység a szimulációban) a háromszög területének és a* $BAC\sphericalangle$ *cosinusának szorzata. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit és a részecske tömegének pontos értékét.* (*12 pont*)

Megoldás. A súlypontra vonatkozó képlet alapján:

$$s_1 = \frac{-2+10+4}{3} = 4,$$
$$s_2 = \frac{1+6+9}{3} = \frac{16}{3}.$$



Tehát a súlypont: $S\big(4; \frac{16}{3}\big)$. Az *ábra* jelöléseit követve: a háromszög területét megkapjuk, ha a köré írt téglalap területéből kivonjuk a derékszögű háromszögek területét. Így:

$$T_{ABC} = 8 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 33.$$

$\overrightarrow{AC}(6;8)$, így $|\overrightarrow{AC}| = 10$; $\overrightarrow{AB}(12;5)$, így $|\overrightarrow{AB}| = 13$.

Az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{AB}$ vektorok skaláris szorzatát kétféle módon felírva:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha = 6 \cdot 12 + 8 \cdot 5 = 112,$$

ekkor $\cos\alpha = \frac{56}{65}$. Tehát a részecske tömegének pontos értéke: $\frac{1848}{65}$ peti.

3. *Pébé tanár úr, a C osztály osztályfőnöke lelkesen érkezett a reggeli órára.*

– Képzeljétek, megálmodtam a matematika emelt szintű érettségi átlagunkat!

– És mennyi volt, tanár úr?

– Azt sajnos elfelejtettem, de emlékszem, hogy a D-sek átlaga szabályos közelítéssel 84,3*, az E-seké* 85,1*, a három osztály átlaga pedig* 87,9 *volt. Tudjuk, hogy a D-ből* 11*-en, az E-ből* 14*-en, tőlünk pedig* 24*-en írnak emelt szintű érettségit. Ebből már ki lehet számolni az osztályátlagot.*

a) Mennyi a C-sek osztályátlaga egy tizedesjegyre kerekítve, ha minden diák érettségi eredménye csak egész százalék lehet? (*8 pont*)

A Szalagavató nyitótáncában a C-sek 20%*-a, a D-sek* 25%*-a vesz részt. Az egyik szünetben* 4 *fő C osztályos és* 2 *fő D osztályos tanuló vásárolt pizzát a büfében.*

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan ketten táncolnak a nyitótáncban? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a D-sek százalékainak összege d, az E-seké e, a C-seké c, a három osztályé pedig h. A kerekítés szabályainak megfelelően:

$$84{,}25 \leqslant \frac{d}{11} < 84{,}35 \;\Rightarrow\; 926{,}75 \leqslant d < 927{,}85,$$

így $d = 927$,

$$85{,}05 \leqslant \frac{e}{14} < 85{,}15 \;\Rightarrow\; 1190{,}7 \leqslant e < 1192{,}1,$$

így $d = 1191$, vagy $d = 1192$,

$$87{,}85 \leqslant \frac{h}{49} < 87{,}95 \;\Rightarrow\; 4304{,}65 \leqslant h < 4309{,}55,$$

így h lehet 4305, 4306, 4307, 4308, 4309. Foglaljuk a kapott eredményeket egy táblázatba:

h	d	e	c	$C_{\text{átlag}}$
4305	927	1191	2187	91,125
4305	927	1192	2186	91,083
4306	927	1191	2188	91,167
4306	927	1192	2187	91,125
4307	927	1191	2189	91,208
4307	927	1192	2188	91,167
4308	927	1191	2190	91,250
4308	927	1192	2189	91,208
4309	927	1191	2191	91,292
4309	927	1192	2190	91,250

(A táblázatban a $c = h - d - e$ és a $C_{\text{átlag}} = \frac{c}{24}$ képleteket alkalmaztuk.) Tehát a C-sek átlaga 91,1; 91,2 vagy 91,3 lehet.

b) A binomiális eloszlás képletét felhasználva:

1) Mindketten D-sek:

$$p_D = \binom{2}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^0 \cdot \binom{4}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^4 = \frac{16}{625} = 0{,}0256.$$

2) Mindketten C-sek:

$$p_C = \binom{4}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 \cdot \binom{2}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = \frac{54}{625} = 0{,}0864.$$

3) Egyikük C-s, másikuk D-s:

$$p_{CD} = \binom{4}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^3 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = \frac{96}{625} = 0{,}1536.$$

Így annak valószínűsége, hogy pontosan ketten táncolnak a nyitótáncban:

$$p = \frac{16}{625} + \frac{54}{625} + \frac{96}{625} = \frac{166}{625} = 0{,}2656.$$

4. *Adottak az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 8$ és a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4 - 2x$ függvények.*

a) Adjuk meg a $g \circ f$ függvény $x = 2$ abszcisszájú pontjába húzott érintő egyenletét. *(7 pont)*

b) Adjuk meg a $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f}{g}$ határértéket. *(5 pont)*

Megoldás. *a*) Legyen $h = g \circ f$, ekkor $h(x) = 4 - 2 \cdot (x^3 - 8) = 20 - 2x^3$. Az adott pontba húzott érintő iránytangense a függvény deriváltjának helyettesítési értéke az adott helyen:

$$h'(x) = -6x^2; h'(2) = -24; E(2;4),$$

Az érintő egyenlete: $y - 4 = -24 \cdot (x - 2) \ \Leftrightarrow\ 24x + y - 52 = 0$.

b) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 8}{4 - 2x} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x^2+2x+4)}{-2\cdot(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+2x+4}{-2} = -6.$$

II. rész

5. *Két birkózó egyesület közös bajnokságra készül. A felkészülés során előírás a napi 8 óra alvás. A korábbi felkészülések során kiderült, hogy a felkészülés hatékonyságát jelentősen befolyásolja a regenerálódásra fordított idő. A szakemberek megállapították, hogy a hatékonyságot az $E(t) = t^3 \cdot (3{,}2 - t)$ függvénnyel lehet leírni, ahol t a regenerálódásra fordított idő.*

a) Mennyi időt fordítsanak a regenerálódásra, hogy a felkészülés a lehető leghatékonyabb legyen? (*8 pont*)

A bajnokságot kieséses rendszerben folytatják le, a párokat minden egyes mérkőzés előtt véletlenszerűen sorsolják. Az első pár sorsolásakor $\frac{7}{40}$ a valószínűsége annak, hogy mindkét versenyző az A egyesület tagja. Két mérkőzés után, ahol egy résztvevőt az A, három résztvevőt pedig a B egyesületből sorsoltak ki, ugyanakkora valószínűséggel sorsolják mindkét versenyzőt az A egyesületből, mint a B egyesületből.

b) Hányan indultak a bajnokságon az egyes egyesületekből? (*8 pont*)

Megoldás. *a*) $E(t) = 3{,}2t^3 - t^4$. A függvény szélsőértékét a derivált segítségével határozzuk meg:

$$E'(t) = 9{,}6t^2 - 4t^3.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja nulla és a második derivált nem nulla:

$$9{,}6t^2 - 4t^3 = 0,$$

$$4t^2 \cdot (2{,}4 - t) = 0,$$

$t = 0$ vagy $t = 2{,}4$. A második derivált: $E''(t) = 19{,}2t - 12t^2$, $E''(0) = 0$ és $E''(2{,}4) = -23{,}04 < 0$.

Mivel $t \in [0; 16]$, meg kell vizsgálnunk a függvény helyettesítési értékeit az intervallum határaiban: $E(0) = 0$ és $E(16) = -52\,428{,}8$. Tehát a felkészülés akkor a leghatékonyabb, ha a regenerálódásra fordított idő 2,4 óra.

b) Mivel két mérkőzés után megegyezik annak a valószínűsége, hogy mindkét versenyzőt az A, illetve a B egyesületből sorsolják, ezért két mérkőzés után ugyanannyi versenyző maradt az A egyesületből, mint a B egyesületből. Legyen ez a szám x. Ekkor eredetileg $x + 1$ versenyző indult az A egyesületből és $x + 3$ versenyző a B egyesületből, tehát összesen $2x + 4$ versenyző indult a bajnokságon.

Ekkor az A egyesületből $\binom{x+1}{2}$-féleképpen választhattuk a két versenyzőt, az összes versenyző közül pedig $\binom{2x+4}{2}$-féleképpen. Így annak valószínűsége, hogy az első pár sorsolásakor mindkettőt az A egyesületből választották:

$$\frac{\binom{x+1}{2}}{\binom{2x+4}{2}} = \frac{7}{40} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{(x+1)\cdot x}{2}}{\frac{(2x+4)\cdot(2x+3)}{2}} = \frac{7}{40}.$$

Ebből $6x^2 - 29x - 42 = 0$, $x_1 = -\frac{7}{6}$; $x_2 = 6$. Nyilván csak az $x = 6$ lehet megoldás.

Ellenőrzés: Ha az A egyesületből 7, a B egyesületből 9 versenyző indult, akkor két A-beli versenyzőt választhatjuk $\binom{7}{2} = 21$-féleképpen. Két versenyzőt összesen $\binom{16}{2} = 120$-féleképpen választhatunk. Annak valószínűsége, hogy mindkét versenyzőt az A klubból választottuk: $\frac{21}{120} = \frac{7}{40}$.

Tehát az A klubból 7-en, a B klubból 9-en indultak a versenyen.

6. *Egy paralelogramma alakú füves terület oldalai* 50 m *és* 34 m, *az oldalak végpontjait összekötő átló* 56 m *hosszú. Az átló egy pontjába egy önműködő locsoló berendezést helyezünk, amely a terület bármely pontjából eléri bármely másik pontját, és ha a távolságot beállítottuk, akkor egy körön belül mindent lelocsol.*

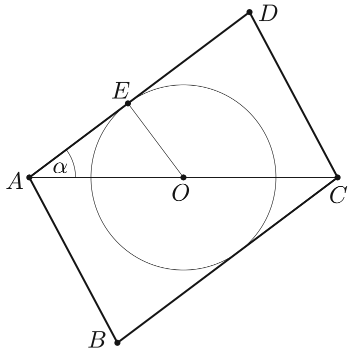
a) Legalább mekkora területet kell kézzel locsolni, ha a locsoló berendezés a terület határán túl nem locsolhat? (*10 pont*)

A füves területen egy kör alakú virágágyást alakítanak ki. A virágágyást két egyenes gyalogút szeli át, amelyek egy a körön kívüli P pontban metszik egymást. A virágágyást az egyik gyalogút az A és B, a másik gyalogút a C és D pontokban metszi. Tudjuk, hogy $PA = 3$ m, $AB = 5$ m, valamint $PD = PC + 10$ m.

b) Mekkora a PD távolság? (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Keressük azt a kört, amely a paralelogrammába beírható, középpontja az átlón van és sugara a legnagyobb. Ez a kör a paralelogramma két szemközti, hosszabb oldalát érintő kör, ebből következően – szimmetria okokból – középpontja a paralelogramma átlójának felezőpontja lesz, hiszen bármely más középpont esetén a kör sugara kisebb lesz, vagy metszi valamelyik oldalt a két szemközti oldal közül.

Felírva a cosinustételt az ACD háromszög CD oldalára:



$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos\alpha,$$

$$34^2 = 50^2 + 56^2 - 2 \cdot 50 \cdot 56 \cdot \cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{4}{5}.$$

Mivel $\alpha < 90°$, ezért

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

Mivel az érintő merőleges a sugárra, ezért az AOE derékszögű háromszögben:

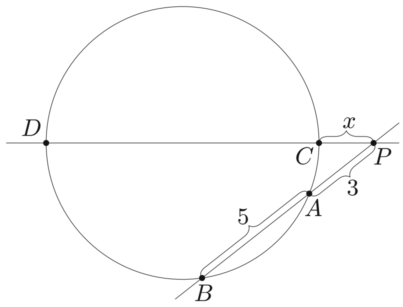
$$r = AO \cdot \sin\alpha = \frac{84}{5} \approx 16{,}8 \text{ m}.$$

Ekkor a kör területe: 886,7 m^2.

A paralelogramma területe:

$$T_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AD \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 56 \cdot 50 \cdot \frac{3}{5} = 1680 \text{ m}^2.$$

Tehát kb. 793,3 m^2 területet kell kézzel locsolni.



b) A külső pontból a körhöz húzott szelő és érintő szakaszok tétele alapján:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD,$$

$$24 = x \cdot (x + 10),$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0,$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -12.$$

Tehát a PD távolság 12 m.

7. *a*) *Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos páratlan számok reciprokainak különbsége egyenlő a számok szorzata reciprokának kétszeresével.* (*4 pont*)

Adott az $\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \ldots$ *végtelen sor.*

b) *Bizonyítsuk be, hogy az* n*-edik részletösszeg:*

$$S_n = \frac{n}{3n+1}. \qquad (8\ pont)$$

c) *Adjuk meg a* $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n)$ *határértéket.* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Legyenek a szomszédos páratlan számok: $2k-1$ és $2k+1$.

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} = \frac{2k+1-(2k-1)}{(2k-1)\cdot(2k+1)} = \frac{2}{(2k-1)\cdot(2k+1)}.$$

b) A nevezőkben található szorzatok első tényezői egy olyan számtani sorozatot alkotnak, amelynek első eleme 1, különbsége 3. Így a részletösszeg i-edik tagjának nevezőjében található szorzat első tényezője: $1 + (i-1)\cdot 3 = 3i - 2$. Tehát a részletösszeg i-edik tagja:

$$\frac{1}{(3i-2)\cdot(3i+1)}$$

Mivel

$$\frac{1}{3i-2} - \frac{1}{3i+1} = \frac{3i+1-(3i-2)}{(3i-2)\cdot(3i+1)} = \frac{3}{(3i-2)\cdot(3i+1)},$$

a részletösszeg i-edik tagja:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3i-2} - \frac{1}{3i+1}\right).$$

Így az n-edik részletösszeg:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)} =$$

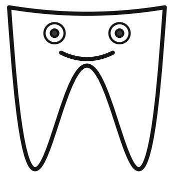
$$= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3n}{3n+1} = \frac{n}{3n+1}.$$

Megjegyzés. A bizonyítás természetesen teljes indukcióval is elvégezhető.

c) $$\lim_{n\to\infty}(S_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{3n}{n}+\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3+\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{3}.$$

8. *Az* ábrán *egy nemzetközi fogász kongresszus emblémája látható.*



Az alakzatot az alábbi függvények grafikonjai határolják:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{4}x^4-2x^2+2\quad \text{és}\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{36}x^2+4.$$

a) Határozzuk meg a függvények grafikonjainak metszéspontjait. (*2 pont*)

b) Mekkora az embléma területe, ha a koordináta-rendszer 1 *egysége a valóságban* 1 cm*-nek felel meg?*

A konferencián egy asztalhoz került hat fogorvos, akik örömmel állapították meg, hogy valamennyien részt vesznek egy programban, amelyben hasznos kezelési eljárásokat osztanak meg egymással. Ennek keretében a hat fogorvos is kapcsolatban áll egymással, mindegyik mindegyikkel. A kapcsolattartás két hálózaton keresztül folyik, de két fogorvos egymás között mindig ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*8 pont*)

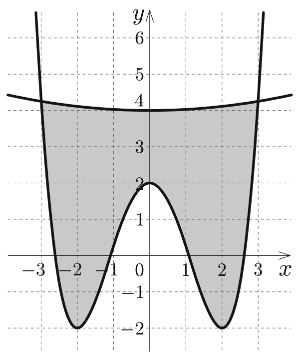
c) Bizonyítsuk be, hogy az asztalnál helyet foglaló hat fogorvos között van három olyan, aki egymás közt ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*6 pont*)

Megoldás. *a*)

$$\frac{1}{4}x^4-2x^2+2=\frac{1}{36}x^2+4,$$

$$9x^4-73x^2-72=0,$$

$$x_1^2=-\frac{8}{9};\quad x_2^2=9.$$



A két gyök közül csak $x^2=9$ ad megoldást, így a metszéspontok: $\left(-3;\frac{17}{4}\right)$ és $\left(3;\frac{17}{4}\right)$.

b)

$$T=\left|\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{4}x^4-2x^2+2-\left(\frac{1}{36}x^2+4\right)\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{73}{36}x^2-2\right)\mathrm{d}x\right|=$$

$$=\left|\left[\frac{1}{20}x^5-\frac{73}{108}x^3-2x\right]_{-3}^{3}\right|=\left|\frac{243}{20}-\frac{73}{4}-6-\left(-\frac{243}{20}+\frac{73}{4}+6\right)\right|=$$

$$=\left|-\frac{121}{5}\right|=24{,}2$$

Tehát az embléma területe 24,2 cm^2.

c) Jelölje a hálózatokat H_1, illetve H_2. Válasszunk ki egy fogorvost. Mivel két hálózat van és öt partner, ezért a skatulya-elv értelmében a fogorvos az egyik hálózaton legalább három kollégával kommunikál, legyen ez a hálózat H_1. Ha az így meghatározott legalább három fogorvos között van kettő, aki egymással a H_1 hálózaton kommunikál, akkor ők és az eredetileg kiválasztott fogorvos alkotja a keresett hármast, hiszen ők egymás között a H_1 hálózaton kommunikálnak. Ha a legalább három fogorvos között semelyik kettő nem kommunikál egymás közt a H_1 hálózaton, akkor ők egymás között csak a H_2 hálózaton kummunikálhatnak. Így viszont lesz közöttük három olyan, aki egymás közt a H_2 hálózaton kommunikál.

