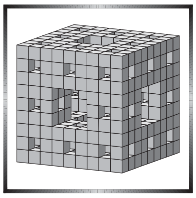
C. 1573. Mutassuk meg, hogy a

$$12^{2n}+7^{2n-1}+3^{3n}+4^{4n-2}-2^{2n}-11^{2n}$$

összeg osztható 23-mal minden pozitív egész n szám esetén.

Javasolta: *Imre Tamás* (Marosvásárhely)

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518



A B pontversenyben kitűzött feladatok (5054–5061.)

B. 5054. Vannak-e olyan n és k pozitív egész számok, amelyekre

$$20^k+19^k=2019^n-10^n?$$

(*4 pont*) Javasolta: *Imre Tamás* (Marosvásárhely)

B. 5055. Adott a síkon a k kör. Mi azon háromszögek magasságpontjainak mértani helye, amelyeknek k a körülírt köre?

(*3 pont*)

B. 5056. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=x^2+bx+c$ másodfokú függvényt. Tudjuk, hogy f zérushelyei a p és q különböző prímszámok, továbbá $f(p-q)=6pq$. Határozzuk meg a p és q prímszámokat, valamint írjuk fel az f függvényt.

(*3 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5057. Az AB átfogójú derékszögű háromszög BC befogóján vegyük fel a D és E pontokat úgy, hogy $DAC\sphericalangle=EAD\sphericalangle=BAE\sphericalangle$. A C csúcsból az AD szakaszra, a D pontból az AB átfogóra bocsátott merőleges talppontjai rendre F és K. Az AE szakaszt a CK egyenes a H pontban, a H ponton keresztül az AD-vel húzott párhuzamos a BC szakaszt az M pontban metszi. Mutassuk meg, hogy a CHM háromszög körülírt körének középpontja az F pont.

(*5 pont*) Javasolta: *Bíró Bálint* (Eger)

B. 5058. Az ABC háromszög belsejében vegyünk fel egy tetszőleges P pontot. Az AP, BP és CP egyenesek a BC, AC, illetve AB oldalakat rendre A_1, B_1 és C_1 pontokban metszik. Igazoljuk, hogy

$$\frac{AP}{A_1P}\cdot\frac{BP}{B_1P}\cdot\frac{CP}{C_1P}\geqslant 8.$$

(*4 pont*) Javasolta: *Németh László* (Fonyód)

B. 5059. Legyen valamely pozitív egész c-re $\{a_n\}$ a következő, rekurzív módon definiált sorozat: $a_0 = c$ és $a_{n+1} = \left[a_n + \sqrt{a_n}\right]$, ha $n \geqslant 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha a sorozat tagja a 2019, akkor a korábbi tagok között nincs négyzetszám, de a későbbi tagok között végtelen sok négyzetszám fordul elő.

(*5 pont*)

B. 5060. Adott a Σ síkon egy k körvonal, és a belsejében egy P pont, amely nem esik egybe k középpontjával. Nevezzük a tér egy Σ-ra nem illeszkedő O pontját *jó vetítő középpontnak,* ha létezik olyan, O-ra nem illeszkedő Σ' sík, hogy a Σ pontjait O-ból Σ'-re vetítve a k kör vetülete szintén körvonal, és ennek a körvonalnak a középpontja P vetülete. Mutassuk meg, hogy a jó vetítő középpontok egy körön vannak.

B. 5061. Egy $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt nevezzünk *területtartónak,* ha tetszőleges $a < b < c$ és x esetén az $\big(a; f(a)\big)$, $\big(b; f(b)\big)$ és $\big(c; f(c)\big)$ pontok által meghatározott háromszög területe megegyezik az

$$\big(a + x; f(a + x)\big), \quad \big(b + x; f(b + x)\big) \quad \text{és} \quad \big(c + x; f(c + x)\big)$$

pontok által meghatározott háromszög területével.

Mely folytonos f függvények területtartóak?

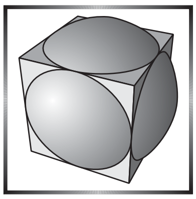
(*6 pont*)

❄

Beküldési határidő: 2019. december 10.
Elektronikus munkafüzet: `https://www.komal.hu/munkafuzet`
Cím: KöMaL feladatok, Budapest 112, Pf. 32. 1518

❄

Az A pontversenyben kitűzött nehezebb feladatok (761–763.)



A. 761. Legyen $n \geqslant 3$ pozitív egész szám. Pozitív egészek egy S halmazát *jónak* nevezzük, ha S elemeinek száma n, S egyik eleme sem osztható n-nel és az S halmaz elemeinek összege sem osztható n-nel. Legyen d az a legkisebb pozitív egész szám, melyre létezik olyan jó S halmaz, melynek pontosan d darab nemüres részhalmazában osztható n-nel a részhalmaz elemeinek összege. Határozzuk meg d-t (n függvényében).

Javasolta: *Aleksandar Makelov* (Burgas, Bulgaria) és
Nikolai Beluhov (Stara Zagora, Bulgaria)