9. *Egy függönytartó rúd kúpban végződik. Rögzítő elemként egy R sugarú gömböt kúposan átfúrunk úgy, hogy pontosan illeszkedjen a rúd végére, majd az így kapott testet ráhúzzuk úgy, hogy a kúp tengelye átmenjen a gömb középpontján. A rögzítőelem magassága* 7 cm, *a felső alapköre $r_1 = 3$* cm, *az alsó alapköre $r_2 = 4$* cm *sugarú.*

a) *Határozzuk meg a rögzítőelem felszínét és térfogatát.* (*10 pont*)

Az áruházban a függönytartó rudakat négyféle színben (arany, ezüst, fehér, fekete), a rögzítőelemet háromféle színben (arany, zöld és piros), a függönyöket ötféle színben (arany, ezüst, fehér, zöld, piros) árulják.

b) *Hányféle kombinációt lehet összeállítani, ha az az előírás, hogy legalább az egyik elem aranyszínű legyen és a rúd két végén lévő rögzítőelem azonos színű?*

Megoldás. *a*) *1. eset:* a gömb középpontja az alapkörök között van.

A kapott test egy gömbréteg, amelyből kivágtak egy csonkakúpot. Az *1. ábrán* látható QAK és PBK háromszögekre felírjuk Pitagorasz tételét:

$$(7-x)^2 + 3^2 = R^2 \quad \text{és} \quad x^2 + 4^2 = R^2.$$

A két egyenletet kivonva egymásból:

$$14x - 42 = 0,$$
$$x = 3.$$

Ekkor $R = 5$ cm.

A csonkakúp alkotójára felírva a Pitagorasz-tételt: $7^2 + 1^2 = a^2$, így $a = 5\sqrt{2}$. A rögzítőelem felszíne a gömböv és a csonkakúppalást felszínének összege:

$$A = 2\pi Rm + \pi(r_1 + r_2)a = 70\pi + 35\sqrt{2}\pi \approx 375{,}4 \text{ cm}^2.$$

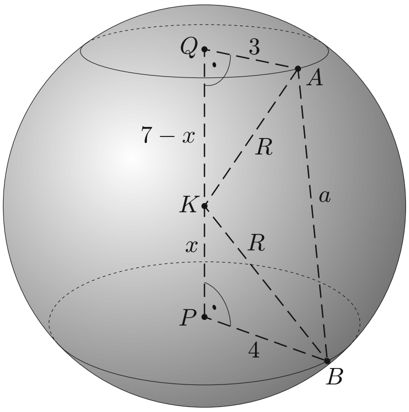
A rögzítőelem térfogatát megkapjuk, ha a gömbréteg térfogatából kivonjuk a csonkakúp térfogatát:

$$V = \frac{\pi}{6}m(m^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2) - \frac{\pi}{3}m(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2) = \frac{434}{3}\pi - \frac{259}{3}\pi \approx 183,3 \text{ cm}^3.$$

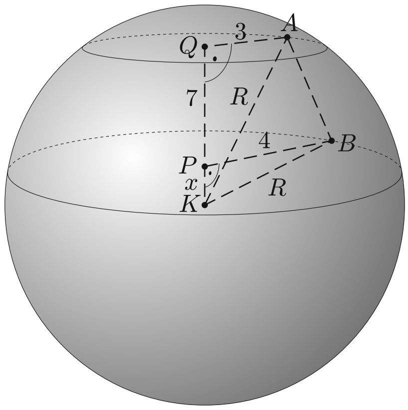
2. eset: a gömb középpontja nincs az alapkörök között.

A kapott test egy gömbréteg, amelyből kivágtak egy csonkakúpot. A *2. ábrán* látható QAK és PBK háromszögekre felírjuk Pitagorasz tételét:

$$(7+x)^2 + 3^2 = R^2 \quad \text{és} \quad x^2 + 4^2 = R^2.$$



1. ábra



2. ábra

A két egyenletet kivonva egymásból:

$$14x + 42 = 0,$$
$$x = -3.$$

Tehát ebben az esetben nincs megoldás.

b) A kombinációk számát úgy határozzuk meg, hogy az összes lehetséges eset számából kivonjuk a komplementer esemény (nincs aranyszínű elem) lehetőségeinek számát.

Összes lehetőség: négyféle rúd, háromféle rögzítő elem és ötféle függöny, összesen: $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$.

Komplementer: háromféle rúd, kétféle rögzítő elem, négyféle függöny, összesen: $3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$.

Tehát összesen $60 - 24 = 36$ olyan kombináció van, amelyben valamelyik elem aranyszínű.

Balga Attila
Budapest

Matematika feladatok megoldása

B. 4973. *Legyenek* $a_1, a_2, \ldots, a_{2018}$ *olyan nemnegatív valós számok, amelyek összege* 1. *Adjuk meg az*

$$S = \sum_{i \neq j,\ i|j} a_i a_j$$

összeg lehető legnagyobb értékét.

(*6 pont*) (*Argentin feladat alapján*)

I. megoldás. Először belátjuk, hogy a legnagyobb összeg elérhető olyan a_i számokkal, amelyekre igaz a következő: ha a_i és a_j pozitív számok, és $i < j$, akkor $i \mid j$.

Legyen S egy olyan összeg, amelynél van olyan i és j, hogy $i \nmid j$, $j \nmid i$, de $a_i > 0$ és $a_j > 0$.

Egy olyan „cserét” fogunk definiálni, ami az S összeget nem csökkenti. Legyen s_i, illetve s_j azon a_k számok összege, melyeknek indexével i, illetve j valódi osztó, vagy valódi többszörös relációban áll, azaz

$$s_i = \sum_{\substack{k\neq i\\ (i|k \vee k|i)}} a_k, \qquad \text{illetve} \qquad s_j = \sum_{\substack{k\neq j\\ (j|k \vee k|j)}} a_k.$$

Ekkor $i \nmid j$ és $j \nmid i$ miatt s_i-ben nem szerepel a_j, és s_j-ben nem szerepel a_i.

Legyen $s_i \geqslant s_j$. Az

$$S = \sum_{\substack{k\neq l\\ k|l}} a_k a_l$$

összeget bontsuk három részre; az első részben legyenek azok a kéttényezős szorzatok, amelyeknek valamely tényezője a_i, a másodikban azok, melyeknek valamely tényezője a_j, míg a harmadik „maradék” rész álljon azokból a szorzatokból, amelyeknek egyik tényezője sem a_i vagy a_j, azaz

$$S = a_i s_i + a_j s_j + \sum_{\text{„maradék”}} a_k a_l.$$

Ha most a_i-t kicseréljük $a_i' = a_i + a_j$-re, míg a_j-t $a_j' = 0$-ra, akkor az új S' összegre (mivel a maradék, i, j-től független rész nem változik)

$$S' - S = a_i' s_i + a_j' s_j - a_i s_i - a_j s_j = (a_i + a_j)s_i - a_i s_i - a_j s_j = a_j(s_i - s_j) \geqslant 0,$$

tehát az S összeget nem csökkentettük.

Mindaddig, amíg van olyan i és j, hogy $i \nmid j$, $j \nmid i$, de $a_i > 0$ és $a_j > 0$, hajtsuk végre a fent definiált cserét. A cserék nem folytatódhatnak a végtelenségig, mivel a pozitív a_k-k száma minden csere során 1-gyel csökken; emiatt legfeljebb 2017 lépés után nem tudunk többet cserélni. Ekkor valóban teljesül, hogy ha a_i és a_j 0-tól különböző számok, és $i < j$, akkor $i \mid j$. A továbbiakban már csak ezzel az esettel fogunk foglalkozni.

Legyenek a pozitív a_i számok indexei növekedő sorrendben $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Pozitív számok körében ha j valódi többszöröse i-nek, akkor $2 \cdot i \leqslant j$. Emiatt az $i_1, i_2, \ldots, i_k$ index-sorozatnak legfeljebb 11 tagja lehet, hiszen $1 = 2^0 \leqslant i_1$; $2 = 2^1 \leqslant i_2$; $4 = 2^2 \leqslant i_3$; $\ldots$; $1024 = 2^{10} \leqslant i_{11}$ és a 12-edik tag esetén $2018 < 2048 \leqslant i_{12}$ lenne.

Tizenegy ilyen tag viszont kiválasztható, ha például a 2018-nál kisebb 2-hatványokat vesszük; ekkor a pozitív tagok: $a_1, a_2, a_4, \ldots, a_{2^n}, \ldots; a_{1024}$.

Vizsgáljuk meg, hogy $1 \leqslant k \leqslant 11$ darab pozitív a_i tag esetén mekkora a maximális (k-tól függő) $S = S_k$ összeg.

Fel fogjuk használni a számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést. Ennek alapján a nemnegatív, 1 összegű c_i számokra:

$$\frac{1}{n}=\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\leqslant\sqrt{\frac{c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2}{n}},$$

innen rendezéssel adódik:

$$\frac{1}{n}\leqslant c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2$$

(és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $c_1=c_2=\ldots=c_n=\frac{1}{n}$.)

$$S_k=a_{i_1}a_{i_2}+a_{i_1}a_{i_3}+\ldots+a_{i_{k-1}}a_{i_k}=$$
$$=\frac{\left(a_{i_1}+a_{i_2}+a_{i_3}+\ldots+a_{i_k}\right)^2-\left(a_{i_1}^2+a_{i_2}^2+a_{i_3}^2+\ldots+a_{i_k}^2\right)}{2}=$$
$$=\frac{1-\left(a_{i_1}^2+a_{i_2}^2+a_{i_3}^2+\ldots+a_{i_k}^2\right)}{2}\leqslant\frac{1-\frac{1}{k}}{2}.$$

Mivel nyilván $S_k<S_{k+1}$, akkor kapjuk a lehető legnagyobb S-et, ha a lehető legtöbb, azaz pontosan 11 pozitív a_i tagunk van. Ekkor

$$S=S_{11}\leqslant\frac{1-\frac{1}{11}}{2}=\frac{5}{11}$$

és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha mind a 11 pozitív a_i tagra $a_i=\frac{1}{11}$.

Összegezve: S maximuma $\frac{5}{11}$ és ez meg is valósítható, ha $a_1=a_2=a_4=\ldots=$ $=a_{2^n}=\ldots=a_{1024}=\frac{1}{11}$.

Molnár Bálint (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Soroljuk az $1,2,3,\ldots,2017,2018$ számokat a $H_0,H_1,\ldots,H_{10}$ csoportokba aszerint, hogy multiplicitással számolva hány prímosztójuk van. Az 1 kerüljön H_0-ba, a prímszámok H_1-be, a prímszámok négyzetei, és azok a számok, amelyek két különböző prím szorzataként állnak elő kerüljenek H_2-be és így tovább. (Például $24=2^3\cdot3^1$ a H_4-be kerül, és ha egy n összetett szám prímfelbontása $n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_l^{k_l}$, akkor az a $H_{k_1+k_2+\ldots+k_l}$ csoportba kerül, míg az utolsó csoport: $H_{10}=\{2^{10};2^9\cdot3\}=\{1024;1536\}$.)

A csoportok száma valóban 11 lesz, mert $2^{11}=2048>2018$ miatt nincs olyan számunk, melynél a (multiplicitással számolt) prímosztók száma 10-nél több.

Ha az $i\neq j$ számokra $i\mid j$, akkor i és j más-más csoportba kerülnek, hiszen i-nek (multiplicitással számolva) kevesebb prímosztója van, mint j-nek.

Legyen $0\leqslant i\leqslant10$ esetén $b_i=\sum\limits_{j\in H_i}a_j$. (Például $b_0=a_1$, $b_1=a_2+a_3+a_5+$ $+a_7+\ldots+a_{2017}$, míg $b_{10}=a_{1024}+a_{1536}$.)

Tekintsük a

$$B=\sum_{0\leqslant k<l\leqslant 10} b_kb_l=b_0b_1+b_0b_2+b_0b_3+\ldots+b_9b_{10}$$

összeget. Legyen $i\in H_k$; $j\in H_l$; $i\neq j$; $i\mid j$. Ekkor a kéttényezős a_ia_j szorzat a $b_kb_l=(\ldots+a_i+\ldots)(\ldots+a_j+\ldots)$ zárójel-felbontott alakjának valamely tagja. Emiatt

$$S\leqslant B=\sum_{0\leqslant k<l\leqslant 10} b_kb_l=\frac{(b_0+b_1+\ldots+b_{10})^2-\left(b_0^2+b_1^2+\ldots+b_{10}^2\right)}{2}.$$

Erre az összegre (az előző megoldásban leírt módon) adódik:

$$S\leqslant\frac{(b_0+b_1+\ldots+b_{10})^2-\left(b_0^2+b_1^2+\ldots+b_{10}^2\right)}{2}\leqslant\frac{1-\frac{1}{11}}{2}=\frac{5}{11}.$$

Másfelől az $S=\frac{5}{11}$ elérhető az $a_1=a_2=a_4=a_8=\ldots=a_{2^n}=\ldots=a_{1024}==\frac{1}{11}$ választással.

Jedlovszky Pál (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) és
Szabó Dávid (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.)
dolgozata alapján

Megjegyzés. Jedlovszky Pál a második megoldással ekvivalens saját megoldásában az ott definiált $H_0,H_1,\ldots,H_{10}$ halmazokat úgy vette fel, hogy $H_0=\{1\}$; $H_1=\{2;3\}$; $H_2=\{4;5;6;7\}$; $\ldots$; $H_{10}=\{1024;1025;\ldots;2018\}$ legyen, míg *Tóth Balázs* (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 11. évf.) egy 2018 csúcsú (1–2018-ig címkézett) gráf csúcsait színezte meg 11 színnel aszerint, hogy a megfelelő címke-számoknak (multiplicitással számolva) hány prímosztója van.

Összesen 37 dolgozat érkezett. 6 pontot kapott 14 versenyző: Beke Csongor, Dobák Dániel, Füredi Erik Benjámin, Győrffy Ágoston, Hegedűs Dániel, Jedlovszky Pál, Márton Dénes, Molnár Bálint, Nagy Nándor, Szabó Dávid, Tóth Balázs, Tubak Dániel, Várkonyi Zsombor, Weisz Máté. 5 pontos 4, 4 pontos 7, 3 pontos 3, kevesebb további 9 tanuló dolgozata.

B. 5017. *Van-e olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény, amely teljesíti a következő tulajdonságokat?*

(1) *$x_1\neq x_2$ esetén $f(x_1)\neq f(x_2)$ teljesül,*

(2) *léteznek olyan $a,b>0$ konstansok, melyekre bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén*

$$f(x^2)-\big(f(ax+b)\big)^2\geqslant\frac{1}{4}.$$

(*4 pont*)

Megoldás. Tegyük fel, hogy létezik a feladat követelményeit kielégítő függvény és a hozzá tartozó a és b pozitív konstansok. Keressük meg azokat az x számokat, amelyekre $x^2 = ax + b$.

E másodfokú egyenletnek – mivel a és b pozitívak – két (különböző) megoldása van, legyenek ezek x_1 és x_2. Az x_1 és x_2 nem egymás ellentettjei, hiszen $a \neq 0$. Ekkor $i = 1, 2$ bármelyik értékére

$$f\left(x_i^2\right) - \left(f(ax_i + b)\right)^2 = f\left(x_i^2\right) - \left(f\left(x_i^2\right)\right)^2 \geqslant \frac{1}{4},$$

azaz

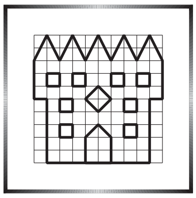
$$0 \geqslant \left(f\left(x_i^2\right)\right)^2 - f\left(x_i^2\right) + \frac{1}{4} = \left(f\left(x_i^2\right) - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Ez csak akkor teljesül, ha $f\left(x_i^2\right) = \frac{1}{2}$, vagyis $f\left(x_1^2\right) = \frac{1}{2} = f\left(x_2^2\right)$. Mivel $x_1 \neq \pm x_2$, azért a függvény két különböző $\left(x_1^2 \text{ és } x_2^2\right)$ helyen is felveszi ugyanazt az értéket, ami ellentmond a feladat első feltételének. Tehát a kérdéses függvény nem létezik.

Tóth Bálint (Kaposvári Táncsics M. Gimn., 9. évf.)

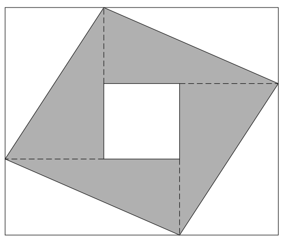
35 dolgozat érkezett. 4 pontos 28, 3 pontos 3, 1 pontos 1, 0 pontos 3 dolgozat.

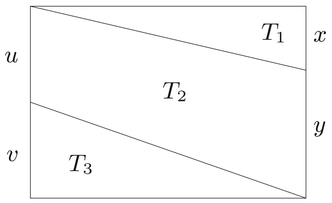
A K pontversenyben kitűzött gyakorlatok ABACUS-szal közös pontverseny 9. osztályosoknak (649–653.)



K. 649. Egy gyorsvonat és egy személyvonat egymással szemben halad két párhuzamos vágányon. A vonatok egyforma hosszúak. A sínpályán van egy alagút, amelynek két bejáratához egyszerre érnek a vonatok. A gyorsvonat innen számítva 3 másodperc, a személyvonat 6 másodperc alatt ér be teljes terjedelmében az alagútba. A vonatok az alagútban az alagút elérésének pillanatától számítva 18 másodperc múlva találkoznak egymással. Hány másodperc alatt haladnak el egymás mellett? A találkozástól számítva hány másodperc elteltével ér ki a gyorsvonat, illetve a személyvonat az alagútból teljes terjedelmében?

K. 650. Az *ábrán* látható kis négyzet oldala 3 cm, a nagy téglalap oldalai egész számok, és az egyik 2 cm-rel hosszabb a másiknál. A téglalap és a négyzet oldalai párhuzamosak, középpontjuk egybeesik. A satírozott terület úgy keletkezett, hogy a kis négyzet oldalait meghosszabbítottuk az egyik irányba, és ahol a nagy téglalap oldalait ezek elmetszették, azokat a pontokat kötöttük össze. Lehet-e a satírozott terület nagysága (cm^2-ben mérve) páros szám?





K. 651. Az *ábrán* látható területekre teljesül, hogy $T_1 : T_2 : T_3 = 2 : 7 : 3$. Mennyi az x és y, illetve az u és v szakaszok aránya?

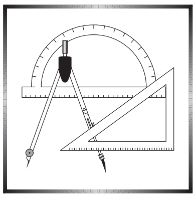
K. 652. Egy dobozban sárga, kék és piros golyók vannak, mindegyikből 10-10 darab. Hányféleképpen oszthatjuk szét ezeket egy 10-es és egy 20-as csoportra úgy, hogy mindkét csoportban mindegyik színű golyóból legyen legalább egy? (Az azonos színű golyókat nem tudjuk egymástól megkülönböztetni.)

K. 653. Tudjuk, hogy $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$ és $a, b > 1$ egész számok. Adjuk meg $a+b$ minimális értékét.

❄

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



A C pontversenyben kitűzött gyakorlatok (1588–1594.)

Feladatok 10. évfolyamig

C. 1588. Legyenek az $ABCD$ négyszög AB, illetve AD oldalainak A-hoz közelebbi harmadolópontjai E és F, a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontja pedig G. Tükrözzük a G pontot E-re, majd az így kapott tükörképet F-re. Igazoljuk, hogy a kapott tükörkép ráesik a négyszög valamely oldalára. Melyik oldalon van, és milyen arányban osztja azt?

C. 1589. Oldjuk meg a valós számpárok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(y^2 + y - x - 1)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4.$$

Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

Feladatok mindenkinek

C. 1590. Oldjuk meg a pozitív egész számokból álló számhármasok halmazán az alábbi egyenletet:

$$(a+1)^4 \cdot (b+1)^4 \cdot (c+1)^4 = (40a+1) \cdot (40b+1) \cdot (40c+1).$$

C. 1591. Egy hajó koordinátái $x=2$, $y=0$. A szemközti tengerpart az $y = \sqrt{2x+1}$ egyenletű görbe mentén húzódik. Mekkora szögben térjen el a hajó az északi iránytól, ha azt szeretnénk, hogy a part legközelebbi pontját egyenes úton elérje? (Tegyük föl, hogy az x tengely kelet irányába mutat.)

C. 1592. Angliában két jóbarát elindult megkeresni egyikük elveszett jegygyűrűjét. Azt ugyan nem találták meg, de a fémkeresővel néhány VIII. Henrik idejéből származó aranypénzre bukkantak, amelyek 100 000 fontot hoztak a két jóbarátnak. A kitűnő állapotban megmaradt 1 fontos érmék évi átlagos értéknövekedése az 500 év alatt 1,42% és 1,43% között volt. Hány érmét találhattak?

Feladatok 11. évfolyamtól

C. 1593. Egy háromszög két oldala 3 cm, illetve 4 cm hosszú. Mekkora a két oldal által bezárt szög, ha a hozzájuk tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra?

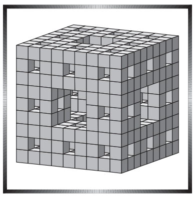
C. 1594. Egy rendezvény nézőterének első sorában 24 szék van. Ezek közül 20 már foglalt. Mekkora annak a valószínűsége, hogy van 2 üres hely egymás mellett?

❄

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

A B pontversenyben kitűzött feladatok (5078–5085.)



B. 5078. Definiáljuk az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}), \quad \text{ha } n > 1.$$

Határozzuk meg a_{2020} értékét.

(*4 pont*)

B. 5079. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\log_2 \log_3 x + \log_3 \log_2 x = \log_2 \frac{6}{\log_2 3}$$

egyenletet.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5080. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapjának felezőpontja D, AC szárának C-hez közelebbi harmadolópontja H. A BCH kör a CD egyenest a C és az X pontban metszi. Mutassuk meg, hogy $CX = \frac{4}{3}r$, ahol r az ABC kör sugara.

(*4 pont*)

B. 5081. Egy háromszögben az a és b odalakhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$.

(*3 pont*)

B. 5082. Igazoljuk, hogy tetszőleges háromszögben a magasságok mértani, számtani és négyzetes közepe rendre nem nagyobb a hozzáírt körök sugarainak a mértani, számtani, illetve négyzetes közepénél.

(*5 pont*)

B. 5083. Van-e olyan 100-adfokú valós együtthatós $p(x)$ polinom, melyre a $p\big(p(x)\big)$ polinomnak 10000 különböző valós gyöke van?

(*5 pont*)

B. 5084. Legyen n pozitív egész szám, és legyen $\mathcal{S}$ az n hosszú $0-1-2$ sorozatok halmaza. Határozzuk meg, hogy mely $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{S}$ halmazok rendelkeznek a következő tulajdonsággal: bárhogyan is választunk egy

$$(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathcal{S} \setminus \big\{(0, 0, \ldots, 0)\big\}$$

vektort, az A halmaz egy véletlenszerűen választott $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ elemére a $c_1a_1 + c_2a_2 + \ldots + c_na_n$ szorzatösszegnek 1/3–1/3 valószínűséggel lesz 0, 1, illetve 2 a hármas maradéka.

(*6 pont*) *Kürschák* feladat alapján

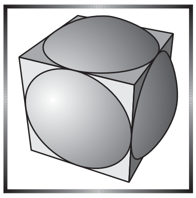
B. 5085. Mutassuk meg, hogy a szabályos hétszöget fel lehet darabolni véges sok, egymáshoz hasonló szimmetrikus trapézra.

(*6 pont*) Javasolta: *Laczkovich Miklós* (Budapest)

❄

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄



Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (769–771.)

A. 769. Határozzuk meg azokat a három különböző pozitív egész számból álló (a, b, c) számhármasokat, melyekhez létezik olyan H részhalmaza a pozitív egész számoknak, hogy minden pozitív egész n-re az an, bn, cn számok közül pontosan egy van benne a H halmazban.

Javasolta: *Carl Schildkraut* (Massachussets Institute of Technology)

A. 770. Határozzuk meg azokat az n pozitív egészeket, melyekre $n!$ két Fibonacci-szám szorzata.

A. 771. Legyen az ABC háromszög beírt köre ω, mely a BC oldalt a D pontban érinti. Az AD egyenes második metszéspontja az ω körrel legyen G. Az ω körhöz a G pontban húzott érintő messe az AB és AC oldalakat rendre az E és az F pontban. A DEF körülírt körének D-től különböző metszéspontja ω-val legyen M. A BCG körülírt körének a G-től különböző metszéspontja ω-val legyen N. Bizonyítandó, hogy az AD és MN egyenesek párhuzamosak.

Javasolta: *Győrffy Ágoston* (Remeteszőlős)

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

Informatikából kitűzött feladatok

I. 502. A számegyenesen N darab intervallumot adunk meg. Az intervallumok nyíltak vagy zártak lehetnek, határpontjaik egészek vagy tizedes törtek. Jelölésük a szokásos módon történik (az informatikában megszokottabb tizedes pontot használva), például $[4, 5.2[$ vagy $]-3.3, 4.66[$, ahol az első intervallum balról zárt és jobbról nyílt, míg a második mindkét oldalról nyílt. Keressük meg a számegyenes azon egész számait, amelyek a legtöbb intervallumban vannak benne.

A program olvassa be a bemenet első sorából az intervallumok N számát ($2 \leqslant N \leqslant 100$), és a következő N sorból egyenként az intervallumokat. A bemenet intervallumai az egyszerűbb beolvasás céljából szóközökkel tagoltak a mintának megfelelően, valamint mind a $[-1000, 1000]$ intervallum részei.

A kimenet egyetlen sorába írjuk ki növekvő sorrendben a legtöbb intervallumban szereplő egészeket. Az eredmény számait szóközökkel határoljuk, az egymást követő egészek sorozatának csak szélső értékeit adjuk meg kötőjellel elválasztva.

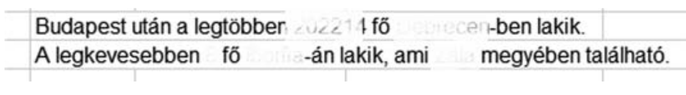
Példa Bemenet (a / jel sortörést helyettesíti)	**Példa Kimenet**
`3 / [ -5.5 , 9 ] / ] 7 , 11.1 [ / ] 3 , 5 [`	`4 8 - 9`

Beküldendő egy tömörített `i502.zip` állományban a megoldást tartalmazó forrásállomány, valamint egy rövid szöveges leírás, ami tájékoztat az alkalmazott programozási nyelvről és a fejlesztői környezetről.

Letölthető állományok: `i502beki.zip` (példa be- és kimenetek).

I. 503 (É). Magyarország közigazgatási helynévkönyve egy 1992 óta évente megjelenő kiadvány, mely tartalmazza minden település hivatalos megnevezését, megyei beosztását, a közös önkormányzati hivatalokat, a helységek járási besorolását, valamint a nemzetiségi önkormányzatokat. Közli a helységek 2018. január 1-jei területnagyság-, lakónépesség- és lakásszámadatát, továbbá a helységek KSH által kibocsátott településazonosító törzsszámát. Feladatunk ezen adatok feldolgozása lesz táblázatkezelő program segítségével.

1. Töltsük be a települési adatokat tartalmazó `hnk1_2018.txt` szövegfájlt a táblázatkezelő egy munkalapjára az A1-es cellától kezdődően, a kódok jelentését tartalmazó `hnk2_2018.txt` szövegfájlt pedig egy másik munkalapra. A munkalapok neve legyen rendre **adat** és **statisztika**. Mindkét állomány pontosvesszővel tagolt, UTF-8 kódolású.
2. Munkánkat `kozighelynev` néven mentsük el a táblázatkezelő alapértelmezett formátumában.
3. A C3183-as cellától kezdődően egymás alá gyűjtsük ki a jogállásokat. Minden típust egyszer. A mellette lévő D oszlopban pedig másolható függvény segítségével adjuk meg, hogy az egyes jogállástípusokból hány található az országban.
4. Hozzunk létre egy új oszlopot a jelenlegi H oszlop mögé és ebben az oszlopban jelenjen meg az önkormányzati hivatali kód jelentése, ami a statisztika munkalapon található.
5. A **statisztika** munkalap C11:E11-es celláiban függvény segítségével adjuk meg Magyarország területét (hektárban), lakónépességét és a lakások számát. Ügyeljünk rá, hogy Budapest szerepel kerületenként lebontva is a listában.
6. Tudjuk, hogy legtöbben Budapesten laknak. A **statisztika** munkalap B9-es cellájában egész mondatba foglalva, függvények segítségével a lakosságszámot is megadva, írjuk ki annak a településnek a nevét, ami a második legnagyobb lakosságszámú.
7. Az előző mintájára a B10-es cellában adjuk meg annak a településnek a nevét, megyéjét, és lakosságszámát, ahol a legkevesebben laknak.



8. Az N oszlopban adjuk meg, hogy két tizedesjegyre felfelé kerekítve átlagosan hányan élnek egy lakásban.
9. Készítsünk egy 21 soros, 14 oszlopos táblázatot a **statisztika** munkalapra az eredeti táblázat mellé, úgy, hogy a G3-as cellába „Bács-Kiskun” megye kerüljön. Alatta gyűjtsük ki az **adatok** munkalap *D* oszlopában található „megye” neveket és rendezzük ABC-rendbe. A H2-es cellába a „bolgár” szó kerüljön, a mellette lévő cellákba a többi nemzetiségi önkormányzat az **adat** munkalapról. A táblázatot töltsük fel egyetlen másolható függvény használatával úgy, hogy megyénként adja meg az önkormányzatok számát.

	bolgár	görög	horvát	lengyel
Bács-Kiskun	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Baranya	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Békés	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Borsod-Abaúj-Zemplén	[illegible]	1	[illegible]	[illegible]
Csongrád	[illegible]	1	1	1
Fejér	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
főváros	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Győr-Moson-Sopron	[illegible]	[illegible]	9	[illegible]
Hajdú-Bihar	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Heves	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

10. A **statisztika** munkalapon található C oszlopban adjuk meg, hogy az egyes önkormányzati hivatalokhoz hány lakás tartozik.

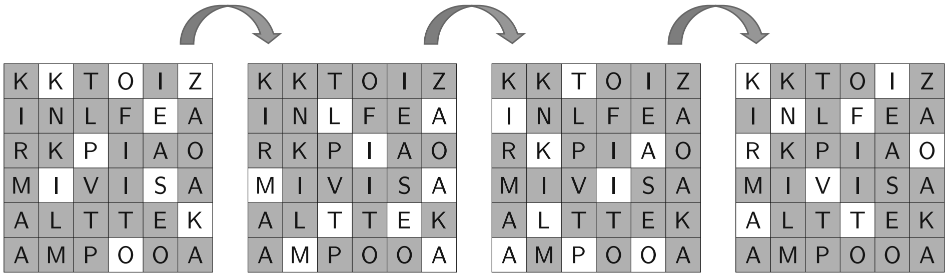
Forrás: `http://www.ksh.hu/apps/shop.kiadvany?p_kiadvany_id=1039140&p_lang=HU` (2019.09.11.).

Beküldendő egy tömörített `i503.zip` állományban a megoldást adó táblázatkezelő munkafüzet és egy rövid dokumentáció, amely megadja a felhasznált táblázatkezelő nevét és verzióját.

I. 504. A középkorban használt titkosítási eljárások egyike a Cardano-rács. A titkosítandó szöveget ebben az esetben négyzet alakban rendezik el, a szöveg rejtjelezése és visszafejtése pedig az erre illeszkedő, megfelelő helyeken kivágott rostély ablakain keresztül történik. A szövegből a rácsban csak a betűk szerepelnek, az írásjelek és szóközök nem. A rostély egy-egy helyzetében a látható betűket sorfolytonosan kiolvassuk, a rostély háromszori körbefordításával a négyzet minden betűje felhasználásra kerül. (A dupla betűket két karakterrel kódoljuk, például GY helyett G és Y.)

A módszer bemutatása az **I. 201.** feladatban szerepelt, érdemes belenézni a kitűnő mintamegoldásokba (`https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=I201&l=hu`).

Készítsünk programot, amely a Cardano-ráccsal történő rejtjelezést és visszafejtést végzi el:



1. Olvassuk be és tároljuk el a Cardano-rácsot tartalmazó `cardano.txt` állományt, amely egy 6×6-os rostélyt tartalmaz. Az átlátszó rácspontokban `0` szerepel, a nem átlátszókban `1`.
2. Készítsünk eljárást `Forgat` néven, amely lehetővé teszi a Cardano-rács -90 fokos (vagyis az óramutató járásával egyező irányú) elforgatását.
3. Írassuk ki a képernyőre a megadott Cardano-rácsot, valamint annak -90 fokos elforgatását. A két rács egymás alatt jelenjen meg.
4. A fenti mintán látható szöveget a `titkos.txt` fájl tartalmazza 6×6-os rácsokra bontva. Olvassuk be a fájl tartalmát, fejtsük vissza azt a megadott Cardano-rács segítségével a `Forgat` eljárás felhasználásával, majd a megfejtést sorfolytonosan írassuk ki a képernyőre.

R	H	G	A	A	Z
Ü	Y	G	G	R	É
A	F	X	S	G	M
N	T	L	Á	R	E
E	Z	L	F	T	É
S	E	R	É	O	G

L	K	A	E	E	N
N	J	E	Ő	L	M
S	N	E	Ö	O	L
T	K	E	Z	K	Y
G	A	G	E	A	E
E	N	R	G	É	L

S	L	Ö	Ő	É	Z
Z	K	B	N	E	T
E	A	K	Z	L	D
S	R	N	L	É	E
I	Á	I	M	R	L
N	T	E	Ő	Z	N

Ha a titkosítandó szöveg „egy négyzetnél” hosszabb, akkor azt több négyzetre kell bontani. Ha nem tesz ki a szöveg utolsó része egy teljes négyzetet, akkor azt véletlenszerű karakterekkel töltik fel.

A Cardano-rács alkalmazásával találkozhatunk *Jules Verne: Sándor Mátyás* c. könyvében is. A könyvben szereplő titkosítandó szöveget a *nyilt.txt* UTF-8 kódolású állomány tartalmazza. A könyvben a titkosítást két lépésben végezték, az alábbiakban ezt kell végrehajtani:

5. Olvassuk be a `nyilt.txt` fájl tartalmát, majd fordítsuk meg a szöveget. A beolvasott, illetve a megfordított szöveget egyaránt írassuk ki a képernyőre.
6. A felcserélt karakterekből álló szöveget rejtjelezzük a megadott Cardano-rács alkalmazásával, és az eredményt 6×6-os rácsban – a minta szerint – írassuk ki a `sandormatyas.txt` fájlba.

Beküldendő egy `i504.zip` tömörített állományban a program forráskódja és egy rövid leírás, ami megadja, hogy a forrásállomány melyik fejlesztői környezetben fordítható.

Letölthető fájlok: `cardano.txt`, `titkos.txt`, `nyilt.txt`.

I/S. 42. Egy út mindkét oldalán kilométerenként található egy-egy kilométerkő. N csirke szeretne átkelni az út egyik (ugyanazon) oldaláról a másikra. Mindegyikről tudjuk, hogy melyik kilométerkőtől indul és melyik kilométerkőhöz érkezik. Minden kilométerkőtől legfeljebb egy csirke indul és minden kilométerkőhöz legfeljebb egy csirke érkezik. Ha két csirke útvonala keresztezi egymást, akkor találkozhatnak, összezavarodnak és esetleg nem érnek célba. Adjuk meg, hány csirke útja biztonságos, tehát hányat nem fenyeget a kereszteződésből adódó veszély.

Bemenet: az első sor tartalmazza a csirkék N számát. A következő N sor mindegyike két számot tartalmaz, mely azt jelenti, hogy az i-edik csirke az A_i kilométerkőtől indul és a B_i kilométerkőhöz érkezik.

Kimenet: az első sor tartalmazza azon csirkék számát, amelyek biztonságosan át tudnak kelni az úton.

Példa:

Bemenet (a `/` jel sortörést helyettesíti)	**Kimenet**
`4` `1 8 / 11 12 / 14 20 / 7 13`	`2`

Korlátok: $1 \leqslant N \leqslant 10^5$, $1 \leqslant A_i, B_i \leqslant 10^9$. Időkorlát: 0,3 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 10\,000$.

Beküldendő egy `is42.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

S. 141. Egy épület legfelső emelete N darab lépcsőfokra van a földszinttől. Balázs M napon át, minden nap felmegy a földszintről az épület legfelső szintjére. Az első nap maximum P darab lépcsőfokot tud lépni egy lépéssel. Mivel Balázs egy növekedésben levő tini, ezért a második nap már $P+1$ fokot tud megtenni egy lépéssel, a harmadik nap $P+2$ fokot, és így tovább. A legfelső szintről lefelé mindig lifttel közlekedik, csak felfelé lépcsőzik. Adjuk meg, hogy az M nap alatt legalább hány lépést tesz meg Balázs.

Bemenet: az első sor tartalmazza az N, M és P számokat ebben a sorrendben.

Kimenet: adjuk meg a minimálisan megtett lépések számát.

Példa:

Bemenet	**Kimenet**
`12 4 2`	`16`

Korlátok: $1 \leqslant N, M, P \leqslant 10^{12}$. Időkorlát: 0,4 mp.

Értékelés: a pontok 50%-a kapható, ha $N \leqslant 10^3$.

Beküldendő egy `s141.zip` tömörített állományban a megfelelően dokumentált és kommentezett forrásprogram, amely tartalmazza a megoldás lépéseit, valamint megadja, hogy a program melyik fejlesztői környezetben futtatható.

A feladatok megoldásai regisztráció után a következő címen tölthetők fel:
`https://www.komal.hu/munkafuzet`
Beküldési határidő: 2020. március 10.

Rátz Tanár Úr Életműdíjak átadása 2019 decemberében

2019. december 4-én 19. alkalommal adták át a híres pedagógus, több világhírű magyar tudós tudományos karrierjét is elindító Rátz László tanár úrról elnevezett életműdíjakat. Az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon Nyrt. által alapított elismerés célja, hogy elismerje a természettudományos oktatás területén kiemelkedő teljesítményt nyújtó pedagógusok munkáját, és egyben felhívja a figyelmet a természettudományos oktatás fontosságára.

Az elmúlt közel két évtizedben összesen 144 olyan, az 5–12. évfolyamos diákoknak matematikát, fizikát, biológiát vagy kémiát tanító tanár kapta meg az életműdíjat, akik maradandót alkottak tantárgyaik népszerűsítésében és a tehetséggondozás területén. A fejenként 1,5 millió forinttal járó elismerésre – amelyet minden évben valamennyi fenti szakterületről két-két pedagógus kap meg – kollégáik jelölhetik a tanárokat, a nyertesek személyéről pedig a három alapító vállalat által létrehozott Alapítvány a Magyar Természettudományos Oktatásért kuratóriuma dönt.

A Rátz Tanár Úr Életműdíjat az ország bármely iskolájában tanító vagy korábban ott tevékenykedő pedagógus megkaphatja, így idén is Szombathelytől Egerig jutalmazták a kiemelkedő teljesítményt. A díjazott pedagógusok valamennyien a reáltantárgyak oktatási színvonalának emeléséért dolgoznak, diákjaik sikeresen szerepelnek országos tudományos versenyeken, az oktatás mellett rendszeresen továbbképzik magukat, tájékozottak az adott tudomány területén elért eredményekről, gyakran tankönyvek és szakmai folyóiratok szerzői. A tehetséggondozás mellett törekednek a természettudományos tudást nemcsak a legjobbakkal, hanem valamennyi diákjukkal elsajátíttatni és egyben széles látókörrel rendelkező felnőtteket nevelni.

Az életműdíjat három, a természettudományos oktatás támogatásában elkötelezett vállalat, az Ericsson Magyarország, a Graphisoft és a Richter Gedeon Nyrt. hozta létre 2000-ben Rátz Lászlónak, a múlt század legendás tanáregyéniségének emléket állítva.

A 2019-ben Rátz Tanár Úr Életműdíjban részesült tanárok:

Kémiából **Mostbacher Éva** (Pécs, Ciszterci Rend Nagy Lajos Gimnáziuma és Kollégiuma) és **Martonné Ruzsa Valéria** (Szombathely, Paragvári Utcai Általános Iskola);

Biológiából **Dr. Kardon Ferenc** (Budapest-Fasori Evangélikus Gimnázium) és **Dr. Székely Andrásné** (Szabadbattyán, Batthyány Lajos Általános Iskola);

Matematikából **Bíró Bálint** (Egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium és Kollégium) és **Kovács Csongorné** (Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium);

Fizikából **Győri István** (Szeged, Ságvári Endre Gyakorló Gimnázium) és **Horváthné Fazekas Erika** (Szeged, SZTE Juhász Gyula Gyakorló Általános és Alapfokú Művészeti Iskolája).

Idézünk a matematika, illetve a fizika területén díjazott tanárokról készített rövidfilmekből.

Matematika

Bíró Bálint (Eger): *Az órának sohase szabad nagyon-nagyon szigorúnak lenni. Én nem szeretem a rossz hangulatú órákat, amikor az ember áll a katedrán, és a katedra tekintélyét próbálja meg latba vetni azért, hogy az, amit mond, hiteles legyen. Úgy gondoltam mindig, hogy matematikából meg kell mutatni azt, ami érdekes, ami szép, és ami összefüggésben áll a művészetekkel is. Úgy gondolom, hogy az egy nagyon fontos dolog, hogy jó tanulni. Tudom és látom, hogy érdekli őket a matematika. Vannak, akik fogékonyak rá, és azokkal lehet sikereket elérni. Nem okvetlenül csak versenyen elért sikerekre gondolok, hanem siker az is, ha egy gyerek azt mondja, hogy „Értem!”*

A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://vimeo.com/375379912`.

Kovács Csongorné (Budapest): *Azt hiszem, hogy a matematika tanításának egyik célja, hogy gondolkozni tanítsuk a gyerekeket, nem bizonyos szabályok végrehajtására, hanem problémamegoldásra. Ehhez viszont problémákat kell nyújtani. Úgy tanulja a matematikát, hogy lehetőleg minél több érzékszervével tanulja: tapasztalja meg, rakja ki, rajzolja le, színezze ki, járja körül – ha lehet a mozgás által. Mindig megjutalmaztam azt, aki kérdez. Tessék kiabálni, hogy „Mara néni, ne olyan gyorsan!”*

A tanárnőről szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://vimeo.com/375381523`.

Fizika

Győri István (Szeged): *Az ember 8 órán keresztül készít elő egy olyan kísérletet, ami majd 10 másodperc lesz az órán – ha sikerül. Aki járt iskolába, az ismeri azt a tanári mondatot, ami a nem sikerült kísérleteket szokta kísérni, hogy „tegnap a szertárban még jó volt”. Az embernek a memóriája szerencsére szelektív. Elmúlik 4 év, elmúlik 10 év, és akkor már nem emlékszik az ember a hétköznapi bosszúságokra, viszont megmaradnak azok az élmények, azok a jutalmak, amiket cserébe kapunk. Nem szabad, hogy kettéváljon a fizikatanár és a pedagógus, azaz szüntelenül nevelni kell, még akkor is, ha Newton törvényei vannak a centrumban azon az órán.*

A tanár úrról szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://vimeo.com/375382407`.

Horváthné Fazekas Erika (Szeged): *A gyerekeket motiválni élménnyel lehet. Fontos, hogy olyan feladatokat kapjanak, ami őket érdekli. Hogy olyan problémákat vessünk fel, amin tényleg elgondolkoznak. Az én tanítványaim nagyon lelkesek azért, hogy vannak olyan kísérletek, amikből odahaza készülhetnek, ezekből fotót vagy videót készítenek, és ezeket a felvételeket utána megmutatják. A jövő mindenképpen az, hogy hagyni kell a gyerekeket, hogy ezekkel az eszközökkel dolgozzanak, és ezzel nyerhetünk a természettudományoknak, a fizikának is.*

A tanárnőről szóló rövidfilm itt tekinthető meg:

`https://vimeo.com/375380506`.

Beszámoló a 2019. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2019. évi Eötvös-versenye október 11-én délután 3 órai kezdettel tizenkét magyarországi helyszínen* került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 56 versenyző adott be dolgozatot, 19 egyetemista és 37 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

❄

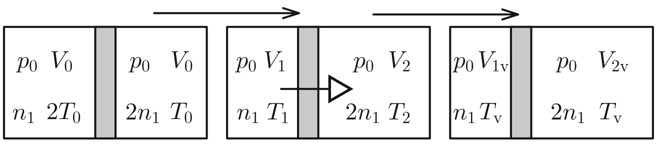
1. *Egy könnyen mozgó dugattyú egy hőszigetelt, vízszintes tengelyű hengert kezdetben két azonos, V_0 térfogatú részre oszt. Mindkét részben p_0 nyomású, egyatomos ideális gáz van. A bal oldali részben a kezdeti hőmérséklet $2T_0$, míg a jobb oldali részben T_0. A két részt elválasztó dugattyú mérsékelten hővezető, hőátadását az α paraméter jellemzi, azaz ΔT hőmérséklet-különbség esetén a dugattyún időegységenként átáramló hő $\alpha\Delta T$.*

a) Mekkora lesz a két részben a gázok térfogata, hőmérséklete és nyomása hosszú idő elteltével?

b) Adjuk meg az idő függvényében a két térrészben levő gáz $V_1(t)$ és $V_2(t)$ térfogatát!

(*Tasnádi Tamás*)

Megoldás. *a*) Amint a feladat szövege is mutatja, a kezdeti értékeket nulla indexszel, a bal oldali részt egyes, és a jobb oldali részt kettes indexszel jelöljük. A végső állapot mennyiségeit a „v" index mutatja. Az *1. ábra* a folyamatot és az állapotjelzők értékeit foglalja össze.



1. ábra

*Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`

Mivel mindkét részben egyatomos ideális gáz van, a szabadsági fok $f=3$. A kezdeti állapotra felírt gáztörvényből,

$$p_0V_0=n_1R2T_0,\qquad p_0V_0=n_2RT_0,$$

megkapjuk, hogy a jobb oldalon a mólok száma kétszer annyi, mint a bal oldalon: $n_2=2n_1$.

A dugattyú hőátadása következtében a bal oldali gáz lassan lehűl, és a jobb oldali melegszik, miközben a dugattyú balra tolódik. A folyamat lassúsága következtében a dugattyú két oldalán a nyomásnak meg kell egyeznie, azaz $p_1=p_2$. Továbbá a rendszerben az energia megmarad, tehát a belső energiák összege állandó:

$$\frac{f}{2}n_1R2T_0+\frac{f}{2}2n_1RT_0=\frac{f}{2}n_1RT_1+\frac{f}{2}2n_1RT_2,$$

amely egyszerűsítések után, és a gáztörvényt felhasználva:

$$p_0V_0+p_0V_0=p_1V_1+p_1V_2.$$

A jobb és bal oldali térfogat összege nem változik, és így a fenti egyenletből következik, hogy a nyomás végig mindkét oldalon állandó marad, azaz

$$p_1=p_2=p_0,$$

és a folyamat izobár.

Most rátérünk a végső állapot meghatározására. Már tudjuk, hogy a végső nyomás megegyezik a kezdetivel. A dugattyún történő hőátadás következtében a végső hőmérséklet a két oldalon ugyanakkora. Az energiamegmaradás

$$\frac{f}{2}n_1R2T_0+\frac{f}{2}2n_1RT_0=\frac{f}{2}n_1RT_\mathrm{v}+\frac{f}{2}2n_1RT_\mathrm{v}$$

egyenletéből

$$T_\mathrm{v}=\frac{4}{3}T_0.$$

Gay-Lussac első törvényéből

$$V_{1\mathrm{v}}=\frac{2}{3}V_0\qquad\text{és}\qquad V_{2\mathrm{v}}=\frac{4}{3}V_0.$$

b) Most térjünk rá a folyamat vizsgálatára. A bal oldali rész lehűl, a jobb oldali melegszik, azaz a bal oldal Δt idő alatt bekövetkező kicsiny ΔT_1 hőmérsékletváltozása negatív, míg a jobb oldalra $\Delta T_2>0$. A folyamat izobár, ezért a bal és jobb oldal egyenlete:

$$\frac{f+2}{2}n_1R\Delta T_1=\alpha(T_2-T_1)\Delta t,\qquad\text{illetve}\qquad\frac{f+2}{2}2n_1R\Delta T_2=\alpha(T_1-T_2)\Delta t.$$

Ezek az egyenletek az

$$\frac{f+2}{2}n_1R\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}t}=\alpha(T_2-T_1),\qquad\text{illetve}\qquad\frac{f+2}{2}2n_1R\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}t}=\alpha(T_1-T_2)$$

differenciálegyenleteknek felelnek meg. Ezekből kifejezve a $\mathrm{d}T_1/\mathrm{d}t$ és $\mathrm{d}T_2/\mathrm{d}t$ hányadosokat, valamint bevezetve a $\Delta T = T_1 - T_2$ hőmérséklet-különbséget

$$\frac{\mathrm{d}\Delta T}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\alpha}{(f+2)n_1R}\Delta T \qquad \text{és} \qquad \frac{\mathrm{d}(T_1+2T_2)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

A második egyenletben a differenciálandó mennyiség nem változik, és kezdeti értékét ismerjük, tehát

$$T_1 + 2T_2 = 4T_0.$$

Az első egyenletben található állandó a hőátadási folyamat lecsengési együtthatója:

$$\lambda = \frac{3\alpha}{(f+2)n_1R} = \frac{6\alpha T_0}{5p_0V_0}.$$

A fentihez hasonló differenciálegyenlet a tudományokban számos helyen előfordul. Ezek közül a legismertebb a radioaktív bomlás, amelynek a megoldása a λ állandóval lecsengő exponenciális függvény. Mivel ismerjük ennek a függvénynek a kezdeti értékét, ennélfogva

$$\Delta T = T_0\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

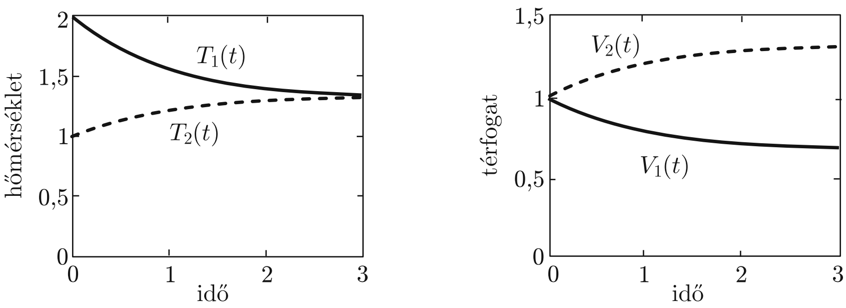
és így

$$T_1(t) = \frac{4}{3}T_0 + \frac{2}{3}T_0\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad T_2(t) = \frac{4}{3}T_0 - \frac{1}{3}T_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

A térfogatok változását most is Gay-Lussac első törvénye adja:

$$V_1(t) = \frac{2}{3}V_0 + \frac{1}{3}V_0\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad V_2(t) = \frac{4}{3}V_0 - \frac{1}{3}V_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Ezeket a függvényeket a *2. ábra* grafikonjain is bemutatjuk, ahol a hőmérsékletet T_0, a térfogatot V_0, az időt pedig $1/\lambda$ egységekben mértük.



2. ábra

2. *Egy a oldalélű kocka minden éle egyforma, R ellenállású huzalból készült. A kocka homogén, kezdetben B_0 indukciójú mágneses mezőbe merül, amit τ idő alatt egyenletesen nullára csökkentünk. Mekkora a folyamat közben keletkező Joule-hő, ha a mágneses indukcióvektor a kocka egy csúcsban találkozó éleivel rendre α, β és γ hegyesszöget zár be?* ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.)

(*Vigh Máté*)

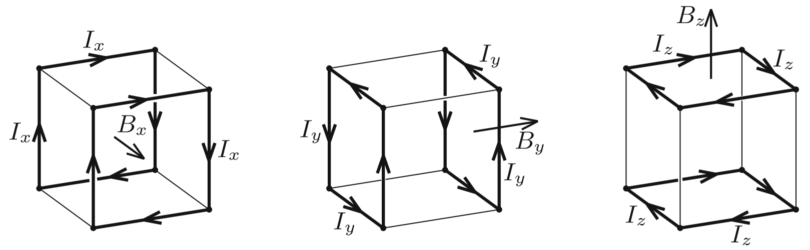
Megoldás. Képzeljük el egy pillanatra, hogy a mágneses térnek csak az x irányú, időben

$$B_x(t) = B_{x,0}(1 - t/\tau)$$

szerint változó komponense létezik, a másik két komponens pedig zérus! Ekkor a szimmetria miatt a *3. ábra* bal szélén látható árameloszlás jönne létre. A kocka 8 élében folyó, egyforma nagyságú I_x áramokat a Faraday-féle indukciótörvényből lehet meghatározni:

$$U_{\mathrm{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \qquad \longrightarrow \qquad 4RI_x = a^2\frac{B_{x,0}}{\tau},$$

ahol felhasználtuk, hogy a mágneses tér irányára merőleges lapokon átmenő, kezdeti $a^2B_{x,0}$ nagyságú fluxus τ idő alatt csökken nullára.



3. ábra

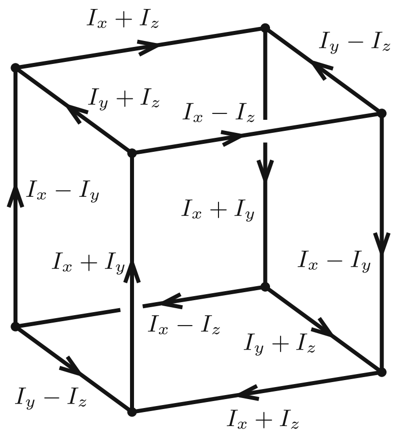
Hasonlóan kapjuk az élekben folyó áramerősségeket azokra az elképzelt esetekre, melyekben a mágneses mezőnek csak az y- vagy z-komponense van jelen (*3. ábra* középső és jobb szélső rajza):

$$I_x = \frac{a^2}{4R}\frac{B_{x,0}}{\tau}, \qquad I_y = \frac{a^2}{4R}\frac{B_{y,0}}{\tau}, \qquad I_z = \frac{a^2}{4R}\frac{B_{z,0}}{\tau}.$$

Ha a mágneses térnek mindhárom komponense jelen van, akkor a kialakuló feszültség- és árameloszlást a fenti három eset szuperpozíciójaként kapjuk, ezt mutatja a *4. ábra.*

A teljes Joule-hő teljesítménye az időben állandó erősségű áramok miatt konstans, nagysága pedig az egyes élekben disszipálódó RI^2 teljesítmények összege:

$$P = 2R(I_x + I_y)^2 + 2R(I_x - I_y)^2 + \\ + 2R(I_y + I_z)^2 + 2R(I_y - I_z)^2 + \\ + 2R(I_x + I_z)^2 + 2R(I_x - I_z)^2.$$



4. ábra

Ha a zárójeleket felbontjuk, az $(I_x+I_y)^2+(I_x-I_y)^2=2I_x^2+2I_y^2$ összefüggés miatt a teljesítmény az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$P=8R\big(I_x^2+I_y^2+I_z^2\big).$$

A keletkező Joule-hőt az előbb kiszámított teljesítmény és a τ idő szorzataként számolhatjuk. Az I_x, I_y, I_z áramerősségekre korábban levezetett eredmények felhasználásával kapjuk a következőt:

$$Q=P\tau=\frac{a^4}{2R}\,\frac{B_{x,0}^2+B_{y,0}^2+B_{z,0}^2}{\tau}=\frac{a^4}{2R}\,\frac{B_0^2}{\tau}.$$

Azt az érdekes eredményt kaptuk, hogy a Joule-hő *független* a mágneses tér irányától, csupán annak nagyságától függ. A feladatban megadott α, β és γ szögekre tehát nem is volt szükség!

3. *Egy nagyon hosszú kötelet vízszintes helyzetben, a súlyánál sokkal nagyobb F_0 erővel megfeszítünk. A kötél a pozitív x tengelyen helyezkedik el, egyik vége pedig az origóban van.*

a) Ha a kötél origóban lévő végét A amplitúdójú, f frekvenciájú harmonikus rezgőmozgással az x tengelyre merőleges, vízszintes y irányban mozgatjuk, a kötélben transzverzális hullámok jönnek létre, amelyek (a kötél hosszegységre eső tömegétől és a feszítettségétől függő) c sebességgel terjednek. (A hullámok amplitúdója kicsi, vagyis $A\ll c/f$.) Adjuk meg a kötél x koordinátájú pontjának t időpillanatbeli $y(x,t)$ kitérését!

b) Mekkora átlagos teljesítmény szükséges a kötél végének mozgatásához?

c) Most a kötél origóban lévő vége y irányban szabadon elmozdulhat, de mozgását a kötél végének $v(t)$ sebességével arányos, $-\gamma v(t)$ erő fékezi. A kötélen egy A amplitúdójú szinuszhullám érkezik az origó felé. Azt tapasztaljuk, hogy a hullám részben vagy esetleg teljesen visszaverődik, melynek következtében egy, az origótól távolodó, B amplitúdójú szinuszhullám is kialakul.

Mekkora a visszavert hullám amplitúdója? Adjuk meg a B/A arányt! Vizsgáljuk a $\gamma\to\infty$ és $\gamma\to 0$ (nagyon erős és nagyon gyenge csillapítás) eseteket! Van-e olyan γ csillapítási tényező, amelynél egyáltalán nem verődik vissza hullám a kötél végéről?

(*Gnädig Péter*)

Megoldás. *a*) A kötél végpontjának rezgőmozgását az

$$y(t)=A\sin(2\pi ft+\varphi_0)$$

függvénnyel írhatjuk le, ahol φ_0 a rezgés fázisa a 0 időpillanatban, amely az időmérés kezdetének megfelelő megválasztásával nulla lehet.

A rezgés c sebességgel terjed az x tengely mentén, x távolságra $\frac{x}{c}$ idő alatt ér el. Így az x koordinátájú pontban a kitérés akkora, mint az origóban $\frac{x}{c}$ idővel korábban volt. Ez alapján a keresett hullámfüggvény:

$$y(x,t)=A\sin\left[2\pi f\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]=A\sin\left(2\pi ft-\frac{2\pi f}{c}x\right).$$

b) A kötél alakját egy rögzített $t = t_1$ pillanatban az

$$y(x) = y(x, t = t_1) = A \sin\left(2\pi f t_1 - \frac{2\pi f}{c} x\right)$$

egyváltozós függvény adja meg, ahol $2\pi f t_1$ egy konstans.

Bármely x pontban a kötél x tengellyel bezárt szögének tangense éppen ennek a függvénynek a meredeksége, amit legegyszerűbben (az x változó szerinti) deriválással határozhatunk meg:

$$\operatorname{tg} \alpha(x, t = t_1) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -A\frac{2\pi f}{c} \cos\left(2\pi f t_1 - \frac{2\pi f}{c} x\right).$$

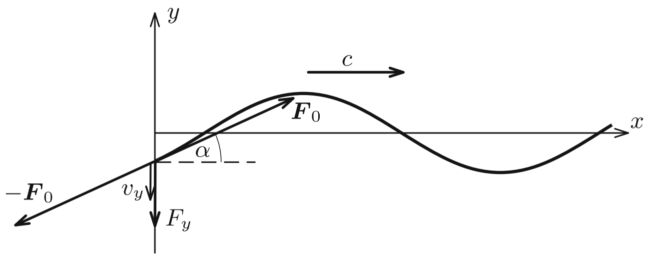
A kötél alakja azonban változik az idővel, így egy adott ponton a meredekség (és az α szög is) az idő függvénye lesz. Az origóban (az $x = 0$ helyen) a kötél iránytangense eszerint:

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \operatorname{tg} \alpha(x = 0, t) = -A\frac{2\pi f}{c} \cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi f}{c} 0\right) = -A\frac{2\pi f}{c} \cos(2\pi f t).$$

A kötél mozgatásához szükséges (időben változó) pillanatnyi teljesítményt a

$$P(t) = F_y(t) v_y(t)$$

szorzat határozza meg, ahol $F_y(t)$ az általunk a kötél végére kifejtett y-irányú erő, $v_y(t)$ pedig a kötél origóban lévő végének (y-irányú) sebessége (*5. ábra*).

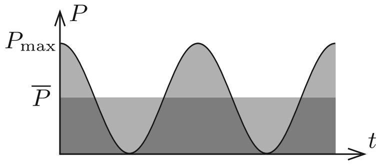


5. ábra

Az y-irányú erő (felhasználva, hogy $\alpha \ll 1$):

$$F_y = -F_0 \sin \alpha \approx -F_0 \operatorname{tg} \alpha = F_0 A\frac{2\pi f}{c} \cos(2\pi f t).$$

A kötél végének sebessége a rezgőmozgását leíró $y(t)=y(x=0,t)$ egyváltozós függvény (t szerinti, jól ismert) deriváltja:



6. ábra

$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2\pi fA\cos(2\pi ft).$$

A pillanatnyi teljesítmény ezek alapján:

$$P(t)=F_y(t)v_y(t)=\frac{4\pi^2f^2A^2F_0}{c}\cos^2(2\pi ft).$$

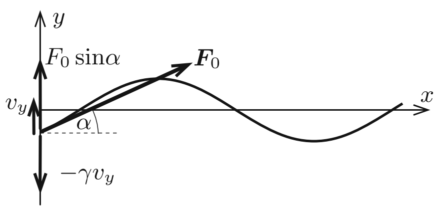
A keresett átlagos teljesítmény – a $\cos^2(2\pi ft)$ függvény *6. ábráról* leolvasható, jól ismert átlagértéke alapján – a maximális teljesítmény fele:

$$\overline{P}=\frac{P_{\max}}{2}=\frac{2\pi^2f^2A^2F_0}{c}.$$

c) Ebben a részben az origó felé érkezik egy hullám. Ennek hullámfüggvénye az ellenkező irányú terjedés miatt:

$$y_{\leftarrow}(x,t)=A\sin\left(2\pi ft+\frac{2\pi f}{c}x\right).$$

A visszaverődő hullám ismét a pozitív irányban halad:



7. ábra

$$y_{\rightarrow}(x,t)=B\sin\left(2\pi ft-\frac{2\pi f}{c}x+\varphi\right),$$

itt fel kell vennünk egy egyelőre ismeretlen φ fáziskülönbséget is. A kötélen kialakuló hullám ennek a két hullámnak a szuperpozíciója:

$$y(x,t)=y_{\leftarrow}(x,t)+y_{\rightarrow}(x,t).$$

A kötél vége y irányban szabadon mozoghat, így a rá ható y-irányú erők eredőjének minden pillanatban nullának kell lennie:

$$F_0\sin\alpha-\gamma v_y\approx F_0\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\gamma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.$$

A hullámfüggvény és a deriváltak:

$$y=y_{\leftarrow}+y_{\rightarrow}=A\sin\left(2\pi ft+\frac{2\pi f}{c}x\right)+B\sin\left(2\pi ft-\frac{2\pi f}{c}x+\varphi\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2\pi f}{c}A\cos\left(2\pi ft+\frac{2\pi f}{c}x\right)-\frac{2\pi f}{c}B\cos\left(2\pi ft-\frac{2\pi f}{c}x+\varphi\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=2\pi fA\cos\left(2\pi ft+\frac{2\pi f}{c}x\right)+2\pi fB\cos\left(2\pi ft-\frac{2\pi f}{c}x+\varphi\right).$$

Ezeket behelyettesítve az erőegyensúly képletébe, és rendezve:

$$F_0 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=0} = \gamma \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\bigg|_{x=0},$$

$$F_0 \frac{2\pi f}{c} A\cos(2\pi ft) - F_0 \frac{2\pi f}{c} B\cos(2\pi ft+\varphi) =$$

$$= \gamma 2\pi f A\cos(2\pi ft) + \gamma 2\pi f B\cos(2\pi ft+\varphi),$$

$$F_0 A\cos(2\pi ft) - F_0 B\cos(2\pi ft)\cos\varphi + F_0 B\sin(2\pi ft)\sin\varphi =$$

$$\gamma c A\cos(2\pi ft) + \gamma c B\cos(2\pi ft)\cos\varphi - \gamma c B\sin(2\pi ft)\sin\varphi.$$

Ezeknek az egyenleteknek minden időpontban teljesülnie kell, így a $\cos(2\pi ft)$-s és a $\sin(2\pi ft)$-s tagokra külön-külön is:

$$F_0 A - F_0 B\cos\varphi = \gamma c A + \gamma c B\cos\varphi,$$

$$F_0 B\sin\varphi = -\gamma c B\sin\varphi.$$

A második egyenlet alapján $\sin\varphi = 0$, $\varphi = 0$ (vagy $\varphi = \pi$) és így $\cos\varphi = 1$ (vagy $\cos\varphi = -1$). Ezt felhasználva az első egyenlet alapján:

$$B = \frac{F_0 - \gamma c}{F_0 + \gamma c} A.$$

Ha $\gamma \to \infty$ (rögzítjük a kötél végét), akkor $B = -A$, tehát a hullám azonos amplitúdóval, de ellentétes fázisban (π fázisugrással) verődik vissza.

Ha $\gamma \to 0$ (a kötél vége teljesen szabadon mozog), akkor $B = A$, azaz a hullám szintén azonos amplitúdóval, de most azonos fázisban verődik vissza.

$B = 0$-t akkor kapunk, ha $\gamma = F_0/c$, ilyenkor tehát egyáltalán nincs visszaverődés.

Megjegyzés. A *b*) és *c*) kérdésekre válaszolhatunk energetikai megfontolásokkal is. Ehhez a hullám – mozgási és rugalmas helyzeti energiából származó – energiasűrűségét kell meghatározni.

❄

Az ünnepélyes eredményhirdetésre és díjkiosztásra 2019. november 22-én délután került sor az ELTE TTK Konferenciatermében. Jelen volt a 70 évvel ezelőtti, háború utáni első Eötvös-verseny győztese, *Holics László,* aki pár szóban visszaemlékezett erre a versenyre. Meghívást kaptak az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny nyertesei is. Az 50 évvel ezelőtti díjazottak közül *Láz József* volt jelen, a 25 évvel ezelőtti díjazottak közül pedig *Horváth Péter, Kovács Krisztián, Tóth Gábor Zsolt* és *Varga Dezső* jött el – ők pár mondatban beszéltek a pályafutásukról.

Ezután következett a 2019. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása. Az 1. feladat megoldását Tichy Géza, a 2. feladatét Vigh Máté, a 3. feladatét Vankó Péter ismertette.

Az esemény végén került sor az eredményhirdetésre. A díjakat *Sólyom Jenő,* az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke adta át.

Mindhárom feladat helyes megoldásáért I. díjban részesült **Elek Péter,** a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Debreceni Református Kollégium Dóczy Gimnáziumának érettségizett tanulója, *Tófalusi Péter* tanítványa.

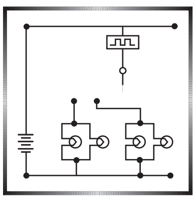
Két feladat hibátlan megoldásáért, illetve mindhárom feladat kisebb hibákkal való megoldásáért II. díjban részesült **Bokor Endre**, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 11. osztályos tanulója, *Schramek Anikó* tanítványa, **Fajszi Bulcsú,** a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Gábor* tanítványa, valamint **Fitos Bence,** a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Budapesti Németh László Gimnázium érettségizett tanulója, *Szászvári Irén* és *Dégen Csaba* tanítványa.

Két feladat lényegében helyes megoldásáért III. díjban részesült **Csépányi István,** a BME fizika BSc. szakos hallgatója, az Egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium érettségizett tanulója, *Szabó Miklós* tanítványa, **Máth Benedek Huba,** a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, Horváth Gábor és *Nagy Piroska Mária* tanítványa, **Olosz Adél,** a BME építőmérnöki BSc. szakos hallgatója, a PTE Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, *Koncz Károly* tanítványa, valamint **Svastits Domonkos,** a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a budapesti Piarista Gimnázium érettségizett tanulója, *Chikán Éva* tanítványa.

Egy feladat hibátlan megoldásáért dicséretben részesült **Kondákor Márk,** a BME fizika BSc. szakos hallgatója, a Budapesti Fazekas Mihály Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium érettségizett tanulója, Horváth Gábor és Nagy Piroska Mária tanítványa, **Magyar Róbert Attila,** a BME fizika BSc. szakos hallgatója, az Egri Dobó István Gimnázium érettségizett tanulója, *Hóbor Sándor* tanítványa, valamint **Pácsonyi Péter,** a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Pálovics Róbert* tanítványa.

Az első díjjal a verseny plakettjén kívül az *NKFI Hivatal* által nyújtott támogatásból 70 ezer, a második díjjal 50 ezer, a harmadik díjjal 30 ezer, a dicsérettel 20 ezer forint pénzjutalom járt, a díjazottak tanárai és az országos verseny szervezői pedig a *Typotex Kiadó* könyveit kapták. A verseny megszervezését az Eötvös Loránd Fizikai Társulat ebben az évben szintén az NKFI Hivatal által az *Eötvös 100 emlékév* alkalmából nyújtott támogatásból fedezte.

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté



Fizika gyakorlatok megoldása

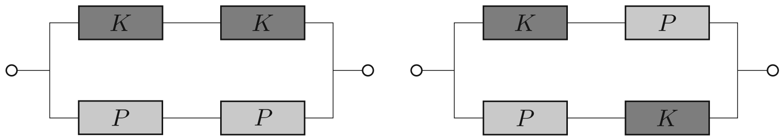
G. 683. *Van két egyforma (piros) ellenállásunk és másik két egyforma (kék) ellenállásunk. Melyik kapcsolásban nagyobb az eredő ellenállás, ha*

a) a két pirosat és a két kéket is sorba, majd ezeket párhuzamosan kapcsoljuk;

b) egy-egy piros és kék ellenállást sorba, ezeket pedig párhuzamosan kapcsoljuk?

(*4 pont*)

Megoldás. Legyen K a kék, P a piros ellenállás nagysága!



a) *b*)

Az *a*) esetben a két kék ellenállást sorba kapcsoltuk, így az eredőjük $2K$, a két sorba kapcsolt piros ellenállás eredője pedig $2P$. A két ág egymással párhuzamos kapcsolású, az eredőjük tehát

$$X = \frac{1}{\frac{1}{2K} + \frac{1}{2P}} = \frac{2KP}{K+P}.$$

A *b*) esetben mindkét ágban egy-egy kék és piros ellenállás van sorba kapcsolva, így az eredőjük egyenként $K+P$. Ezen két – párhuzamosan kapcsolt – ág eredője:

$$Y = \frac{1}{\frac{1}{K+P} + \frac{1}{K+P}} = \frac{K+P}{2}.$$

Hozzuk közös nevezőre ezt a két kifejezést:

$$X = \frac{4KP}{2(K+P)}, \qquad Y = \frac{(K+P)^2}{2(K+P)}.$$

Az a tört nagyobb, amelyiknek a számlálója nagyobb, hiszen a közös nevező pozitív. Vonjuk ki Y számlálójából X-ét:

$$K^2 + 2KP + P^2 - 4KP = K^2 - 2KP + P^2 = (K-P)^2 \geqslant 0.$$

$K = P$ esetén nyilván $X = Y$, de minden más esetben $Y > X$. Tehát a *b*) kapcsolásban lesz nagyobb az eredő ellenállás.

Egyházi Hanna (Budapest, ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., 10. évf.)

Megjegyzés. Az *a*) eset eredő ellenállása K és P *harmonikus közepe*, a *b*) kapcsolásnál pedig a *számtani közepe*. Ismert, hogy a harmonikus közép nem lehet nagyobb, mint a számtani közép, ebből már következik, hogy a *b*) kapcsolásban nagyobb (vagy esetleg a másikéval egyenlő) az eredő ellenállás.

74 dolgozat érkezett. Helyes 37 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 12, hiányos (1–2 pont) 16, hibás 5, nem versenyszerű 4 dolgozat.

G. 684. *Egy repülőgép – légi térképészeti célból – állandó sebességgel és viszonylag kis magasságban hosszú ideig repül az Egyenlítő fölött. A földi irányítók azt észlelik, hogy a gép* 48 *óránként halad át a kiindulási pontja fölött. Mennyi idő telik el a napnyugta és a napkelte között a repülőgépen, ha a gép* *a*) *kelet felé repül,*

b) *nyugat felé repül?*

(A repülőgépet időnként a levegőben töltik fel üzemanyaggal.)

(*4 pont*) *Zétényi Gergő* (Óbudai Harrer Pál Ált. Isk.) kérdése alapján

Megoldás. Ha a repülő a Földön állna, akkor 48 óra alatt 2 napfelkeltét és 2 naplementét látna a rajta utazó utas, hiszen ennyi idő alatt a Föld kettőt fordul.

a) A repülőgép 48 óra alatt egyszer kerüli meg a Földet. Ha a gép kelet felé, vagyis a Föld forgási irányával megegyező irányba repül, akkor az utasok (a $2+1=3$ fordulatnak megfelelően) 3 napfelkeltét és 3 naplementét látnak 48 óra alatt. Így a napnyugta és a napkelte között a repülőgépen $\frac{48}{6}=8$ óra telik el.

b) Ha a repülőgép nyugat felé, vagyis a Föld forgási irányával ellentétes irányba halad, akkor 48 óra alatt az utasok (a $2-1=1$ fordulatnak megfelelően) csak 1 napkeltét és 1 napnyugtát látnak. Ennek megfelelően a napnyugta és a napkelte között a repülőgépen $\frac{48}{2}=24$ óra telik el.

Sebestyén József Tas (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 8. évf.)

54 dolgozat érkezett. Helyes 26 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 6, hiányos (1–2 pont) 18, hibás 4 dolgozat.

Fizika feladatok megoldása

P. 5122. *Egy autó fékútja száraz, vízszintes aszfalton* 50 km/h *sebességnél legalább* 13 méter, *azaz ennyi utat tesz meg az autó a fékezés megkezdésétől a megállás pillanatáig. (A fékút definíciójában nem szerepel sem az ember, sem az autó reakcióideje.)*

Mekkora ugyanennek az autónak a minimális fékútja 20 km/h *sebességnél egy szokatlanul meredek,* 30°*-os hajlásszögű (kb.* 58%*-os!) lejtőn?** *Vizsgáljuk a felfelé és a lefelé haladás esetét is!*

(*4 pont*) Közli: *Széchenyi Gábor,* Budapest

Megoldás. A teljes rendszerre felírhatjuk a munkatételt. Ha a lejtő dőlésszöge α, a fékút hossza s, az autó és terhelésének együttes tömege m, a nehézségi

*A világ legmeredekebb utcája az Új-Zélandon, Dunedin városában található, 350 méter hosszú Baldwin Street, ami 38°-os, tehát 78%-os meredekségű.

gyorsulás g és a súrlódási együttható μ, akkor

$$\mu mgs\cos\alpha=\frac{1}{2}mv^2\pm mgs\sin\alpha.$$

(A pozitív előjel a lefelé haladó, a negatív pedig a felfelé haladó autónál érvényes.)

Az első esetben $\alpha_1=0$, tehát

$$\mu mgs_1=\frac{1}{2}mv_1^2\quad\Rightarrow\quad\mu=0{,}76.$$

A második esetben $\alpha_2=30^\circ$, így fennáll:

$$\mu mgs_2\,\cos 30^\circ=\frac{1}{2}mv_2^2\pm mgs_2\sin 30^\circ.$$

Ebből adódóan a fékút

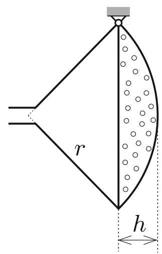
a) a lejtős úton lefelé haladó autónál $s_2^{(\mathrm{le})}\approx 10$ m;

b) a lejtőn felfelé pedig $s_2^{(\mathrm{fel})}\approx 1{,}4$ m.

Varga Vázsony (Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.)

56 dolgozat érkezett. Helyes 24 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 28, hibás 1 dolgozat.

P. 5156. *Vékony lemezből készült öntözőkanna gömbcikk alakú rózsáját peremkörének egyik pontjánál az* ábrán *látható módon csuklósan rögzítettük. Mekkora a* h/r *arány, ha egyensúlyi állapotban a test tengelye vízszintes? (A vékony lemez homogén, állandó vastagságú. A rózsa vízbevezető csövecskéjének méretét és a kifolyónyílások összes területét tekintsük elhanyagolhatóan kicsinek.)*

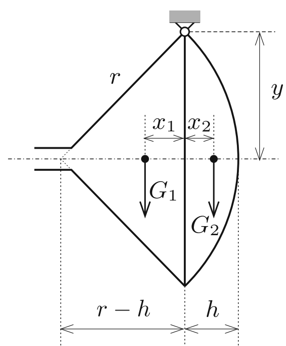


(*5 pont*) Közli: *Németh László,* Fonyód

Megoldás. A rózsa két részre osztható fel; egy kúppalástra és egy gömbsüvegre. Egyensúly esetén a két rész súlyából adódó forgatónyomatékok kiegyenlítik egymást:

$$G_1x_1=G_2x_2,$$

ahol G_1 és G_2 a részeknek (az $A_{1,2}$-vel jelölt felszínükkel arányos) súlya, x_1 és x_2 pedig az egyes részek tömegközéppontjának az elválasztó síktól mért távolsága (lásd az *ábrát*). (Mivel a rózsa forgásszimmetrikus, a tömegközéppontok nyilván a szimmetriatengelyen helyezkednek el.) Az egyensúly feltétele tehát így is felírható:



(1) $$A_1x_1=A_2x_2.$$

A kúppalást felszíne (ha az alapkörének sugara y):

$$A_1 = \pi r y, \tag{2}$$

a tömegközéppontja pedig (lásd pl. a Függvénytáblázat 198. oldalát):

$$x_1 = \frac{r-h}{3}. \tag{3}$$

Egy r sugarú gömbfelületből kivágott, h vastagságú gömbsüveg felszíne (lásd pl. a Függvénytáblázat 66. oldalát)

$$A_2 = 2\pi r h, \tag{4}$$

a tömegközéppontjának távolsága a körlap középpontjától pedig

$$x_2 = \frac{h}{2}. \tag{5}$$

Ez utóbbi úgy látható be, hogy gondolatban szétvágjuk a h magas gömbsüveget nagyon sok, egyforma vastag gömbövre. Ezeknek a gömböveknek a felszíne, és emiatt a tömegük is ugyanakkora, tehát az egész gömbsüveg tömegközéppontja a „középső gömböv" középpontjában, a h felénél található.

Írjuk vissza (2)–(5) alapján számított értékeket (1)-be:

$$\pi r y \frac{r-h}{3} = 2\pi r h \frac{h}{2},$$

vagyis

$$y\,\frac{r-h}{3} = h^2. \tag{6}$$

Határozzuk meg y-t az ábrán látható derékszögű háromszögből:

$$y^2 = r^2 - (r-h)^2, \qquad \text{vagyis} \qquad y = \sqrt{h(2r-h)}.$$

Ezt (6)-ba helyettesítve a

$$\sqrt{h(2r-h)}\,\frac{r-h}{3} = h^2$$

egyenletet kapjuk. Ebből négyzetre emelés és algebrai átalakítások után következik, hogy

$$10\frac{h^3}{r^3} - 4\frac{h^2}{r^2} + 5\frac{h}{r} - 2 = 0.$$

Ez az $x \equiv h/r$ arányra nézve harmadfokú egyenlet:

$$10x^3 - 4x^2 + 5x - 2 \equiv (5x-2)(2x^2+1) = 0,$$

aminek egyik gyöke $x = 2/5$, a másik két gyöke pedig nem valós.

Az egyensúlyban lévő test tengelye tehát $h/r = 2/5$ arány esetén lesz vízszintes.

Fülöp Sámuel Sihombing (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. évf.)

Megjegyzések. 1. Ha a fenti gondolatmenet helyett már a megoldás elején azt tételezzük fel, hogy a rózsa két részének tömege megegyezik, vagyis hogy $G_1 = G_2$, akkor az egyensúly feltétele $x_1 = x_2$ lesz. Ez a h/r arányra egy elsőfokú egyenletet jelent:

$$\frac{r-h}{3} = \frac{h}{2},$$

aminek megoldása: $h/r = 2/5$. Visszahelyettesítéssel megkapjuk, hogy ilyen arányszám esetén $A_1 = A_2$, vagyis a kezdeti feltevésünk helyes volt. Ez azonban nem bizonyítja, hogy más arányszám esetén nem lehet egyensúlyban a test a vízszintes tengelyállás mellett. A két félrész tömege (és súlyponttávolsága) általában különbözik egymástól, és csak $h/r = 2/5$ aránynál egyeznek meg.

2. Több versenyző a forgásszimmetriára hivatkozva azt állította, hogy az egyensúly feltétele ugyanaz, mint ami a kétdimenziós esetben lenne, amikor az alakzat egy háromszögből és egy körcikkből állna. Ez azonban *hibás* állítás!

3. Érdekes, hogy a háromdimenziós esetben (vagyis egy tömör kúp és egy gömbszelet összeillesztésénél) is $h/r = 2/5$ aránynál lesz a tengely egyensúlyi helyzete vízszintes.

24 dolgozat érkezett. Helyes 7 megoldás. Kicsit hiányos (3–4 pont) 3, hiányos (1–2 pont) 7, hibás 7 dolgozat.

P. 5157. *Céllövéskor a gyorsabb vagy a lassabb lövedék térül el jobban a Föld forgása következtében fellépő tehetetlenségi (Coriolis-) erő hatására?*

(*4 pont*) Közli: *Vass Miklós,* Budapest

I. megoldás. Ismert, hogy az inerciarendszerekhez képest állandó ω szögsebességgel forgó (például a Földhöz rögzített) vonatkoztatási rendszerekben csak akkor érvényes a dinamika alaptörvénye, ha a „valódi erők” mellett ún. tehetetlenségi erőket is beleírunk a mozgásegyenletbe. Ilyen tehetetlenségi erő az $mr\omega^2$ nagyságú centrifugális erő és a $2mv\omega\sin\alpha$ nagyságú *Coriolis-erő.* (r a vizsgált test és a forgástengely távolsága, v a test sebessége a gyorsuló koordináta-rendszerhez képest, α pedig a sebességvektor és a forgástengely szöge. Mivel esetünkben $v \ll r\omega$, a centrifugális erőt elhanyagolhatjuk a Coriolis-erő mellett.)

Lőjünk ki egy lövedéket az északi félteke α szélességi fokánál vízszintesen, pontosan észak felé. A lövedék sebessége legyen v, a céltábla távolsága pedig pedig L. A lövedék mozgásának ideje (ha a fékeződését nem vesszük figyelembe): $t = L/v$. A Coriolis-erő ebben az esetben $F = 2mv\omega\sin\alpha$ nagyságú, iránya vízszintes és kelet felé mutat. Ezen erő hatására a lövedék kelet felé is gyorsul

$$a = \frac{F}{m} = 2v\omega\sin\alpha$$

(állandó) gyorsulással, így az északi iránytól való eltérülésének nagysága a céltáblánál:

$$\Delta y = \frac{a}{2}t^2 = \frac{L^2\omega\sin\alpha}{v}.$$

Látható, hogy nagyobb sebességű lövedék kevésbé terül el, mint a lassabb.

Somlán Gellért (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 10. évf.) dolgozata alapján

II. megoldás. Az eltérülés nagyságát kiszámíthatjuk a forgásmentes inerciarendszrben is. Itt csak a függőleges irányú nehézségi erő hat a lövedékre, így annak vízszintes irányú mozgása egyenletes. A Föld (és vele együtt a fegyver) kelet felé fordul el, a kerületi sebessége a kilövés helyénél $v_1 = R\omega\cos\alpha$ (R a Föld sugara). Ezzel a sebességgel haladva a lövedék a becsapódásig eltelő $t = L/v$ idő alatt

$$y_1 = v_1 t = \frac{LR\omega}{v}\cos\alpha$$

utat tesz meg.

Ugyanennyi idő alatt a céltábla is elmozdul kelet felé, de mivel a kilövés helyénél L távolsággal északabbra, az $\alpha + (L/R)$ szögnek megfelelő szélességi körön helyezkedik el, a céltábla elmozdulása y_1-nél egy kicsit kevesebb, mindössze

$$y_2 = \frac{LR\omega}{v}\cos\left(\alpha + \frac{L}{R}\right).$$

Vegyük figyelembe, hogy $L \ll R$, emiatt jogos a

$$\cos\left(\alpha + \frac{L}{R}\right) = \cos\alpha\,\cos\frac{L}{R} - \sin\alpha\,\sin\frac{L}{R} \approx \cos\alpha - \frac{L}{R}\sin\alpha$$

közelítés.

Mivel $y_2 < y_1$, az eltolódás mértéke kelet felé

$$\Delta y = y_1 - y_2 = \frac{LR\omega}{v}\frac{L}{R}\sin\alpha = \frac{L^2 v\omega\sin\alpha}{v} = \frac{\text{állandó}}{v}.$$

Látható, hogy azonos körülmények között a nagyobb sebességű lövedék kevésbé térül el a Föld forgása miatt, mint a kisebb sebességű.

Mihalik Bálint (Kecskeméti Bányai Júlia Gimn., 10. évf.) és
Sepsi Csombor Márton (Zalaegerszegi Zrínyi M. Gimn., 11. évf.)
dolgozata felhasználásával

55 dolgozat érkezett. Helyes 25 megoldás. Kicsit hiányos (3 pont) 1, hiányos (1–2 pont) 23, hibás 6 dolgozat.

P. 5158. *Táblázati adatok felhasználásával határozzuk meg, hogy egy kuktafazékban lévő,* 120 °C*-os telített vízgőz a sűrűség szempontjából mekkora hibával tekinthető ideális gáznak!*

(*3 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

Megoldás. Táblázati adatok szerint* a telített gőz nyomása a megadott hőmérsékleten: $p = 0{,}20$ MPa. Az ideális gáz állapotegyenlete segítségével számolt sűrűség:

$$\varrho_{\text{számított}} = \frac{M}{R}\,\frac{p}{T} = \frac{(18\cdot 10^{-3}\ \text{kg})\cdot(2{,}0\cdot 10^{5}\ \text{Pa})}{\left(8{,}31\ \frac{\text{J}}{\text{kg\,mol}}\right)\cdot(393\ \text{K})} \approx 1{,}10\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

*forrás: `www.muszeroldal.hu/assistance/telitettvizgoz.html`

Ezt összehasonlítva a $\varrho_{\text{mért}} = 1{,}13\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$-es adattal, megállapíthatjuk, hogy az eltérés csupán 3 százalék.

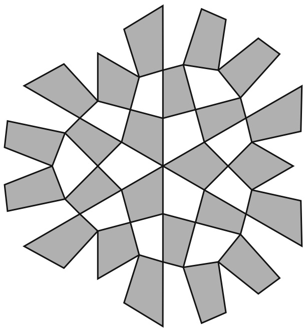
Rácz Tamás Gáspár (Budapest, Baár-Madas Ref. Gimn., 10. évf.)

33 dolgozat érkezett. Helyes Pálfi Fanni, Rácz Tamás Gáspár és Toronyi András megoldása. Kicsit hiányos (2 pont) 9, hiányos (1 pont) 17, hibás 4 dolgozat.

Fizikából kitűzött feladatok

M. 393. Egy sodrott spárgát vagy fonalat függesszünk fel, majd terheljük meg különböző súlyokkal! Kezünkkel folyamatosan fékezve engedjük kitekeredni a szálat egészen addig, amíg egyensúlyi állapotba nem jut. Hogyan függ a szál aljának elfordulása a terheléstől?

(*6 pont*) Közli: *Tichy Géza,* Budapest



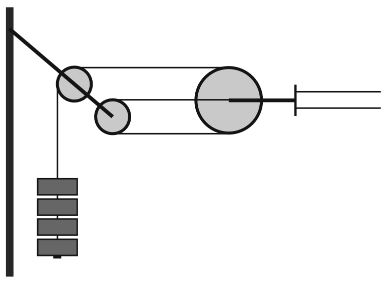
G. 697. Belenézünk egy kaleidoszkópba; a látvány egy részét az *ábra* mutatja. Hol helyezkedhetnek el a kaleidoszkóp tükrei?

(*3 pont*)

G. 698. Három tömör kockánk van, amelyek oldalélei 1 cm, 3 cm és 9 cm. Hányszor nagyobb nyomást fejt ki a kockákból épített torony a vízszintes asztallapra, ha a legnagyobb kocka helyett a legkisebbet helyezzük alulra?

(*3 pont*)

G. 699. Pályaudvarokon, vasútállomásokon figyelhetjük meg, hogy elektromos vezetékeket például az *ábrán* látható módon csigákon átvetett drótkötélre akasztott, nehéz súlyokkal feszítenek ki.

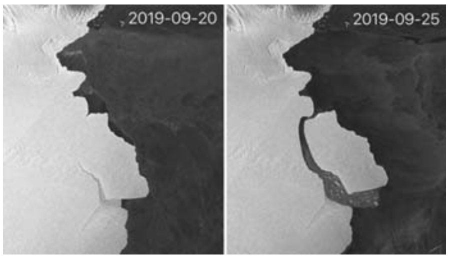


a) Miért előnyösebb ez a módszer, mintha fix rögzítése lenne a felsővezetéknek?

b) Mekkora erő feszíti a dupla vezeték egyes szálait, ha a feszítősúlyok együttes tömege 300 kg?

c) Egy verőfényes, felhőtlen napon hogyan változik a súlyok helyzete reggeltől estig?

(*4 pont*)



G. 700. A D28 jelű, 315 milliárd tonnás jéghegy (az úgynevezett Zápfoghegy) 2019. szeptember 25-én vált le az Antarktiszról. Ha kis jégkockákká törnénk, és 20 °C-os vízbe szórnánk, hány Balatonnyi vizet tudna 0 °C hőmérsékletűre hűteni? A Balaton vizének térfogata 1,9 km^3. A jéghegyet tekintsük egységesen -10 °C hőmérsékletűnek.

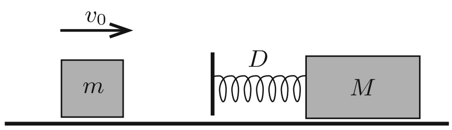
(*4 pont*)

P. 5197. Micimackó kapott ajándékba egy 20 cm sugarú, gömb alakú lufit. A léggömb úgy volt megtöltve héliummal, hogy ha elengedte a fonalát, éppen lebegett a levegőben, nem emelkedett fel, de nem is süllyedt le.

Micimackó örömében elkezdett körbe szaladni a lufival úgy, hogy az egyik kezével fogta a lufi fonalának végét. Így a lufi egyenletes körmozgást végzett. Malacka megfigyelte, hogy bármekkora is Micimackó állandó szögsebessége, a lufi fonala mindig 45°-os szöget zár be a kör érintőjével.

Mekkora a lufi körpályájának sugara? (A fonál súlyától és a lufi alakjának esetleges megváltozásától eltekinthetünk.)

(*5 pont*) Közli: *Baranyai Klára,* Veresegyház

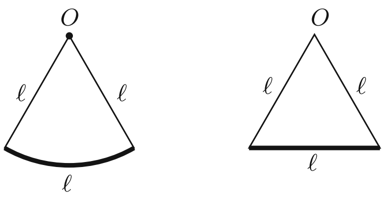


P. 5198. Hasáb alakú, M tömegű test nyugszik egy vízszintes, sima lapon. Egy D rugóállandójú, a hasáb hossztengelyével párhuzamos, könnyű rugó egyik végét a hasábhoz rögzítjük, a másik végére egy elhanyagolható tömegű ütközőtányért erősítünk. Egy másik, m tömegű test v_0 sebességgel nekicsúszik a tányérnak úgy, hogy az elegendő hosszúságú rugót részben összenyomja.

a) Mekkora a rendszer tömegközéppontjának sebessége?

b) A m tömegű test és a tányér érintkezésétől számítva mennyi idő múlva lesz a rugó a legrövidebb?

(*5 pont*) Közli: *Wiedemann László,* Budapest



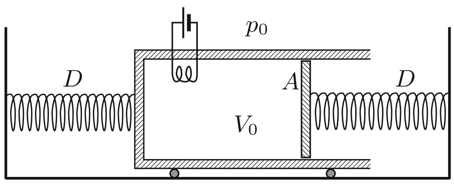
P. 5199. Az *ábrán* látható ℓ hosszú, körív alakú, vékony (de kellően merev) fémhuzal mindkét végpontját ℓ hosszúságú, igen könnyű fonállal a körív O középpontjához erősítjük. Az így elkészített inga az *ábra* függőleges síkjában T_1 periódusidejű, kis kitérésű lengéseket végezhet az O pont körül. Ha a fémhuzalt kiegyenesítjük, az így átalakított test az ábra síkjában T_2 periódusidejű, kis kitérésű lengéseket végezhet. Mekkora a T_2/T_1 arány?

(*5 pont*) Közli: *Simon Péter,* Pécs

P. 5200. Egy völgy felett átívelő függőhídban a transzverzális rezgések mintegy 400 m/s sebességgel terjednek. Egy viharban a hidat érő erős szél másodpercenként ismétlődő erőlökéseket hozott létre. Mekkora lehetett a függőhíd pilléreinek távolsága, ha a híd erős lengésekbe kezdett?

(*3 pont*) Közli: *Radnai Gyula,* Budapest

P. 5201. Az *ábrán* látható elrendezésben a rugók direkciós ereje $D = 1000$ N/m, a külső légnyomás $p_0 = 10^5$ Pa, és az $A = 10$ dm^2 keresztmetszetű dugattyú által elzárt gáz egyatomos. Kezdetben a rugók nyújtatlanok, ekkor a gáz térfogata $V_0 = 50$ liter. Mennyit mozdul el a dugattyú, ha a gázzal $Q = 2$ kJ hőt közlünk? (A tartály fala és a dugattyú hőszigetelő, a súrlódás és a fűtőszál hőkapacitása elhanyagolható.)

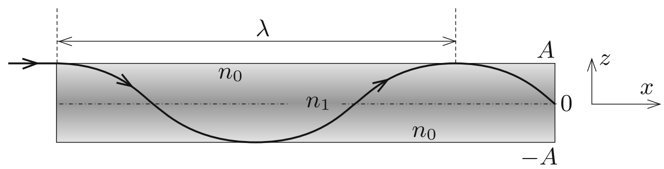


(*4 pont*) Közli: *Berke Martin,* Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimnázium

P. 5202. A fémek fajhője nagyon alacsony hőmérsékleteken jó közelítéssel az abszolút hőmérséklettel arányos ($c = \alpha \cdot T$, az α arányossági tényező a fémre jellemző állandó). Egy hidegfizikai laboratórium igen jó hőszigetelésű kamrájában két különböző tömegű és különböző fajta fémet összeérintünk. Az egyik (A jelű) fémdarab kezdeti hőmérséklete 1,0 K, a (B jelű) másiké 3,0 K, a kialakuló közös hőmérséklet pedig 2,0 K. Mennyi lesz a közös hőmérséklet, ha a fémdarabok kezdeti hőmérséklete: $T_A = 1{,}5$ K és $T_B = 2{,}5$ K?

(*5 pont*) Közli: *Bertalan Zoltán,* Békéscsaba

P. 5203. Egy $2A$ széles, átlátszó üveglemezben a lemez síkjára merőleges z tengely irányában változik a törésmutató, értéke $z = \pm A$-nál n_0, míg $z = 0$-nál n_1. Az üveglemez szélénél ($z = A$ „magasságban”) az x tengely irányában egy vékony lézersugarat indítunk, amely az üvegben eltérülve egy koszinuszgörbe mentén halad.



a) Hogyan függ a törésmutató z-től?

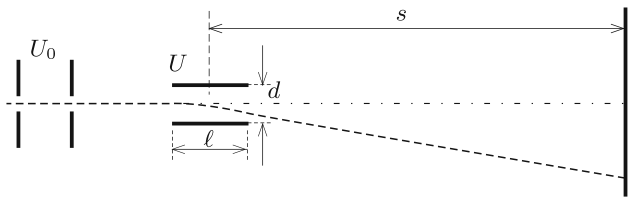
b) Mekkora a fény pályagörbéjének hullámhossza?

Adatok: $A = 1$ cm, $n_0 = 1{,}5$ és $n_1 = 1{,}6$.

(Lásd a **P. 5066.** feladat megoldását a KöMaL 2018. évi decemberi számában.)

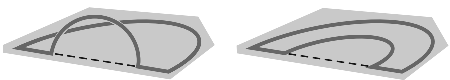
(*5 pont*) Közli: *Gnädig Péter,* Vácduka

P. 5204. Határozzuk meg az *ábrán* vázolt katódsugaras oszcilloszkópcső érzékenységét mm/volt egységben!



Adatok: az eltérítőlemezek hossza $\ell = 2$ cm, a lemezek távolsága $d = 0{,}5$ cm, az ernyő távolsága a lemezek közepétől $s = 20$ cm, a gyorsítófeszültség $U_0 = 1000$ V, és az eltérítőfeszültség legnagyobb értéke $U_{\max} = 100$ V.

(*4 pont*) Közli: *Holics László,* Budapest



P. 5205. Az *ábra* rézvezetékből készült hurkot mutat, amely két koncentrikus félkörből és az azokat összekötő egyenes vezetékekből áll. A hurok vízszintes asztalon fekszik, először a kisebbik félkör függőleges helyzetben van. A kisebbik félkör a szaggatott vonal mint tengely mentén 1 s alatt vízszintes helyzetbe fordul. A hurok teljes egészében függőlegesen felfelé irányuló, homogén mágneses mezőben van.

a) Melyik esetben nagyobb a hurkon átmenő mágneses fluxus?

b) Mekkora az indukált áram átlagos nagysága, és milyen az iránya, miközben a kis félkör lefordul?

c) Mekkora az indukált áram maximális értéke, ha a kis félkört állandó szögsebességgel forgatjuk, és éppen $\Delta t = 1$ s alatt kerül függőleges helyzetéből vízszintes helyzetbe?

Adatok: a mágneses indukcióvektor nagysága $B = 0{,}35$ T, a hurok ellenállása $R = 0{,}025\ \Omega$, a kisebbik félkör sugara pedig $r = 0{,}2$ m.

(*4 pont*) *Tornyai Sándor fizikaverseny,* Hódmezővásárhely

P. 5206. Határozzuk meg az uránból két α-átalakulás és két β-bomlás eredményeként keletkező ionium tömegszámát! Melyik elem izotópja az ionium?

(*4 pont*) *Példatári feladat*

P. 5207. A müon (μ^-) bomlékony elemi részecske, átlagos élettartama 2,197 μs, tömege 207 elektrontömeg, töltése megegyezik az elektronéval.

Egy részecskegyorsító tárológyűrűjében a gyűrű síkjára merőleges, homogénnek tekinthető mágneses tér van. A gyűrű egy adott pontjánál érintő irányból monoenergetikus müonnyalábot vezetnek a tárológyűrűbe. A körpályán keringő müonok átlagosan 5 teljes kör megtétele után maguktól elbomlanak.

a) Mekkora a müonok (átlagos) sebessége és mozgási energiája, ha a tároló-gyűrű átmérője 120 m?

b) Mekkora a gyűrűben a mágneses indukció nagysága?

(*6 pont*) Közli: *Fajszi Bulcsú,* Budapesti Fazekas M. Gyak. Ált. Isk. és Gimn.

Beküldési határidő: 2020. március 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

MATHEMATICAL AND PHYSICAL JOURNAL FOR SECONDARY SCHOOLS
(Volume 70. No. 2. February 2020)

Problems in Mathematics

New exercises for practice – competition K (see page 95): **K. 649.** A fast train and a slow train of the same length are travelling on two parallel tracks, in opposite directions. The tracks both pass through a tunnel. The fronts of the two trains arrive at the two entrances of the tunnel simultaneously. It takes 3 seconds for the total length of the fast train to become covered by the tunnel, and it takes 6 seconds for the slow train. The trains meet inside the tunnel 18 seconds after reaching the tunnel. How long do they take to pass each other? At what time after meeting will the full length of the individual trains emerge from the tunnel? **K. 650.** The side of the small square in the *figure* is 3 cm, the sides of the large rectangle have integer lengths, one being 2 cm longer than the other. The sides of the rectangle and the square are parallel, their centres coincide. The shaded region was made by extending the sides of the small square in one direction, and connecting the points where the sides of the large rectangle were reached. Is it possible for the area of the shaded region to be an even number (of cm^2)? **K. 651.** For the areas marked in the *figure,* $T_1 : T_2 : T_3 = 2 : 7 : 3$. What are the ratios of the lengths x to y, and u to v? **K. 652.** A box contains yellow, blue and red balls, 10 of each colour. In how many different ways is it possible to divide the balls into a group of 10 and a group of 20 such that each group should contain at least one of each colour? (Balls of the same colour cannot be distinguished.) **K. 653.** We know that $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b$ and $a, b > 1$ are integers. Find the minimum value of $a + b$.

New exercises for practice – competition C (see page 96): **Exercises up to grade 10: C. 1588.** Let E and F be the points lying closer to vertex A which divide the sides AB and AD of a quadrilateral $ABCD$, respectively, in a $1 : 2$ ratio. Let G be the point lying closer to B which divides side BC in a $1 : 2$ ratio. Reflect point G in the point E, and reflect its image in the point F. Prove that the final image lies on a side of the quadrilateral. Which side is it, and in what ratio is it divided by the final image? **C. 1589.** Solve the following equation over the set of real numbers: $(y^2 + y - x - 1)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 4$. (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **Exercises for everyone: C. 1590.** Find the positive integer solutions of the equation $(a + 1)^4 \cdot (b + 1)^4 \cdot (c + 1)^4 = (40a + 1) \cdot (40b + 1) \cdot (40c + 1)$. **C. 1591.** The coordinates of a ship are $x = 2$, $y = 0$. The shoreline is given by the curve of equation $y = \sqrt{2x + 1}$. At what angle should the ship deviate from the direction due north in order to reach the closest point of the shore in a straight line? (Assume that the x-axis points towards the east.) **C. 1592.** In England, a man lost his wedding ring, and set out to search for it with the help of a friend and a metal detector. They did not find the ring, but they did find some gold coins from the time of King Henry VIII, delivering 100 000 pounds to the two friends. The one-pound coins were preserved in very good condition, and during the 500 years elapsed, their average annual increase in value was between 1.42% and 1.43%. How many coins may they have found? **Exercises upwards of grade 11: C. 1593.** Two sides of a triangle are 3 cm and 4 cm long. What is the angle enclosed by the sides if the medians drawn from the opposite vertices are perpendicular to each other? **C. 1594.** The first row of seats in an auditorium consists of 24 seats. 20 seats are already taken. What is the probability that there are 2 adjacent vacant seats?

New exercises – competition B (see page 97): **B. 5078.** Define a sequence $a_1, a_2, \dots$ by the following recurrence relation: $a_1 = 1$, $a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ for $n > 1$. Determine the value of a_{2020}. (*4 points*) **B. 5079.** Solve the equation $\log_2 \log_3 x + \log_3 \log_2 x = \log_2 \frac{6}{\log_2 3}$ over the set of real numbers. (*3 points*) (Proposed by *B. Bíró,* Eger) **B. 5080.** Let D denote the midpoint of the base AB in an isosceles triangle ABC. Let H be the point lying closer to C that divides the leg AC in a $1:2$ ratio. The circle BCH intersects line CD at the points C and X. Show that $CX = \frac{4}{3}r$, where r is the radius of the circle ABC. (*4 points*) **B. 5081.** In a triangle, the medians drawn to sides a and b are perpendicular. Prove that $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$. (*3 points*) **B. 5082.** Prove that the geometric mean, the arithmetic mean, and the quadratic mean of the altitudes in any triangle is not greater than the geometric mean, the arithmetic mean, and the quadratic mean of the radii of the escribed circles, respectively. (*5 points*) **B. 5083.** Is there a polynomial $p(x)$ of degree 100 with real coefficients for which the polynomial $p\big(p(x)\big)$ has 10000 distinct real roots? (*5 points*) **B. 5084.** Let n be a positive integer, and let $\mathcal{S}$ denote the set of $0-1-2$ sequences of length n. Determine which sets $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{S}$ have the following property: no matter how a vector $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{S} \setminus \big\{(0, 0, \dots, 0)\big\}$ is selected, the probabilities that the sum of products $c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_na_n$ formed with a randomly chosen element $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ of set A will leave a remainder of 0, 1, or 2 are 1/3 each. (*6 points*) (Based on a problem of *Kürschák competition*) **B. 5085.** Show that a regular heptagon can be dissected into a finite number of symmetrical trapezoids, all similar to each other. (*6 points*) (Proposed by *M. Laczkovich,* Budapest)

New problems – competition A (see page 99): **A. 769.** Find all triples (a, b, c) of distinct positive integers so that there exists a subset S of the positive integers for which for all positive integers n exactly one element of the triple (an, bn, cn) is in S. (Proposed by *Carl Schildkraut,* Massachussets Institute of Technology) **A. 770.** Find all positive integers n such that $n!$ can be written as the product of two Fibonacci numbers. **A. 771.** Let ω denote the incircle of triangle ABC, which is tangent to side BC at point D. Let G denote the second intersection of line AD and circle ω. The tangent to ω at point G intersects sides AB and AC at points E and F. The circumscribed circle of DEF intersects ω at points D and M. The circumscribed circle of BCG intersects ω at point G and N. Prove that lines AD and MN are parallel. (Proposed by *Ágoston Győrffy,* Remeteszőlős)

Problems in Physics

(see page 121)

M. 393. Hang a piece of twisted rope or yarn, and then attach different weights to its free end. Leave the rope unwind, continuously slowing the motion with your hand until it reaches the equilibrium position. How does the angle turned by the lower end of the rope depend on the load?

G. 697. We look into a kaleidoscope; *part* of the observed view is shown in the *figure.* Where are the mirrors of the kaleidoscope? **G. 698.** We have three solid cubes of edges 1 cm, 3 cm and 9 cm. A tower is built from the three cubes. By what factor will the pressure exerted by the tower on the horizontal tabletop be greater when the smallest cube is at the bottom compared to when the largest cube is at the bottom? **G. 699.** At railway stations, we can often observe that the overhead contact wires are stretched with heavy weights suspended by wire ropes looped over, for example, a pulley system shown in the *figure.* *a*) Why is this method better than fixing the overhead contact lines? *b*) What is the tension in each of the double overhead contact wires if the total mass of the weights is 300 kg? *c*) How does the position of the weights change during a bright cloudless day from dawn to dusk? **G. 700.** The 315 billion-tonne D28 iceberg (also known as Loose tooth, or Molar Berg) broke off Antarctica on 25 September 2019. If it was smashed to small ice-cubes and put into water at a temperature of 20 °C, how many times of the amount of the water in lake Balaton could be cooled down to a temperature of 0 °C? The volume of the water in lake Balaton is 1.9 km^3. Suppose that the temperature of the ice-berg is -10 °C everywhere.

P. 5197. As a present, Winnie-the-Pooh was given a sphere-shaped balloon of radius 20 cm. The balloon was filled with helium such that when Winnie-the-Pooh released its thread, it just floated in the air, so it neither rose up nor sank. Winnie-the-Pooh was so happy that he began to scamper around in a circle with the balloon such that he held the end of the thread of the balloon in his hand. The balloon executed uniform circular motion. Piglet observed that whatever Winnie-the Pooh's constant angular speed was the thread of the balloon always had an angle of 45° with the tangent of the circular path of the balloon. What was the radius of the path of the balloon? (Neglect the weight of the thread and the incidental changes in the shape of the balloon.) **P. 5198.** There is a prism-shaped object of mass M on a horizontal smooth surface. One end of a light spring of spring constant D is attached to the prism such that the spring is parallel to the symmetry axis of the prism, whilst the other end is fixed to a disc-shaped bumper of negligible mass. Another object of mass m, sliding at a speed of v_0, collides with the bumper such that it partly compresses the long enough spring. *a*) What is the speed of the centre of mass of the system? *b*) Starting the stopwatch at the moment when the object touches the bumper first, how much time elapses until the spring becomes the shortest? **P. 5199.** A piece of thin and rigid metal wire of length ℓ has a shape of a circular arc. Each end of the wire is attached to a thin thread of length ℓ and the other ends of the threads are fixed at the centre of the circular arc, O, as shown in the *figure.* The period of the pendulum, which can swing with small amplitude in the vertical plane of the *figure,* is T_1. If the metal wire is straightened then the pendulum with the altered shape has a period of T_2, when it swings about O in the plane of the figure, with small amplitude. What is the ratio T_2/T_1? **P. 5200.** The speed of transverse waves in a suspension bridge over a valley is 400 m/s. In a storm the strong wind generated impulses, which are repeated in each second. What is the distance between the pillars if the bridge started to swing heavily? **P. 5201.** The *figure* shows a piston and two springs attached to it. The spring constant of both springs is $D = 1000$ N/m, the ambient air pressure is $p_0 = 10^5$ Pa, and the piston of cross-sectional area $A = 10$ dm^2 encloses a sample of monatomic gas. Initially both springs are unstretched, and the volume of the gas is $V_0 = 50$ litres. How much does the piston move, if $Q = 2$ kJ thermal energy is added to the sample of gas? (The walls of the container and the piston are thermally insulated; friction, and the heat capacity of the heating element are negligible.) **P. 5202.** The specific heat capacity of metals at very low temperatures is approximately proportional to the absolute temperature ($c = \alpha \cdot T$, where the proportionality constant α is characteristic of the material). In a very well insulated chamber of a cryogenic laboratory, two pieces of different metals of different mass are placed such that they came into contact. The initial temperature of one of them (denoted by A) is 1.0 K, whilst that of the other (B) is 3.0 K, and the final common temperature is 2.0 K. What will the final common temperature be if the initial temperature values of the metals are $T_A = 1.5$ K and $T_B = 2.5$ K? **P. 5203.** The refractive index of a transparent glass sheet of width $2A$ varies in the direction of axis z, which is perpendicular to the plane of the sheet. At $z = \pm A$ its value is n_0, whilst at $z = 0$ it is n_1. A thin ray of laser enters into the glass (at a "height of" $z = A$) and travels in the direction of axis x. The laser beam is deflected in the glass and travels along the curved path of a cosine function. *a*) How does the refractive index depend on z? *b*) What is the wavelength of the path of the laser? *Data:* $A = 1$ cm, $n_0 = 1.5$ and $n_1 = 1.6$. **P. 5204.** Determine the sensitivity of the cathode-ray oscilloscope shown in the *figure* in the unit of mm/volt. *Data:* the length of the deflecting plates is $\ell = 2$ cm, their distance is $d = 0.5$ cm, the distance between the screen and the centre of the plates is $s = 20$ cm, the accelerating voltage is $U_0 = 1000$ V, and the greatest value of the deflecting voltage is $U_{\max} = 100$ V. **P. 5205.** The *figure* shows a loop made of a piece of copper wire. The shape of the loop is two concentric semi-circles and two connecting straight line segments. The loop is on a horizontal tabletop, but initially the smaller semi-circle is in a vertical position. The small semi-circle is turned into the horizontal position in 1 s. The dashed line is the axis of rotation. The whole loop is in uniform vertically upward magnetic field. *a*) In which case is the flux linkage of the loop greater? *b*) What is the average value, and the direction of the induced current in the loop, while the smaller loop turns? What is the direction of the current? *c*) What is the greatest value of the induced current if the small semicircle is rotated at a constant angular speed and it takes exactly $\Delta t = 1$ s to turn from the vertical position to the horizontal position? *Data:* the magnetic induction is $B = 0.35$ T, the resistance of the loop is $R = 0.025\ \Omega$, the radius of the smaller semi-circle is $r = 0.2$ m. **P. 5206.** Determine the atomic mass number of ionium, which is the daughter element of uranium, after the uranium emits two α and two β particles. Which is the element whose isotope is the ionium? **P. 5207.** Muon (μ^-) is an unstable elementary particle, its mean lifetime is 2.197 μs, its mass is 207 times the mass of an electron, and its charge is the same as the charge of an electron. In a storage ring (a type of circular particle accelerator) there is uniform magnetic field, which is perpendicular to the plane of the ring. At a certain point of the ring, from the direction of the tangent at that point, a mono-energetic muon beam is injected into the storage ring. The muons revolve along the circular path and on average they decay after completing five whole turns. *a*) What is the (average) speed and kinetic energy of the muons if the radius of the storage ring is 120 m? *b*) What is the magnetic induction in the storage ring?

Problems of the 2019 Kürschák competition

1. In the acute triangle ABC we have $AB < AC < BC$. Let A_1, B_1 and C_1 be the feet of the altitudes from A, B and C, respectively. The point P is obtained by reflecting C_1 over the line BB_1 and the point Q is obtained by reflecting B_1 over the line CC_1. Prove that the circumcircle of the triangle A_1PQ passes through the midpoint of the side BC.

2. Let n be a positive integer. Find all families $\mathcal{F}$ that consist of certain subsets of $\{1, 2, \ldots, n\}$ and satisfy that for every fixed, nonempty subset $X \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, the number of sets $A \in \mathcal{F}$ yielding an intersection $A \cap X$ of even, resp. odd cardinality is the same.

3. Is it true that for any bounded subsets H and A of the real line, the set H can be partitioned into pairwise disjoint translates of A in at most one way? (Infinitely many translates may be used.)